

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Editores: J. Ackeret, E. Baumann, P. Scherrer
E. Stiefel, F. Stüssi, H. Ziegler

Redactor: R. Sängler

VOL. V - 1954



VERLAG BIRKHÄUSER · BASEL
SCHWEIZ · SWITZERLAND · SUISSE

Nachdruck verboten

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen und der
Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten

Copyright 1954 by Verlag Birkhäuser, Basel

Printed in Switzerland

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Survey Articles · Comptes rendus

	Seite Page	Nr. Issue
ERISMANN, TH.: Theorie und Anwendungen des echten Kugelgetriebes . . .	355	(5)
FORD, H.: The Theory of Plasticity in Relation to its Engineering Applica- tions	1	(1)
GERECKE, E.: Drei Beispiele aus der Elektroservotechnik	443	(6)

ORIGINALARBEITEN

Original Papers · Articles originaux

BASS, L.: Zur Theorie der Mahlvorgänge	283	(4)
CHEN, Y.-N.: Torsionsschwingungen unter Berücksichtigung der Masse und der Dämpfung der elastischen Glieder	293	(4)
COLES, D.: The Problem of the Turbulent Boundary Layer	181	(3)
COLLATZ, L., und GOERTLER, H.: Rohrströmung mit schwachem Drall . . .	95	(2)
DAS, S. CH.: On the Concentration of Stresses Due to a Small Elliptic Inclusion on the Neutral Axis of a Deep Beam under Constant Bending Moment	389	(5)
ERICKSEN, J. L.: Deformations Possible in Every Isotropic, Incompressible, Perfectly Elastic Body	466	(6)
GARY, M.: Die Konstruktion der mittleren Linie bei Oberflächenprofilen und einige Zusammenhänge zwischen den zur Kennzeichnung von Oberflächen benutzten Grössen	490	(6)
GREGORIG, R.: Hautkondensation an feingewellten Oberflächen bei Berück- sichtigung der Oberflächenspannungen	36	(1)
HOPKINS, H. G., and PRAGER, W.: On the Dynamics of Plastic Circular Plates	317	(4)
IBRAHIM, A. A. K., and KABIEL, A. M. I.: The Theory of an Oscillating Cylinder Viscometer	398	(5)
KAPLUN, S.: The Role of Coordinate Systems in Boundary-Layer Theory .	111	(2)
MORGAN, A. J. A.: Stress Distributions in Semi-Infinite Solids of Revolution	330	(4)
MÜLLER, J.: Untersuchungen über Elektronenströmungen	203	(3)
(II. Teil)	409	(5)
POPOFF, K.: Sur la thermodynamique des processus irréversibles (Troisième mémoire)	67	(1)
RADOK, J. R. M., und HELLER, A.: Die exakte Lösung der Integralgleichun- gen gewisser Schwingungsprobleme	50	(1)
RUTISHAUSER, H.: Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus	233	(3)
RUTISHAUSER, H.: Anwendungen des Quotienten-Differenzen-Algorithmus.	496	(6)
SCHWAAR, P.: Contribution à l'étude des compresseurs axiaux supersoniques	136	(2)
ZITO, G.: 723 A/B Reflex Klystron Performance	252	(3)

KURZE MITTEILUNGEN

Brief Reports · Communications brèves

	Seite Page	Nr. Issue
BALDINGER, E., und NICOLET, M.: Ein Impulsgenerator mit Sekundäremissionsröhren	508	(6)
BOESCH, W.: Die Berechnung einiger komplexer Werte auf einer Multipliziermaschine mit nur einem Multiplizierwerk	341	(4)
BÜHLER, H.: Bestimmung der Übergangsfunktion eines Regelkreises aus dessen Frequenzgang	420	(5)
FADNIS, B. S.: Boundary Layer on Rotating Spheroids	156	(2)
HENRICI, P.: On Rotational Viscous Flow Through a Tube	511	(6)
LÜSCHER, E.: Prüfgerät für Photomultiplier	343	(4)
MAEHLY, H. J.: Zur iterativen Auflösung algebraischer Gleichungen	260	(3)
NIGAM, S. D.: Note on the Boundary Layer on a Rotating Sphere	151	(2)
RAO, R. S., and NIGAM, S. D.: The Effect of Cross-Viscosity on the Performance of Full Journal Bearing without Side-Leakage	426	(5)
SÄNGER, E.: Radantrieb und Raketenantrieb	164	(2)
SEN, B.: Note on Two-Dimensional Indentation Problems of a Non-Isotropic Semi-Infinite Elastic Medium	83	(1)
SINDEN, F. W.: Ein Oscillationssatz für algebraische Eigenwertprobleme	86	(1)
STOCK, J. R.: An Arithmetic Unit for Automatic Digital Computers	168	(2)
VÖLLMY, H. R.: Aerodynamische Kräfte auf schlanke Rotationskörper	263	(3)
WUNDT, H.: Über eine Funktionalgleichung aus der Wärmeleitung	172	(2)
WUNDT, H.: Abklingen eines schwachen Dralls in der Längsströmung zwischen coaxialen Kreiszyklindern	270	(3)
ZBORNİK, J.: Asymptotische Entwicklungen für Fresnelsche Integrale und verwandte Funktionen und ihre Anwendungsmöglichkeiten bei der Berechnung spezieller Raketenbahnen	345	(4)

VARIA

Miscellaneous · Divers

Acknowledgment (FORD, H.)	441	(5)
Bemerkungen über den Einfluss der Plasmaschwingung in Laufzeitröhren (DÖHLER, O., und KLEEN, W.)	437	(5)
Erwiderung auf die Bemerkungen von O. DÖHLER, und W. KLEEN, über den Einfluss der Plasmaschwingung in Laufzeitröhren (LÜDI, F.)	438	(5)
Historische Anmerkung zum Aufsatz von L. COLLATZ in ZAMP 4, 327-357 (1953): Einige Anwendungen funktionalanalytischer Methoden in der praktischen Analysis (COLLATZ, L.)	276	(3)
Erratum (FADNIS, B. S.)	352	(4)
Erratum (MELCHER, D.)	89	(1)
Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 8. Mai 1954 in Solothurn. Berichte über angewandte Physik und Mathematik: BALDINGER, E., und NICOLET, M.: Ein Impulsgenerator mit Sekundäremissionsröhren	435	(5)
CHAIX, B.: Essais sur des grilles d'aubes pour compresseurs supersoniques	432	(5)

	Seite Page	Nr. Issue
CHEN, Y.-N.: Instationäre Randbedingung für die durch eine Querschnitts- änderung gebildete Übergangszone in einer instationären, eindimensio- nalen Gasströmung	433	(5)
DZUNG, L. S.: Thermostatische Zustandsänderungen des trockenen und des nassen Dampfes.	431	(5)
FRIES, J. R. DE: Informationstheorie	434	(5)
HÜRLIMANN, R.: Experimentelle Beiträge zum Spaltverlustproblem . . .	430	(5)
SCHLAEPPI, H.: Entwicklung einer programmgesteuerten elektronischen Rechenmaschine am Institut für angewandte Mathematik der ETH. . . .	435	(5)
Generalversammlung der Union Radio-Scientifique Internationale vom 23. August bis 2. September 1954 in den Haag	277	(3)
Jahrestagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik vom 20. bis 24. April 1954 in München	88	(1)
Internationaler Mathematikerkongress in Amsterdam, September 1954 (STIEFEL, E.)	516	(6)
Internationales Symposium über experimentelle Meteorologie in Zürich vom 4. bis 6. Oktober 1954	277	(3)
2. Internationale Tagung für Kurzzeitphotographie und Hochfrequenzkine- matographie vom 22. bis 28. September 1954.	276	(3)
Internationale Tagung über Halbleiter in Amsterdam, vom 29. Juni bis 3. Juli 1954	88	(1)
Ludwig Prandtl (ACKERET, J.)	175	(2)
Wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathe- matik und Mechanik vom 31. Mai bis 4. Juni 1955 in Berlin	441	(5)

BUCHBESPRECHUNGEN

Book Reviews · Notices bibliographiques

ANNIVERSARY VOLUME C. B. Biezeno on Applied Mechanics (H. Stam, Ant- werpen, Djakarta, 1953) (Ref. H. Ziegler)	280	(3)
BAER, R.: Linear Algebra and Projective Geometry (Academic Press, New York, 1952) (Ref. E. Roth-Desmeules)	278	(3)
BERGMAN, S., and SCHIFFER, M.: Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics (Academic Press Inc., New York, 1953) (Ref. A. Pfluger)	353	(4)
BLATT, J. M., and WEISSKOPF, V. F.: Theoretical Nuclear Physics (John Wiley & Sons, New York, 1952) Ref. R. Schafroth).	92	(1)
CHANDRASEKHARAN, K., and MINAKSHISUNDARAM, S.: Typical Means (Ox- ford University Press, 1952) (Ref. A. Pfluger)	179	(2)
CLARK, E.: An Introduction to Statistics (John Wiley & Sons, New York, 1953) (Ref. W. Saxer)	442	(5)
COCHRAN, W. C.: Sampling Techniques (J. Wiley & Sons, New York, 1953) (Ref. W. Saxer)	518	(6)
COMPENDIUM OF METEOROLOGY. Edited by Th. F. Malone (American Meteoro- logical Society, Boston, Mass., 1951) (Ref. J. C. Thams)	279	(3)
DEBYE, P. W. J.: Collected Papers of (Interscience Publishers, New York, 1954) (Ref. R. Sänger)	352	(4)
DISKUSSIONSTAGUNG der Sektion für Kristallkunde der Deutschen Mineralo- gischen Gesellschaft: Zur Struktur und Materie der Festkörper (Springer- Verlag, Berlin, 1952) (Ref. W. Epprecht).	94	(1)

	Seite Page	Nr. Issue
EBERT, H.: Physikalisches Taschenbuch (Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1951) (Ref. O. Huber)	179	(2)
FEDERHOFER, K.: Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers. I./III. Teil (Springer-Verlag, Wien, 1950/51) (Ref. F. Stüssi)	90	(1)
FEDERHOFER, K.: Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes (Springer-Verlag, Wien, 1950) (Ref. F. Stüssi)	92	(1)
FINSLER, P.: Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen (Verlag Birkhäuser, Basel, 1951) (Ref. H. Hopf)	178	(2)
FLUEGGE, S., und MARSCHALL, H.: Rechenmethoden der Quantentheorie. 1. Teil: Elementare Quantenmechanik (Springer-Verlag, Berlin 1952) (Ref. M. R. Schafroth)	278	(3)
FRAUENFELDER, P., und HUBER, P.: Einführung in die Physik, Band I: Mechanik, Hydromechanik und Thermodynamik (Ernst-Reinhardt-Verlag, Basel, 1951) (Ref. W. Hardmeier)	517	(6)
FRISCH, O. R.: Progress in Nuclear Physics, Vol. 2 (Pergamon Press, London, 1952) (Ref. O. Huber)	353	(4)
FRY, W. J., TAYLOR, J. M., and HENVIS, B. W.: Design of Crystal Vibrating Systems for Projectors and Other Applications (Dover Publications, New York, 1948) (Ref. S. Steinemann)	441	(5)
GILLESPIE, A. B.: Signal, Noise and Resolution in Nuclear Counter Amplifiers (Pergamon Press, London, 1953) (Ref. E. Baldinger)	282	(3)
HALLIDAY, D.: Introductory Nuclear Physics (John Wiley & Sons, New York, 1950) (Ref. H. Wäffler)	94	(1)
HOPF, L.: Introduction to the Differential Equations of Physics (Dover Publications, New York, 1948) (Ref. M. Plancherel)	282	(3)
KÜCHENMANN, D., and WEBER, J.: Aerodynamics of Propulsion (McGraw-Hill Publishing Co., London, 1953) (Ref. W. Spillmann)	354	(4)
MARTON, L.: Advances in Electronics, Vol. IV (Academic Press, New York, 1952) (Ref. A. A. Rusterholz)	518	(6)
MAYER, H.: Physik dünner Schichten, Teil I (Wissenschaftliche Verlags-gesellschaft, Stuttgart, 1950) (Ref. N. Schaetti)	93	(1)
MAYRHOFER, K.: Inhalt und Mass (Springer-Verlag, Wien, 1952) (Ref. E. Roth-Desmeules)	281	(3)
MUNROE, M. E.: Introduction to Measure and Integration (Addison-Wesley Publishing Co., Cambridge, Mass., 1953) (Ref. M. Plancherel)	281	(3)
PIRLET, J.: Statik der rahmenartigen Tragwerke. (Springer-Verlag, Berlin, 1951) (Ref. F. Stüssi)	89	(1)
PRAGER, W., and HODGE, P. G.: Theory of Perfectly Plastic Solids (John Wiley & Sons, New York, 1951) (Ref. H. Ziegler)	180	(2)
PROCEEDINGS of the Western Computer Conference (Published by The Institute of Radio Engineers, New York, 1953) (Ref. A. Speiser)	354	(4)
RAINICH, G. Y.: Mathematics of Relativity (John Wiley & Sons, New York, 1950) (Ref. B. Eckmann)	178	(2)
REICHARDT, W.: Grundlagen der Elektroakustik (Akademische Verlagsge-sellschaft Geest & Portig, Leipzig, 1952) (Ref. W. Furrer)	91	(1)
SCHWANK, F.: Randwertprobleme (B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Leip-zig, 1951) (Ref. E. Roth-Desmeules)	442	(5)
SECHLER, E. E.: Elasticity in Engineering (John Wiley & Sons, New York, 1952) (Ref. E. P. Popov)	90	(1)

	Seite Page	Nr. Issue
SHOCKLEY, W., HOLLOMON, J. H., MAURER, R., and SEITZ, F.: Imperfections in Nearly Perfect Crystals (John Wiley & Sons, New York, 1952) (Ref. W. Epprecht)	280	(3)
SOMMERFELD, A.: Vorlesungen über theoretische Physik, Band V: Thermodynamik und Statistik (Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden, 1952) (Ref. M. R. Schafroth)	177	(2)
UMSTAETTER, H.: Einführung in die Viskosimetrie und Rheometrie (Springer-Verlag, Berlin, 1952) (Ref. J. Ackeret)	180	(2)
VOELLM, E.: Nomogramme zum praktischen Rechnen. (Herausgegeben von Ed. Ärni-Leuch, Bern) (Ref. H. Künzi)	353	(4)
WESTERGAARD, H. M.: Theory of Elasticity and Plasticity (John Wiley & Sons, New York, 1952) (Ref. H. Ziegler)	177	(2)

AUTORENREGISTER

Index of Authors · Table des auteurs

- Z = Zusammenfassende Berichte - Survey Articles - Comptes rendus
- O = Originalarbeiten - Original Papers - Articles originaux
- M = Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves
- V = Varia - Miscellaneous - Divers
- B = Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques

A

ACKERET, J., V 175, B 180

ERICKSEN, J. L., O 466
ERISMANN, Th., Z 355

B

BALDINGER, E., B 282
BALDINGER, E., und NICOLET, M.,
M 508, V 435
BASS, L., O 283
BÖSCH, W., M 341
BÜHLER, H., M 420

FADNIS, B. S., M 156, V 352
FORD, H., Z 1, V 441
FRIES, J. R. DE, V 434
FURRER, W., B 91

G

C

CHAIX, B., V 432
CHEN, Y.-N., O 293, V 433
COLES, D., O 181
COLLATZ, L., V 276
COLLATZ, L., und GÖRTLER, H., O 95

GARY, M., O 490
GERECKE, E., Z 443
GÖRTLER, H., und COLLATZ, L., O 95
GREGORIG, R., O 36

D

DAS, S. CH., O 389
DÖHLER, O., und KLEEN, W., V 437
DZUNG, L. S., V 431

HARDMEIER, W., B 517
HELLER, A., und RADOK, J. R. M., O 50
HENRICI, P., M 511
HOPF, H., B 178
HOPKINS, H. G., and PRAGER, W., O 317
HUBER, O., B 179, 353
HÜRLIMANN, R., V 430

E

ECKMANN, B., B 178
EPPRECHT, W., B 94, 280

I

IBRAHIM, A. A. K., and KABIEL, A. M. I.,
O 398

K

- KABIEL, A.M.I., and IBRAHIM, A.A.K.,
O 398
KAPLUN, S., O 111
KLEEN, W., und DÖHLER, O., V 437
KÜNZI, H., B 353

L

- LÜDI, F., V 438
LÜSCHER, E., M 343

M

- MÄHLY, H. J., M 260
MELCHER, D., V 89
MORGAN, A. J. A., O 330
MÜLLER, J., O 203, 409

N

- NICOLET, M., und BALDINGER, E.,
M 508, V 435
NIGAM, S. D., M 151
NIGAM, S. D., and RAO, R. S., M 426

P

- PFLUGER, A., B 179, 353
PLANCHEREL, M., B 281, 282
POPOFF, K., O 67
POPOV, E. P., B 90
PRAGER, W., and HOPKINS, H. G., O 317

R

- RADOK, J.R.M., und HELLER, A., O 50
RAO, R. S., and NIGAM, S. D., M 426

- ROTH, E., B 278, 281, 442
RUSTERHOLZ, A. A., B 518
RUTISHAUSER, H., O 233, 496

S

- SÄNGER, E., M 164
SÄNGER, R., B 352
SAXER, W., B 442, 518
SCHAETTI, N., B 93
SCHAFROTH, M. R., B 92, 177, 278
SCHLAEPP, H., V 435
SCHWAAAR, P., O 136
SEN, B., M 83
SINDEN, F. W., M 86
Speiser, A., B 354
SPILLMANN, W., B 354
STEINEMANN, S., B 441
STIEFEL, E., V 516
STOCK, J. R., M 168
STÜSSI, F., B 89, 90, 92

T

- THAMS, J. C., B 279

V

- VOELLMY, H. R., M 263

W

- WÄFFLER, H., B 94
WUNDT, H., M 172, 270

Z

- ZBORNICK, J., M 345
ZIEGLER, H., B 177, 180, 280
ZITO, G., O 252

Fasc. 1 (15. 1. 1954)	pag. 1- 94
Fasc. 2 (15. 3. 1954)	pag. 95-180
Fasc. 3 (15. 5. 1954)	pag. 181-282
Fasc. 4 (15. 7. 1954)	pag. 283-354
Fasc. 5 (15. 9. 1954)	pag. 355-442
Fasc. 6 (15. 11. 1954)	pag. 443-518

The Theory of Plasticity in Relation to its Engineering Applications

By HUGH FORD, London¹⁾

Nature of Plastic Deformation

There are two main approaches to the study of plastic deformation: these may be termed the 'microscopic' and the 'macroscopic'.

The 'microscopic' line of study is that which is variously called 'metal physics', 'physics of single crystals', etc. and which relates the behaviour of crystalline aggregates to fundamental ideas of the deformation of single crystals. It is possible to formulate some general notions of the theoretical strength and cohesion of materials and of the nature of shear arising from dislocations in regular crystal structure [1], [2], [3]²⁾. Lately HILL and BISHOP [4] have been preparing the way for building up a mathematical theory of plasticity in polycrystals from single crystal behaviour, but so far only general theorems are being studied.

The 'macroscopic' approach is that in which the material is assumed to be an agglomerate without a crystalline structure. The mathematical theory of plasticity deals with idealized materials of this kind, and examines analytically their behaviour when subjected to complex stress conditions. Its purpose is to develop mathematical techniques for calculating non-uniform distributions of stress and strain in bodies permanently distorted in any way. Leading out of the strict theory is the 'technological' study: use is made on the one hand of the relationships of the mathematical theory and on the other of experimentally determined laws and criteria to establish technically important results.

A full treatment cannot be given in one paper: all that can be done is to discuss the basic laws of the mathematical theory and review some of the techniques used for solving problems. A few examples of the application of these laws and techniques to the study of industrial processes will then be given.

One of the difficulties in interpreting the mathematical theory of plasticity is that the behaviour of technical materials when under load in the plastic range depends upon their structure and the problems presented by a complete analysis of anisotropic, non-homogeneous materials are too complex to attempt a solution by our present methods. It is in fact remarkable that metallic materials behave so nearly to that predicted by theory from consideration of idealized

¹⁾ Department of Applied Mechanics, Imperial College, University of London.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 34.

materials, but we must always remember that the anisotropic, crystalline nature of metals must intrude sooner or later and modify the results predicted from simple theory.

The mathematical theory must, therefore, make certain assumptions and generally these are:—

- (1) Isotropy. Theory for anisotropic material is not yet very far advanced [5].

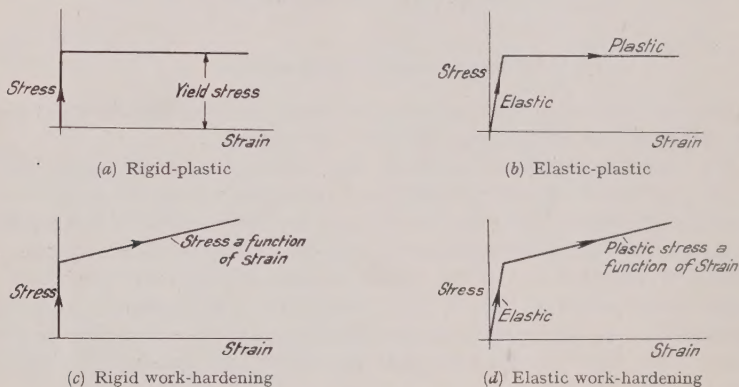


Figure 1

- (2) Sharp yield with no hysteresis on loading and unloading. No change in elastic moduli with the degree of deformation.
- (3) No Bauschinger effect—one basic yield stress relation for tension and compression.
- (4) No temperature effects. Yield stress independent of time rate of strain, no creep or recovery.
- (5) Idealized stress-strain relations (Figure 1).

In large deformations it is possible to obtain complete solutions by a step-wise graphical solution, taking small strain increments over which the yield stress is considered constant (Figure 2).

Actual stress-strain curves can be approximated to types (c) and (d) with reasonable success and although the sharp yield does not usually occur, suitable experimental techniques can be used, as will be shown later.

The theory of perfectly plastic solids with no elastic region can be satisfactorily applied to work-hardening materials. This theory has wide applications particularly for large deformations where the elastic strains are an insignificant part of the whole. When we determine that, even for the highest strength steel the elastic strain does not exceed 0.5 per cent, this theory applies very generally in practical problems.

There are two principal types of elastic-plastic problem: That in which all the material reaches yield at the same instant, but yielding depends upon the elastic strain pattern, the plastic strains being of the same magnitude, and that in which there is an elastic-plastic interface and the elastic region presents a restraint to unrestricted flow. The equations of flow involve the generalized HOOKE'S law equations, and the elastic and plastic strains are of the same

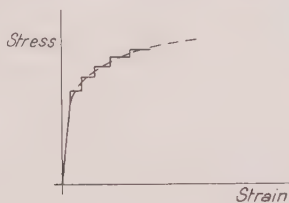


Figure 2

order. Only a few cases have been solved, a high degree of symmetry usually being necessary, and the shape of the elastic-plastic interface must be predictable [5].

The General State of Stress

The stress at a point can be defined in terms of six stress components.

Three normal stresses

$$p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}$$

and three shear stresses

$$p_{xy}, p_{yz}, p_{zx}$$

according to any arbitrary Cartesian co-ordinates [6].

Alternatively, a state of stress is uniquely defined by its three principal stresses:

$$p_1, p_2, p_3$$

and the directions of these stresses in space.

A given state of stress at a point does not depend upon the directions of the arbitrary co-ordinates chosen in the first place, and, therefore, there can only be one set of principal stresses and axes.

In terms of the general stress components $p_{xx}, p_{yy}, \dots, p_{zx}$, the principal stresses are the three roots of the equation

$$p^3 + J_1 p^2 + J_2 p + J_3 = 0 \quad (1)$$

where

$$J_1 = -(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}), \quad (1a)$$

$$J_2 = (p_{xx} p_{yy} + p_{yy} p_{zz} + p_{zz} p_{xx} - p_{xy}^2 - p_{yz}^2 - p_{zx}^2), \quad (1b)$$

$$J_3 = -(p_{xx} p_{yy} p_{zz} + 2 p_{xy} p_{yz} p_{zx} - p_{xx} p_{yz}^2 - p_{yy} p_{zx}^2 - p_{zz} p_{xy}^2). \quad (1c)$$

For a given state of stress the quantities J_1 , J_2 , and J_3 must be constant, i.e. they are invariants to orthogonal transformations of co-ordinates.

Notation: p_{xx} = stress in direction x on a plane x (normal),

p_{xy} = stress in direction x on a plane y (shear).

Principal stresses $p_1 > p_2 > p_3$ algebraically.

Tension is positive, compression negative, unless otherwise indicated.

Tensor Notation

In the generalized statement of the mathematical theory of plasticity, tensor notation allows a clear and concise presentation, but, since the greater part of the paper deals with particular problems and processes, it will not be used here. Reference should be made to HILL [5].

Yield

Suppose the intensity of a state of stress at a point in an idealized material gradually increases, passing through a series of stress states, when does the first permanent change of shape occur?

For isotropic materials, over the range of stresses normally encountered in technology, yielding is found to be independent, over the practically significant range, of hydrostatic stress (i.e. the mean stress) being dependent only on stress *differences* [7].

Denote the hydrostatic stress by

$$\bar{p} = \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3} = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3}. \quad (2)$$

The stress deviations are then

$$p'_{xx} = p_{xx} - \bar{p} = \frac{2 p_{xx} - p_{yy} - p_{zz}}{3}. \quad (3)$$

Note:

$$p'_{xy} = p_{xy}.$$

In terms of the stress deviations (3), equation (1) becomes

$$p'^3 + J'_2 p' + J_3 = 0, \quad (4)$$

where

$$J'_2 = (p'_{xx} p'_{yy} + p'_{yy} p'_{zz} + p'_{zz} p'_{xx} - p_{xy}^2 - p_{yz}^2 - p_{zx}^2), \quad (4b)$$

$$J'_3 = -(p'_{xx} p'_{yy} p'_{zz} + 2 p_{xy} p_{yz} p_{zx} - p'_{xx} p_{yz}^2 - p'_{yy} p_{zx}^2 - p'_{zz} p_{xy}^2). \quad (4c)$$

Now yielding can only depend on the magnitude of the state of stress and must be independent of the orientation of the co-ordinate axes, i.e. it can only be a function of J'_2 and J'_3 .

Also we have assumed that there is no Bauschinger effect so yield must not depend upon change of sign of the stresses.

J'_2 is unaltered by change of sign, but J'_3 is, and yielding would, therefore, need to be an even function of J'_3 . This would soon lead to complicated functions for yielding. While it must be remembered that yielding could be *any* suitable function of J'_2 and J'_3 the simplest is clearly to take

$$J'_2 = \text{const.}$$

This is the von Mises yield criterion; CLERK-MAXWELL in 1865 first proposed it on mathematical grounds, but other interpretations have been put forward [8], [9], [10].

By carrying out a simple tensile or compression test, the yield stress can be determined. Alternatively, torsion of a thin tube allows the shear yield stress in torsion to be found.

Denoting the shear yield stress in the tension or compression test by k (i.e. the yield stress measured in the test would be $2k$) the von Mises criterion is written as:

$$(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)^2 + (\bar{p}_2 - \bar{p}_3)^2 + (\bar{p}_3 - \bar{p}_1)^2 = 8k^2 \quad (5)$$

or, for general co-ordinates as:

$$(\bar{p}_{xx} - \bar{p}_{yy})^2 + (\bar{p}_{yy} - \bar{p}_{zz})^2 + (\bar{p}_{zz} - \bar{p}_{xx})^2 + 6\bar{p}_{xy}^2 + 6\bar{p}_{yz}^2 + 6\bar{p}_{zx}^2 = 8k^2. \quad (5a)$$

Based on the torsion shear stress k^* , we obtain:

$$(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)^2 + (\bar{p}_2 - \bar{p}_3)^2 + (\bar{p}_3 - \bar{p}_1)^2 = 6k^{*2}. \quad (5b)$$

The other practically important criterion is the *Tresca criterion*, sometimes called GUEST's law because GUEST (1900) first appreciated its practical value and carried out accurate tests with combined stress conditions. It is practically simpler and takes

$$\frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_3}{2} = \text{const.}$$

This criterion ignores the effect of the intermediate stress \bar{p}_2 . The greatest difference between the two criteria is about 15.5 per cent. For a great number of problems, particularly for plane strain, the two criteria give the same result except for a constant. The constant can be adjusted so that results never differ by more than 7.75 per cent.

For rigid-plastic or elastic-plastic materials we take $J'_2 = \text{const}$ for all stress states irrespective of total strain. For work-hardening materials, $J'_2 = \text{const}$ only for an increment of strain. The constant then becomes a parameter, determinable from the yield stress-strain curve, in a manner to be explained later.

Limiting Stress Fields

PRAGER and HODGE [11] and HILL [12] have discussed the graphical representation of the limiting conditions of yield by the Tresca and von Mises criteria. These representations are useful in considerations of testing plasticity laws.

The Law of Plastic Flow

When yield has occurred, what is the resulting strain distribution?

If the stress is uniform, the amount of the strain depends upon the external conditions of restraint or, in the case of a work-hardening material, on the rate of work-hardening.

Usually, however, we have non-uniform stress distributions, and the amount of deformation depends upon the stress pattern as well as the boundary conditions.

DE SAINT-VENANT (1870) [13] stated the law that the directions of the increments of the principal strains coincide with the directions of the principal stresses. In this statement DE SAINT-VENANT recognized that linear relation between stress and strain does not exist in plasticity as it does in elasticity. With plastic deformations, which may be very large, the general displacements of the material may be such that the directions of principal stress throughout the plastic mass will, and generally do, change. So we must follow the increments of plastic strain which result from a given stress condition.

How big are the increments we are talking about? In theory, they are infinitesimal since theoretically there is no difficulty in passing through an infinity of stress states. In practical cases, the increments will be anything from 0.1 per cent strain to 1 or even 3 per cent strain. A crude criterion is to say that the increments can be as large as can be considered not to change the stress distribution to such an extent that the principal stresses change direction.

LÉVY [14] first proposed that, over these strain increments, the strain is proportional to the stress. In terms of the deviatoric stresses, the relations are

$$\frac{\delta e_{xx}^P}{p'_{xx}} = \frac{\delta e_{yy}^P}{p'_{yy}} = \dots = \frac{\delta e_{zz}}{p_{zz}}. \quad (6)$$

These relations were restated by VON MISES many years later [15]. They are usually called the Lévy-Mises equations.

Where both the elastic and plastic strains have to be allowed for and strictly they should be in all cases REUSS [15] put forward the following equations

$$\delta e_{xx} = \delta e_{xx}^E + \delta e_{xx}^P = \frac{p'_{xx}}{2G} + \lambda p'_{xx} \dots \quad (\text{three equations}), \quad (7)$$

$$\delta e_{xy} = \frac{p_{xy}}{2G} + \lambda p_{xy} \dots \quad (\text{three equations}). \quad (8)$$

In all these equations δ before the strain indicates that a strain increment must be taken, not the total strain. The factor λ is an artifice which represents the plastic strain increment as proportional to the deviatoric stress: it is not, however, a constant as in elasticity but varies not only from moment to moment but from point to point.

Using the Reuss or the Lévy-Mises equations depends upon whether the plastic strains are comparatively large or small, or whether the elastic material acts as a restraint to the plastic region. Where the elastic strains are ignored in the latter, there is a likely discontinuity since at the plastic-elastic interface a sudden change of strains will occur because the lateral contraction ratio will change over from POISSON'S ratio of about 0.3 in the elastic range to a value of 0.5 in the plastic range.

Condition of Constant Volume for Change of Shape

This last statement means that we assume constancy of volume in the plastic range

$$\delta e_{xx}^P + \delta e_{yy}^P + \delta e_{zz}^P = 0. \quad (9)$$

Accurate measurements on materials heavily deformed plastically show this assumption to be very closely supported. Apart from material consolidation owing to internal cracks, blowholes, etc., materials do not change volume by more than a very small fraction of one per cent.

Work-Hardening

We can determine for pure shear or simple tension, the work-hardening curve of the material, but we must now ask the question 'with a *complex* stress state, what is the new value of k after a given set of increments of the plastic strains?' We assume that the hardening takes place isotropically and the usual answer is that the new k depends upon the work done, i.e.

$$J'_2 = F(W^P) = F\left(\int p^* \delta e^*\right), \quad (10)$$

where p^* = equivalent stress,
 δe^* = equivalent strain increment.

These work functions can be evaluated from the stress-strain curve in simple tension or in torsion [16].

An alternative and usually more useful basis is the total amount of strain, i.e.

$$J'_2 = H\left(\int \delta e^*\right). \quad (10a)$$

Either basis appears to give satisfactory results.

Solution of the General Problem

In general, we have nine unknowns; six stress components and three displacement increments. We have nine relationships; three equilibrium equations, constancy of volume, yield criterion and four (independent) stress-strain increment relations (LÉVY-MISES or REUSS). Although there are six of these, two are inherent in the other relations. Alternatively we can use the statement that the principal stress and strain increment axes coincide and the three stress-strain increment relations to make four as before.

Elastic-Plastic Problems

The complete solution of a general problem in plasticity involves a calculation of the stress and deformation in both the elastic and plastic regions.

The solutions in the elastic and plastic regions are interrelated by certain continuity conditions in the stresses and displacements which must be satisfied along the plastic-elastic boundary. The boundary itself is usually one of the unknowns and is usually of such an awkward shape that even the stress distribution in the elastic region can only be obtained by laborious numerical methods. The complete and accurate solution of the plastic problem is practicable in relatively few cases.

HOHENEMSER [17] attempted an experimental confirmation of the Reuss equations. The results were not conclusive, but the agreement was probably as good as could be expected in view of the uncertainties of this sort of experiment: hysteresis, the rounding of the yield point, anisotropy, etc. Such secondary factors tend to prevent these tests being critical when the strains are small. More recent tests by MORRISON and SHEPHERD [18] were in substantial agreement with the Reuss equations.

Plastic Bending under Tension

We shall first consider a problem in which the plastic and elastic regions both exist. The simple punch and die assembly, Figure 3, starts with a flat blank and as the punch penetrates the die, so the blank is drawn over the die radius into a cylindrical form around the punch, until all the radial blank has passed over the die radius into the die throat.

SWIFT [19] has found that the amount of thinning of the cupwall is much greater than would be expected from simple drawing theory, and has shown that this arises from bending the plate plastically (at *A* and *B*) under a tensile load in plane strain. (Plane, because the sudden change from a flat plate to the die radius and vice versa occurs with zero circumferential strain). Consider a beam undergoing plastic bending (Figure 4).

We cannot assume that the neutral axis NN coincides with the mid-fibre CC because there is an out-of-balance tension over the section corresponding to the radial pull P .

$$P = \int p_r dy.$$

The distance y_N will depend upon the extent of the plastic and elastic regions.

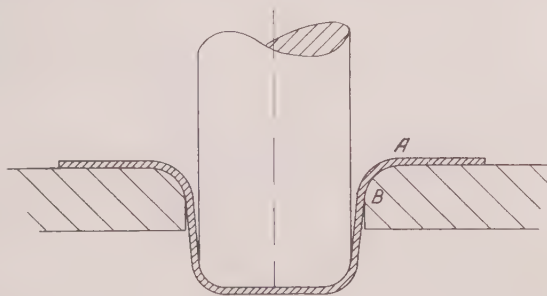


Figure 3

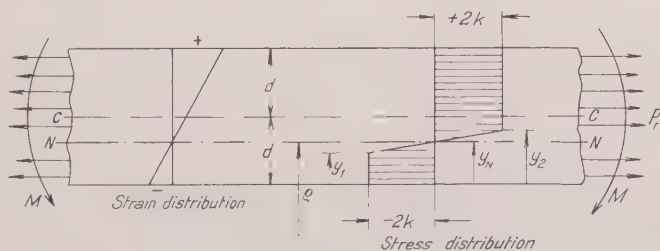


Figure 4

Over the elastic region $y = y_1$ to y_2

$$p_r = a + b y \quad (\text{straight line law}).$$

At the limits of the plastic zone $p_r = 2k$, the yield stress in plane strain. We shall assume that the strains are small and that the yield stress can be considered constant.

Then

$$a = -2k \frac{y_2 + y_1}{y_2 - y_1}, \quad b = \frac{4k}{y_2 - y_1};$$

whence

$$P = 4k(d - y_N). \quad (11)$$

The limits of the elastic range are fixed by

$$\frac{2k}{E} = \frac{y_2 - y_N}{\varrho} = \frac{y_2 - y_N}{R + y_N} \quad (12)$$

where ϱ = radius of curvature of neutral axis.

Thus if the tensile load per unit width P and the die radius R are known, y_N , y_1 and y_2 are known. If P is large and R small, as is usual in deep drawing

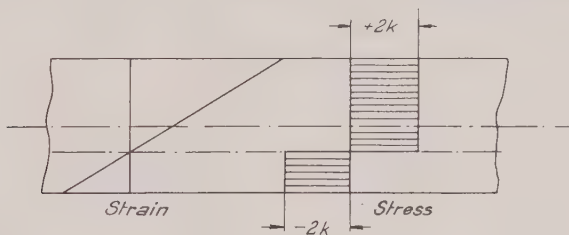


Figure 5

the elastic region becomes so small that the stress distribution is essentially as in Figure 5. Then, in plane plastic strain

$$\delta e_r + \delta e_y = 0 \quad [\text{equation (9)}]$$

and

$$\delta e = \text{thickness strain} = -\frac{2d - y_N}{\varrho} = -\frac{4kd + P}{4kd + 4kR - P}$$

on the tension side, and

$$- + \frac{y_N}{\varrho} = \frac{4kd - P}{4kd + 4kR - P}$$

in the compression side, that is, a total thinning of

$$\frac{4kd}{4kd + 4kR - P} \quad (13)$$

Plane Strain and the Slip-Line Field Theory

By far the most frequent and important applications of plasticity theory involve relatively large plastic strains, and in this case the elastic strains are negligible both in magnitude and in their influence on the stress and strain patterns.

So far, few general problems have been solved, even approximately, but for plane strain problems the theory of the slip-line field allows many cases to be solved. Plane strain conditions hold in many metal working processes: sheet, strip, and wide bar rolling; bar drawing where the width is large compared to the

length; and certain aspects of deep drawing—to quote a few examples. In all these cases, the plastic strains are large. A rigid plastic material is assumed and the Lévy-Mises equations are therefore used. Otherwise, in plane strain the most complete solution of plastic flow problems have been realized.

The conditions are:—

- (1) Flow everywhere parallel to a given plane.
- (2) Motion independent of co-ordinate perpendicular to the given plane.

Using co-ordinates x and y , these conditions mean that we have five unknown quantities.

Stresses p_{xx} , p_{yy} , p_{xy} . Displacements u_x , v_y , and there are five equations:—
Equilibrium Equations (2)

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (15)$$

Criterion of yield (1)

$$(p_{xx} - p_{yy})^2 + 4 p_{xy}^2 = 4 k^2. \quad (16)$$

Constant volume (1)

$$\delta e_{xx} = -\delta e_{yy} \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}. \quad (17)$$

Lévy-Mises equations (1)

$$\frac{2 p'_{xy}}{p_{xx} - p_{yy}} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}}{2 \frac{\partial u_x}{\partial x}}. \quad (18)$$

It is possible to go into considerable detail with these equations, to derive various theorems and conditions which must apply. These have been dealt with exhaustively by HILL [20] and by PRAGER and HODGE [21]. There are sometimes enough boundary conditions in the stresses to solve the problem without reference to the displacements. These are called 'statically determined' problems, but there are not many of them. Usually the stress and displacement equations have to be worked together. Certain conditions about the stresses are deducible, however. Thus the stress normal to the plastic-rigid interface and the shearing stress on the interface must be continuous for equilibrium across the interface. Because the yield criterion is satisfied on both sides of the boundary (the rigid side is just on the point of yield) the direct stress in the tangential direction may or may not be continuous. This follows from the quadratic form of the yield criterion.

Thus, if p_{xx} is the stress normal to the rigid-plastic boundary and the yield stress k is known, then:

$$(p_{xx} - p_{yy}) = \pm 2\sqrt{k^2 - p_{xy}^2}, \quad \text{i.e.} \quad p_{yy} = p_{xx} \pm 2\sqrt{k^2 - p_{xy}^2}.$$

In the limit, two values of p_{yy} differing by $\pm 2k$ can exist on either side of the boundary, when p_{yy} becomes either the greatest or smallest principal stress p_1 or p_2 (Figure 6). The interpretation is to be seen in the example of plastic bending under tension already discussed, where it was shown that when the radius of curvature is small compared with the thickness of the material,

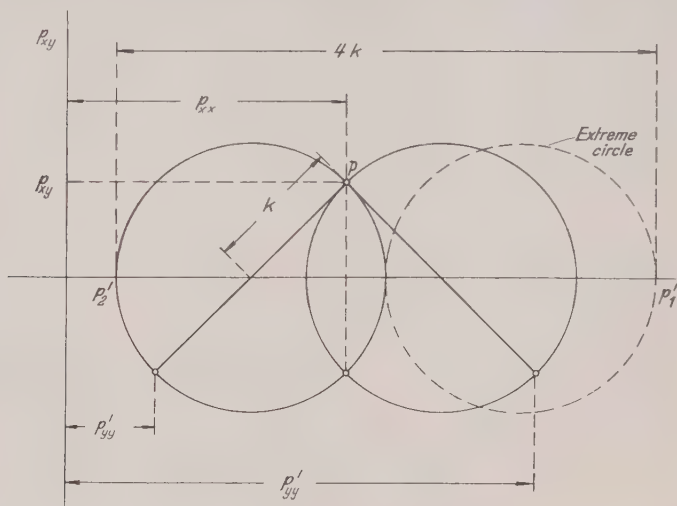


Figure 6

material, the elastic region reduces to an imperceptibly narrow layer between two plastic regions, one side being tension, the other compression. PRAGER calls this 'the last vestige of an elastic region', and since we are neglecting the elastic stresses, we can, in the extreme case, have a discontinuity of $4k$.

The diagram Figure 6 gives a clue to the representation of the plastic condition at any point in plane strain.

The yield criterion is

$$(p_{xx} - p_{yy})^2 + 4p_{xy}^2 = 4k^2$$

and this is the equation of the Mohr circle, radius k , centre at distance $(p_{xx} + p_{yy})/2$ from the origin. The points I and II then represent the yield condition and if we choose our element so that its sides are in the directions I and II then the element corresponds to the directions of maximum shear stress, the normal stress being the hydrostatic stress (Figure 7). The sides are therefore lines of shear (slip lines) and all elements oriented in this way represent shear elements with no extension of their sides, which are of course orthogonal.

Velocity Components

When dealing with slip-line fields, it is more convenient to consider velocity components, that is, the displacements u_x and v_y are to be considered as the displacements in unit time, corresponding to the steady displacement of the boundary in the same time interval. Since none of our quantities are time-dependent (see assumptions page 2) the time rate of strain need not be considered as influencing the results.

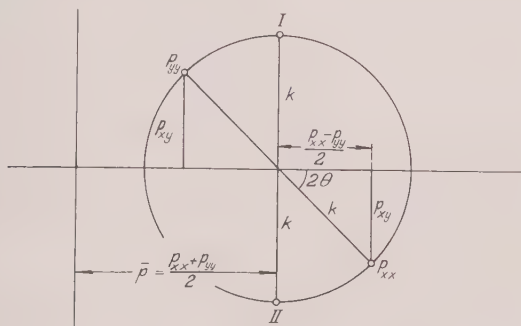


Figure 7

Similar arguments can be applied to the velocity components for continuity as to the stresses, but HILL has dealt with this matter in detail. It is only necessary to point out that the directions of maximum shear rate coincide with the directions of maximum shear stress. Such boundaries (and they form the slip lines of our plastic field) may represent discontinuities in the deformation pattern, just as they may in the tangential stress component.

Curvilinear Co-Ordinates

In plane strain, therefore, the slip lines will form a set of orthogonal curvilinear co-ordinates throughout the plastic mass and the solution of any problem is the determination of the equations for a curvilinear element. The equations of equilibrium require restating in terms of these co-ordinates rather than the Cartesian co-ordinates of equations (14) and (15).

For a very small element the equations of equilibrium become

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \pm 2k = 0 \quad (19)$$

and on integration give

$$\bar{p} + 2k\theta = \text{constant along a first shear line,} \quad (20)$$

$$\bar{p} - 2k\theta = \text{constant along a second shear line} \quad (21)$$

where θ is the angle made by the shear line to some reference direction (HENCKY [22]).

The value of the constant is generally different from one slip line to the next, but along any slip line, if we move through an angle $\delta\theta$ then

$$\bar{p} + 2k\theta = \text{const}, \quad \bar{p}' + 2k(\theta + \delta\theta) = \text{const}$$

whence

$$\bar{p}' - \bar{p} = 2k\delta\theta,$$

or, on the second slip line,

$$\bar{p}' = \bar{p} + 2k\delta\theta.$$

Velocity Relations

Considerations of continuity and the conversion of the Cartesian components of velocity to curvilinear co-ordinates leads to the Geiringer equations.

$$du + v d\theta = 0, \quad (22)$$

$$dv - u d\theta = 0 \quad (23)$$

where u and v are the velocities in the slip-line directions.

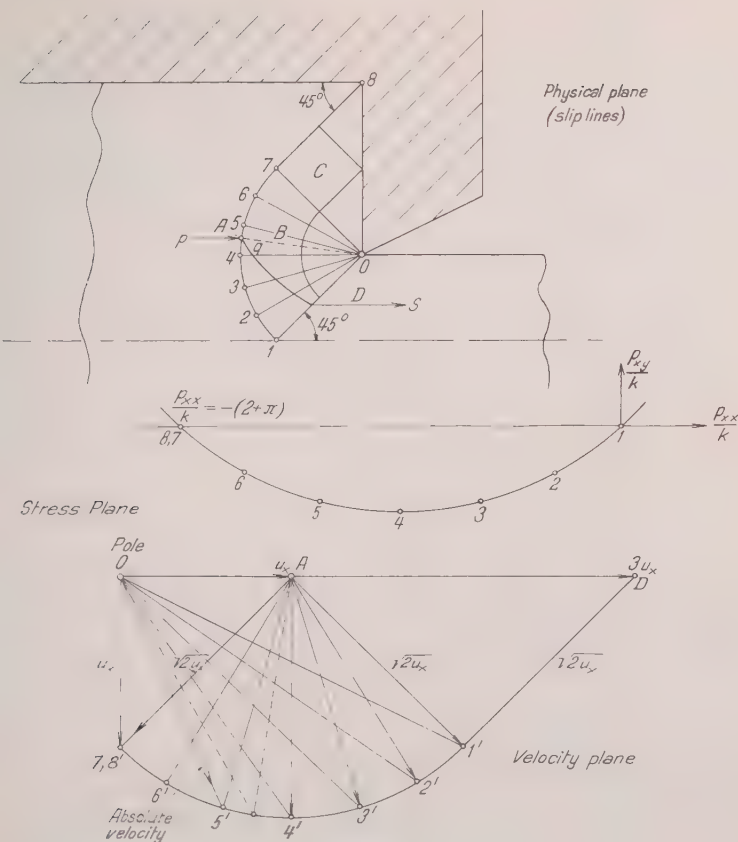
General Theorems and Characteristics of Slip-Line Fields

PRAGER and HODGE [21] have described many of the special properties of slip-line fields and it is unnecessary to go over the ground here. Use may be made of any special characteristics which can be discerned when solving particular problems, but reference must be made to a graphical method which PRAGER¹⁾ [43] has lately put forward for solving problems and which greatly simplifies the work. In this method the stress plane, physical plane (slip-line field), and velocity plane are constructed together. A few examples will illustrate this.

Example 1—Extrusion of a flat sheet (Reduction ratio 3:1)

The slip-line field is shown in Figure 8 (see PRAGER and HODGE, page 182) for a half section through the die (the other half is of course a mirror image). The die is taken as perfectly smooth, so that there is no friction at the die wall and the slip lines meet it at 45° . Material to the left of the limiting slip line l to δ moves at uniform speed u_x that beyond the line l to O moves at uniform speed

¹⁾ Originally presented in Sweden, 1952 [43], but first given in detail by PRAGER at the Summer School on Plasticity at Imperial College, England, July 1953. The author wishes to pay a personal tribute to the considerable influence which PRAGER has exercised in every phase of Plasticity.



u_x to the right because the reduction ratio is 3:1. At both slip lines there is a continuity, and considering any element A arriving at velocity u_x at the entry to the plastic zone, there is a velocity discontinuity as it crosses the line. The Geiringer equation (22) gives

$$\delta v - u \delta \theta = 0.$$

Relative to the point A on the left of the slip line, the element has velocity components u in the normal direction and v in the tangential. From continuity considerations, u' on the right of the line must equal u (Figure 9), i.e.

$$\delta v = u \delta \theta, \quad \delta v' = u' \delta \theta = u \delta \theta.$$

Therefore, as we move along the slip line through any angle $\delta\theta$

$$\delta v = \delta v'$$

i.e.

$$\begin{aligned} v - v' &= \text{a constant along a slip line,} \\ &= \text{the discontinuity at the slip line.} \end{aligned}$$

If we can find the velocity discontinuity at any point, then we know it all along the slip line. Referring to Figure 8, at point 8 an element arrives at velo

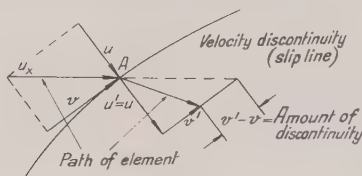


Figure 9

city u_x and must turn sharply through a right angle: it must move downward at the same velocity (constancy of volume) because the velocity in the x -direction is zero the moment it passes across the limiting slip line, because of the di wall. We start to construct the velocity diagram. From pole point O , length $OA = u_x$ the velocity of approach, length O to $7'$, $8'$ is the vertical velocity of any point on the right of the slip line 7 to 8 and the length A to $7'$, $8'$ equal to $\frac{1}{2} u_x$ is the discontinuity along the slip line. Within the triangle C , the material moves down uniformly as a rigid zone until the line BC is reached. The region B is a centred fan, with a discontinuity of value $\frac{1}{2} u_x$ all along the arc AB . Any element, 5 say, has velocity u_x horizontally, $\frac{1}{2} u_x$ tangentially to the limiting slip line, and the arc points 1 to 7 are represented on the arc $1'$ to $7'$ on the velocity plane. At 1, or at any point along the limiting line BD , there is a further discontinuity, and to complete the velocity diagram so that we reach point D , the discontinuity at the line is $\frac{1}{2} u_x$.

Streamlines

The absolute velocity of any point is represented by the vector joining the point to the pole; e.g. a point immediately to the right of the limiting slip line at 5 has velocity O to $5'$. The streamline from A can then be drawn in, by drawing short chords parallel to the absolute velocity at each successive point. The streamline p, q, s is shown.

Example 2—Compression between smooth platens

If a slab of an ideal rigid-plastic material is compressed between smooth, rigid platens (Figure 10a) and the width of the tool, b , is equal to the slab thickness t , then the slip-line field is a simple criss-cross of shear, all deformation being concentrated on the two 45° lines of discontinuity, and if k is the shear yield stress in plane strain, then it can easily be shown that the mean pressure on the

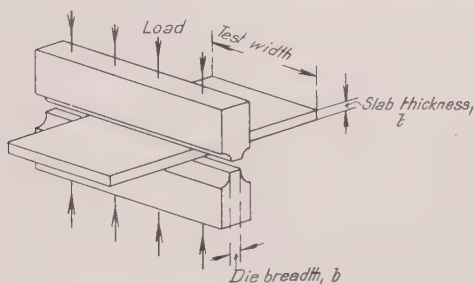


Figure 10a. Solution for $t \simeq 0.7b$.

the p_0 is $2k$. As the thickness t becomes progressively greater, so the slip-line field changes until the slab is so thick that the field from the top die no longer influences that of the bottom one, and it can be shown [23] that the mean die pressure in the limiting case is

$$p_0 = 2k \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) = 2.571 \times 2k. \quad (24)$$

This limit is reached according to HILL when $t/b > 8.74$.

If we start again at $t/b = 1$ and imagine the dies to approach each other gradually, the slip-line field will again go through a gradually changing pattern until we reach a ratio $t/b = 1/2$. Here the slip-line pattern becomes a double criss-cross of 45° lines, and this pattern will be repeated at $t/b = 1/3, 1/4$, etc.

GREEN [24] has examined the slip-line fields for a number of points between $t/b = 1$ and $t/b = 1/2$, and from the stress plane the mean pressure p_0 on the die can be calculated. Figures 10b-d shows the physical (slip-line) plane, the stress plane, and the velocity plane for the case where $t/b \cong 1/\sqrt{2}$.

Having calculated a number of such cases, GREEN showed that, as the dies progressively approach, from condition $t = b$ to $t = b/2$, the mean pressure rises to a maximum at $t = (1/\sqrt{2})b$ some 4 per cent higher than the yield stress $2k$ in plane compression, falling again to $2k$ as it reaches $t = b/2$ (Figure 11).

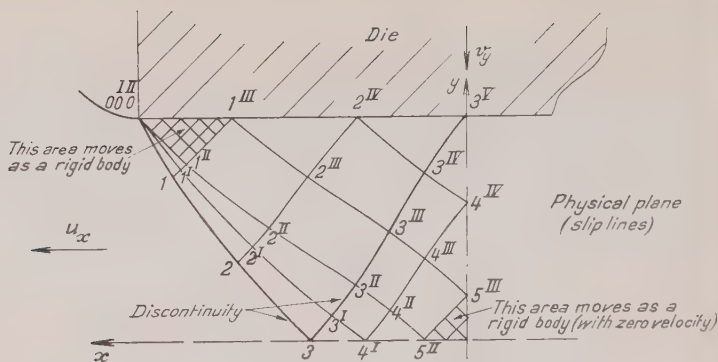
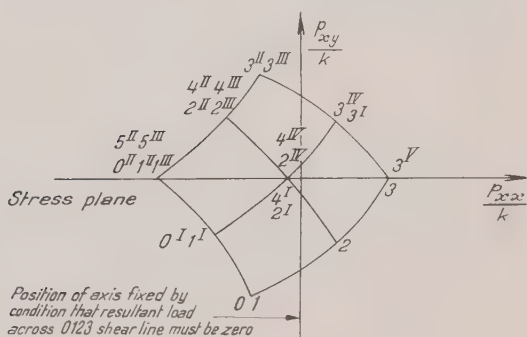
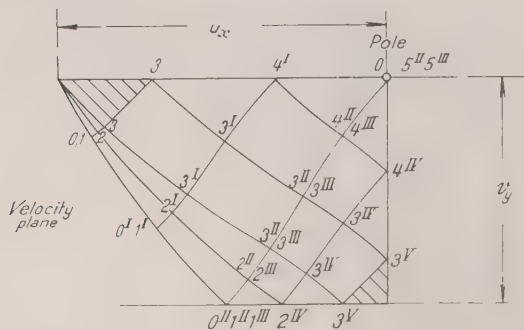
Figure 10b. Solution for $t \approx 0.7b$.Figure 10c. Solution for $t \approx 0.7b$.

Figure 10d.

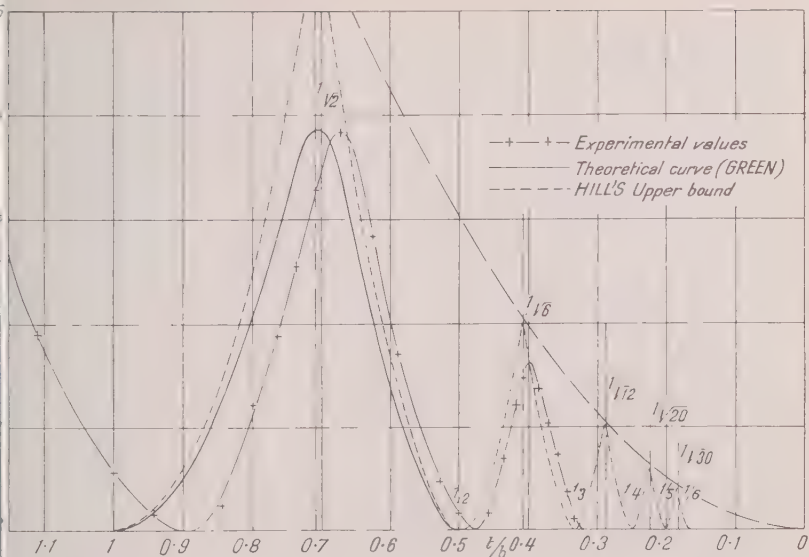


Figure 11

Experimental Investigation of Slip-Line Field Solutions

It may be asked, how far do we know from experimental measurements that these slip-line field results are correct?

There are hardly any experiments which are conclusive because most investigators have used small deformations and have tried to observe the first yielding of material, which is so much dependent upon the elastic behaviour and the transition from the elastic to the plastic region.

However, for several years the author has been working on plane plastic compression, using highly polished and lubricated dies having a width which does not overlap the material (Figure 10a). The unconfined material on each side of the dies acts as a very rigid lateral restraint on the material between the dies and even for quite narrow strip, the condition corresponds remarkably closely to plane strain [25].

This test can be made to give conditions remarkably close to those of the theory and indeed, while GREEN was working on the theoretical problem described above, experiments were being carried out at Imperial College quite independently over the same range of geometrical conditions. If a technological material is to behave as an ideal one, then certain characteristics must be aimed at: —

(1) There must be no anisotropy.

If we use cold rolled high conductivity copper, the strain has taken place in the same sense that the further strain is to occur in plane compression and the anisotropy is of little importance. Tests have shown that the material has rotational isotropy in the vertical plane.

(2) The material must have a sharp yield point.

If we suppose the material cold-worked to point F (Figure 12) and then tested, say in plane compression, a curve $FDBE$ would be obtained. There are

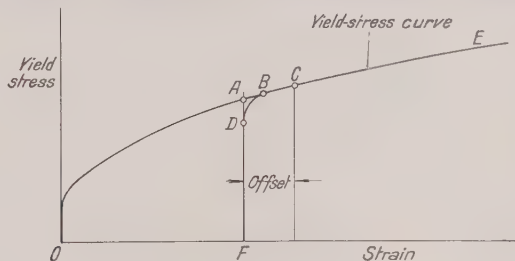


Figure 12

several points which might be used to give a value of the first plastic yield. D is the point where plastic deformation of at least part of the material has first started. B is the point where the curve from F becomes concurrent with the 'yield-stress curve', that is, the curve that is the envelope of all stress-strain curves such as F . It is difficult to determine either of these points and neither can be truly called the yield stress at the point F . A proof stress c is hardly appropriate in plasticity problems.

The best method of determining p_0 is to extrapolate the curve EB to A . A is the point on the 'yield stress curve' corresponding to zero deformation. It is a clearly defined point and has the advantage of corresponding to the theoretical condition of no deformation, eliminating the elastic strains.

(3) There should be no work-hardening.

If high conductivity copper is work-hardened by cold rolling, the yield-stress curve beyond about 30 per cent reduction in thickness, becomes nearly straight and shows little work-hardening. If we can extrapolate to zero deformation each time, the work-hardening is less important, but if we attempt to measure p the mean pressure, using one pair of dies of width b , then t must vary and each stress state will be super-imposed on the previous one, and the effects of flow cannot be separated from those of yield, because in effect we are moving the point F up the yield-stress curve. In these experiments b was changed and held constant, so that the yield stress of the material remained constant for all the tests, and the dies were simply moved to a new point on the same strip for each die width.

(4) There must be no friction.

This condition cannot be exactly met, but this requirement and requirement (2) were very closely approximated by an incremental loading method, which allowed the extrapolation to be made.

The extrapolation was carried out in the following way:—

The strip and dies were measured by micrometer, a pencil line across the strip being used to indicate the position at which the indentation was to be made. The strip was then lubricated at this point by the application of a soft graphite pencil, with a touch of mineral oil, over the whole area. This method of lubrication has been found to give more successful results than pure graphite flakes and has the advantage of being very convenient and simple. After lubrication, the strip was inserted between the dies with the edges at right angles to the width of the dies and centrally placed with respect to the loading axis. Load was then applied to the subpress until it reached a value necessary to produce a small deformation. At this value the load was held steady for 15 to 30 s, then released and the strip removed from the subpress, the mean thickness of the strip at the indentation being then measured. The strip was lubricated again, replaced carefully between the dies to register in the indentation already made, and a slightly greater load was applied. This 'incremental' loading process was repeated several times, in the same indentation, until enough of the curve had been plotted to allow the extrapolation to be made. The load increments chosen in the tests were large enough only to ensure that the load-compression or 'yield stress' curve BE was reached each time.

This 'incremental' loading method overcomes the difficulty of measuring the strip thickness, because the strip is removed between load increments. Another advantage of the method using one indentation is that the strip can be lubricated between each increment and, since these increments of compression are small, the friction cannot develop its full effect and is kept at a very low value indeed. The conditions, therefore, come very close to those specified in theory.

If we plot $p_0/2k$ against the t/b ratio, Figure 11 is obtained, where GREEN's theoretical result is compared with the experimental. The agreement is remarkably close. The experiments extended to $t/b = 1/3$, and GREEN has calculated the upper and lower bounds [26] of the slip-line fields and our results over the next cycle also fit nicely.

In the range where $t/b > 1$ —that is, in the range where HILL and others have similarly calculated the fields—the agreement is equally good (Figure 13).

The Rolling of Metals¹⁾

The problem that all theories of rolling aim to solve is this:—given that it is desired to reduce the thickness of a piece of material by a certain amount,

¹⁾ In the following sections, compressive stresses are reckoned positive.

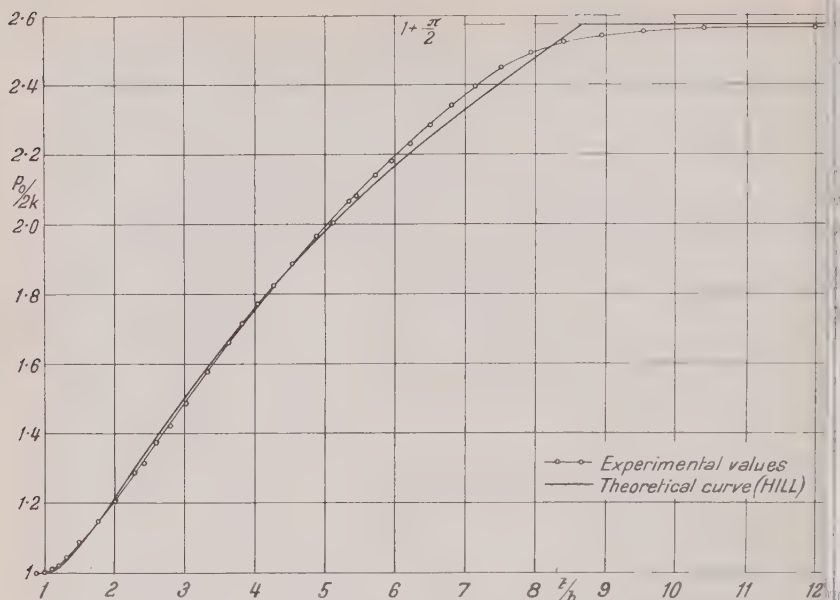


Figure 13

Curves showing the variation of $p_0/2k$ with t/b ($t/b > 1$).

what is the nature of the deformation and what roll force and torque need to be applied to the rolls? The information needed to solve this problem is: the initial and final thickness of the strip, the yield-stress curve of the material, the radius and elasticity of the roll, the coefficient of friction, and any externally applied forces such as strip tensions.

In the theory of plasticity, the assumption is made that the material's resistance to deformation is independent of the rate of strain. This is the condition during cold working, that is, where the material does not recrystallize faster than it is deformed. In hot working, however, the yield stress of many materials is dependent on rate of deformation and another factor enters.

Consideration will, therefore, be confined to cold rolling, in which the yield stress only depends upon the amount of strain, and to strip or sheet rolling, where the width is enough to ensure plane strain conditions. The problem in some respects is very much the same as that of plane compression between parallel dies, but the ratio of thickness to die breadth is much smaller and the dies are slightly inclined to each other. The theory of the slip-line field for inclined dies has been evaluated but it has not been applied to the case of rolling because:

- (1) The curvature of the dies will have an unknown influence.
- (2) Although in cold rolling the coefficient of friction between roll and strip is small, it has a great influence on the process: indeed the process is not possible without it.

An attempt was made by OROWAN [27] to reach a more accurate solution of hot and cold rolling, but for cold rolling, the assumptions made by VON KÁRMÁN [28] are adequate, although the latter's solution is not satisfactory for hot rolling.

When strip is rolled between smooth, lubricated rolls, the strip is in equilibrium under the effect of any external tensions, the roll torque being such as to cause the vertical reduction in thickness. The reduction in height causes a

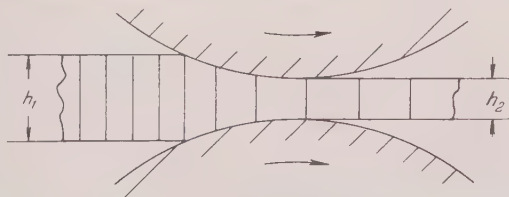


Figure 14

corresponding elongation, so that the speed of the strip leaving the rolls is greater than that entering them. A balance is set up, the rolls rotating at a speed which is less than that of the strip leaving and greater than that of the strip entering. So there is relative movement between the strip and roll surface, and since there are high radial pressures causing the deformation, there are frictional forces developed, and these act in opposite directions, depending upon whether we are on the entry or exit sides. At some intermediate point, the 'neutral point', the roll and strip must have the same surface speed and the direction of the tangential force changes over. This means that the radial force must be increasing as we move inwards from entry to the neutral point and likewise from exit giving a roof type pressure distribution. This is called the 'friction hill'. The horizontal component of the frictional forces and of the outward component of the normal force must just balance the resultant external tension force.

VON KÁRMÁN made one main assumption:

Plane vertical sections remain plane, i.e. there is slipping friction throughout the contact arc and the vertical and horizontal stresses are principal stresses.

There were also two approximations:

- (a) The vertical component of the roll pressure, q , can be taken as approximately equal to the roll pressure S .
- (b) The arc of contact is circular.

These conditions are illustrated in Figure 14. The vertical AB remains straight and vertical as it passes through the roll gap, and any friction there is

at the roll surface has no effect in modifying the stress and strain patterns. The deformation is homogeneous; naturally in cold rolling the angle of contact is not nearly as large as shown and under these circumstances the approximation

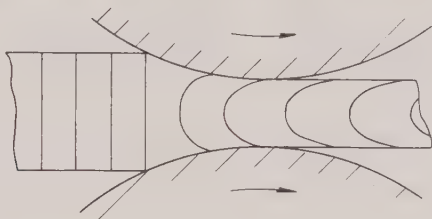


Figure 15

is reasonable. VON KÁRMÁN's theory, therefore, really only applies to cold rolling. In hot rolling, there is high friction and the material is sheared over at the surface, as shown exaggerated in Figure 15.

If the angle of contact is small—and in cold rolling it is usually less than 5° —it is obviously reasonable to take the normal and vertical components as equal.

The vertical element (Figure 16) will be under the external stresses, S , μS at the surfaces and p , $p + \delta p$ on the vertical (internal) faces. We assume that

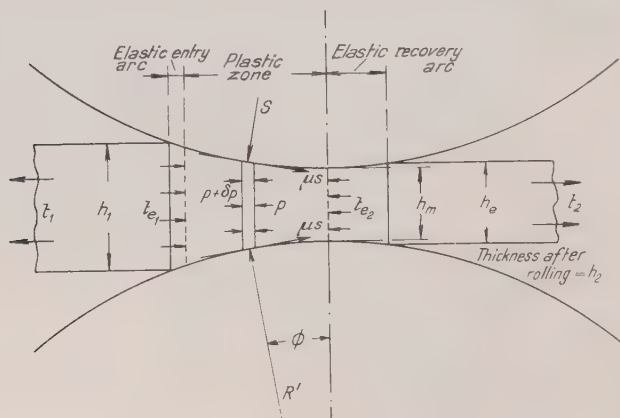


Figure 16

the arc of contact remains circular, radius R' ; thus for an element at angle φ , width $R' \delta\varphi$, the horizontal equilibrium requires

$$(p + \delta p)(h + \delta h) - ph = 2SR\delta\varphi \sin\varphi \pm 2\mu SR\delta\varphi \cos\varphi$$

i.e.

$$\frac{d(h \cdot p)}{d\varphi} = 2 R' S (\sin \varphi \pm \mu \cos \varphi). \quad (25)$$

This is VON KÁRMÁN's equation.

By the Mises criterion

$$s - p = 2 k \quad (\text{assumption 2})$$

where $2 k$ is the yield stress in plane strain (yield stress in simple tension) $\times 2/\sqrt{3}$.

Solutions of von Kármán's Equation

All the argument about rolling theory really reduces to solving equation (25) and the differences are in the approximations or further assumptions made. Many solutions so mutilate this equation that they are no more than empirical results without any real scientific basis.

OROWAN [29], without approximation (a) showed that a stepwise numerical solution was possible, allowing for k varying through the roll gap and was the first to give the correct solution of the equation (called the homogeneous graphical method). It is, however, rather laborious in use and it can be shown that certain further approximations can be made which simplify calculations, yet do not sensibly reduce the accuracy of the results [30].

We make the usual assumption that the coefficient of friction, μ , is constant over the arc of contact.

For angles less than 5°

$$\sin \varphi \cong \varphi, \quad \cos \varphi \cong 1,$$

except where $(1 - \cos \varphi)$ occurs multiplied by a large factor when

$$1 - \cos \varphi \cong \frac{\varphi^2}{2}.$$

For example

$$h = h_2 + 2 R' (1 - \cos \varphi) = h_2 + R' \varphi^2.$$

The roll gap is divided into three zones (Figure 16):

- (1) Elastic compression at entry.
- (2) Plastic compression.
- (3) Elastic recovery at exit.

We shall first ignore (1) and (3)

The geometry of the roll gap then becomes:

length of contact are

$$L = R' (h_1 - h_2), \quad (26)$$

angle of contact

$$\varphi_1 = \frac{h_1 - h_2}{R'}. \quad (27)$$

Then from the differential equation (25), i.e.

$$-\frac{d(hk)}{d\varphi} \left(\frac{s}{k} - 1 \right) + hk \frac{d}{d\varphi} (S) = 2 R' s (\varphi \pm \mu). \quad (28)$$

The boundary conditions are given by the front and back tensions. At entry

$$\varphi = \varphi_1, \quad h = h_1, \quad s_1 - (-t_1) = k_1, \quad s_1 = k_1 - t_1 \quad (\text{total tension} = h_1 t_1).$$

At exit

$$\varphi = 0, \quad h = h_2, \quad s_2 = k_2 - t_2 \quad (\text{total tension} = h_2 t_2).$$

The solution builds up from each end and the curves meet at the neutral point φ_N .

Consider first the case of no tensions.

We assume that the product hk does not change very rapidly: for most metals this is so; i.e.

$$\frac{d(hk)}{d\varphi} \ll hk \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{S}{k} \right). \quad (29)$$

Therefore,

$$\frac{\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{S}{k} \right)}{S/k} = \frac{2 R' (\varphi \pm \mu)}{h_2 + R' \varphi^2}.$$

On integration, therefore,

$$S = C^{\pm} \frac{hk}{R'} e^{\pm \mu H} \quad (30)$$

where

$$H = 2 \sqrt{\frac{R'}{h_2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{R'}{h_2}} \varphi \right). \quad (31)$$

At exit

$$S_2 = k_2, \quad \text{at entry} \quad S_1 = k_1. \quad (32)$$

On exit side

$$S^+ = \frac{k h}{h_2} e^{\mu H} \quad (33)$$

$$S^- = \frac{k h}{h_1} e^{\mu (H_1 - H)} \quad (34)$$

where H_1 = value of H at $\varphi = \varphi_1$.

The above approximation (29) does not hold good with annealed strip and high back tension. But the equation can easily be modified for the case where tensions are applied to the strip [31]. We imagine two passes, one in which no tension is applied and another identical with the first but with applied tension t_1 and t_2 .

Call the roll pressure S_0 in the no-tension case, then from the differential equation

$$\frac{dS_0}{d\varphi} \pm 2\mu R' S_0 - h \frac{dk}{d\varphi} - 2R' k \varphi = 0$$

and for the other case

$$h \frac{dS}{dq} \mp 2\mu R' S - h \frac{dk}{dq} - 2R' k q = 0$$

subtract and integrate

$$h \frac{d}{dq} (S_0 - S) - 2\mu R' (S_0 - S) = 0$$

or

$$S_0 - S \equiv B^{\pm} e^{\pm \mu H}. \quad (35)$$

At entry

$$(S_0 - S)_1 = \{k_1 - (k_1 - t_1)\} = t_1 e^{-\mu(H_1 - H)} = 1.$$

At exit

$$(S_0 - S)_2 = \{k_2 - (k_2 - t_2)\} = t_2 e^{+\mu H_2} = 1.$$

Inserting in (35) we get B^{\pm} and therefore

$$S^+ = \left(\frac{k}{h_2} - t_2 \right) e^{\mu H}, \quad (36)$$

$$S^- = \left(\frac{k}{h_1} - t_1 \right) e^{\mu(H_1 - H)}. \quad (37)$$

These equations are satisfactory over the whole range of tensions and pass reductions.

Total Roll Force

For the total roll force, we integrate the area under the curve of S .

The roll force per unit width P is

$$P = \int_0^{\varphi_1} S R' d\varphi = R' \int_0^{\varphi_1} s d\varphi. \quad (38)$$

This must be done numerically by SIMPSON'S rule or other area formula, because S depends on k , which varies with degree of reduction.

Roll Flattening

The force P acting on a small area of the roll surface causes a flattening of the roll.

HITCHCOCK [32] proposed that if the roll pressure distribution could be considered as approximately elliptical—and this is not far wrong—then it can be shown from the Hertzian theory of contact that the radius of curvature of the

deformed roll is constant over the arc and equal to

$$R' = R \left(1 + \frac{c P}{\delta} \right) \quad (39)$$

where R = roll radius,

P = roll force per unit width,

c = a constant = 3.34×10^{-4} for steel rolls, but depends upon the elastic properties of roll material,

δ = the pass reduction = $(h_1 - h_2)$.

Roll Torque

OROWAN [29] showed that the torque per roll, per unit width

$$G = R R' \left(\int_{\varphi_n}^{\varphi_1} S^- d\varphi - \int_0^{\varphi_n} S^+ d\varphi \right). \quad (40)$$

This relation is the difference of two nearly equal amounts, and with an approximate method of solution, is not accurate. It was shown [30] that an expression insensitive to slight inaccuracies in calculating the pressure distribution could be derived from the equilibrium of the horizontal forces:

$$(t_1 h_1 - t_2 h_2) - 2 \int_{\varphi_n}^{\varphi_1} \mu S^- R' d\varphi + 2 \int_0^{\varphi_n} \mu S^+ R' d\varphi + 2 \int_0^{\varphi_1} S \varphi R' d\varphi = 0$$

whence, using (4), therefore

$$G = R R' \int_0^{\varphi_1} S \varphi d\varphi + \frac{R}{2} (t_1 h_1 - t_2 h_2). \quad (41)$$

The Elastic Arcs of Contact

Although it was realized at an early date in the development of rolling theories that the roll deformed elastically, no allowance was made for the effect of the elastic strains in the strip. For large passes on fairly thick strip the elastic arcs are comparatively small and the error is unimportant.

For medium and small passes the elastic recovery at *exit* has a sizeable influence and in very small passes—4 per cent reduction or even less—even the elastic compression at *entry* may be significant.

The total roll force

$$P = P_p + P_{e1} + P_{e2}. \quad (42)$$

Considering only the elastic recovery zone (Figure 16), (i.e. $P = P_p + P_{e2}$ at the end of the plastic zone and beginning of the elastic zone the tension is t_e and the minimum height h_m . At true exit t_2 and h_2 respectively. We take as a first approximation that the elastic recovery zone is rectangular, of height h

and length a . Since the coefficient of friction is usually not much greater than 0.06 in commercial cold rolling, the frictional force over the surface of the elastic arc is small and we neglect it.

We do not, however, neglect the effect of the frictional force in calculating the effective strip tension t_2 acting on the plastic zone neither do we ignore it when calculating the roll torque.

Using these assumptions and approximations it is possible to calculate the overall elastic contribution to the roll force in terms of the known displacement of the strip surface in the elastic region [33]. The length of the elastic recovery arc, a , is given by:

$$a = \sqrt{\frac{h_2 R'}{E} (1 - \nu^2) (k_2 - t_2)}$$

and the contribution to the roll force P_{e2}

$$P_{e2} = (\text{a constant}) \times \sqrt{h_2 R'} (k_2 - t_{e2})^{3/2} \quad (43)$$

where E = elastic modulus for the strip and ν is Poisson's ratio.

In terms of the externally applied tension t_2

$$t_2 = t_{e2} + \frac{2 \mu P_{e2}}{h_2} \quad (44)$$

The roll torque is modified by the amount

$$G_{e2} = -\mu R P_{e2}.$$

The radius of the flattened arc of contact, R' , is slightly modified [33]

$$R' = R \left\{ 1 + \frac{CP}{(\sqrt{\delta - \delta_2 - \delta_t} + \sqrt{\delta_2})^2} \right\},$$

$$\delta = h_1 - h_2,$$

$$\delta_2 = h_e - h_m = \frac{h_2 (1 - \nu^2)}{E} (k_2 - t_{e2})$$

(h_e = thickness with tension still applied),

$$\delta_t = \frac{1 - \nu^2}{L} (k_2 t_2 - h_1 t_1) \quad \text{recovery at exit when tension removed.}$$

Approximate Methods of Calculating Roll Force and Torque

There are so many calculating methods available that the engineer may very well feel uncertain as to whether one method is better than another but there are several questions which may be asked in deciding on a reliable method to use.

For general use, the real basis is to use only the yield-stress curve of the material to be rolled and the coefficient of friction between the roll and material.

The solution of VON KARMAN's equation already described allows for the variation of the yield stress through the roll gap, and necessarily involves fairly lengthy calculations. A simplification for practical calculations would be possible with a constant yield stress because equations (36) and (37) are such that the neutral point can be predicted and the shape of the pressure distribution depends only upon the shape of the yield-stress curve.

The early theories of rolling all assumed a constant yield stress. That the predicted results were so much at variance with each other and with the miscellaneous experimental results then available is not surprising, especially as these early theories were developed for hot rolling, where the assumptions made do not hold.

The first requirement for a practical calculation method is to make equations (36) to (41) independent of k . For the case of rolling without tension, COOK and LARKE [34] showed that the simple Ekelund formula

$$P = k \sqrt{R' \delta} \left(1 + \frac{1.6 \mu \sqrt{R' \delta} - 1.2 \delta}{h_1 + h_2} \right) \quad (45)$$

gave results in satisfactory agreement with OROWAN's theory, except for a constant varying from about 0.98 to 1.09 depending upon the material.

If we plot per cent reduction against position in the roll gap, it will be found that most of the deformation has occurred in the first 40 per cent of the contact length, so the *average* yield stress is not the mean effective. COOK and LARKE's correcting factor was found [35] to be unnecessary if the true mean yield stress was taken

$$\bar{k} = \frac{\int_0^{\varphi_1} k \, d\varphi}{\int_0^{\varphi_1} d\varphi} = \frac{\int_0^{\varphi_1} k \, d\varphi}{\varphi_1} \quad (46)$$

This 'bunching' of the deformation at the entry side makes it possible to use a mean yield stress, without much loss of accuracy.

With a constant mean yield stress equations (38) and (41) can be numerically integrated once and for all over the practical range of cold rolling conditions [36] and graphically presented as a roll force function in terms of three non-dimensional quantities:

$$a = \sqrt{\frac{R'}{h_2}} \quad (\text{geometrical factor}),$$

$$b = \frac{k}{\bar{k}} - \frac{t_2}{t_1} \quad (\text{tension factor}),$$

$$r = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{h_2}{h_1} \quad (\text{reduction factor}).$$

The roll force per unit width is then:

$$P_p = (\underline{k} - t_1) \sqrt{R'} \delta \times p(a, b, r) \quad (47)$$

$p(a, b, r)$ being the roll force function.

A similar function for torque can be obtained from equation (41)

$$G = R \delta (k - t) \times g(a, r, b).$$

Although a double interpolation is necessary, this can be done quite quickly in practice and a further refinement is to allow for the roll force and torque resulting from the elastic recovery [36]. The method is simple, but necessitates a trial and error calculation since the elastic arc causes a compressive force on the end of the plastic zone and this must be subtracted from the external tension.

Comparison with Experimental Results

Many thousands of separate rolling tests were made on the Sheffield Experimental Mill, using various pass reductions from 2 per cent up to 95 per cent in a single pass, with various types of materials, various lubricants, strip thickness, roll speed, and strip tensions. One of the most difficult factors to control is the friction in the pass, because most lubricants are very sensitive to small temperature changes and the roll force and torque change continuously during a pass on a long coil of strip [37]. It is of course particularly difficult to control when tensions are applied because tension variations cause the work done in the roll gap to change. The question arises—how accurately do our calculation methods and theories predict these results?

Two things influence the answer to this question. First, the effectiveness of the underlying theory in predicting the results (obviously our calculation method can be no better than the theory on which it is based) and second, the means we have for independently measuring yield stress and friction coefficient. If we accept that the yield-stress curve can be determined, then our only adjustable parameter is the coefficient of friction. We now have a little evidence about the friction likely to exist in cold rolling and it is possible, therefore, to test the calculation method against the experimental results [36].

About 150 separate passes made in the Sheffield Mill over a wide range of pass reductions and tensions were calculated using the method outlined above. Assuming the measured results to be correct, the percentage errors in the calculated roll force and torque were determined and it was found that 95 per cent of the results are within ± 10 per cent of the experimental with passes varying from 4 to 74 per cent in a single pass. It is probable that the measured values may involve errors up to ± 3 per cent, so that the calculation method appears to be very satisfactory.

Roll Flattening

In all the foregoing calculations, HITCHCOCK's formula was used to calculate the roll radius. This assumes that the pressure distribution can be taken as elliptical, and while this is not a bad first approximation, it may be thought that the actual roll shape and the pressure distribution—being mutually influencing—will depart sensibly from so simple a picture.

OROWAN pointed out that the pressure distribution clearly cannot be a peaked curve as calculated. The peak would cause a depression in the roll, and he made some tests which, while not inclusive, gave support to this view [27].

This effect is only found in very thin hard strip where the flattening is very great. BLAND [38] calculated the displacements along the arc of contact so that the plastic stresses and strains in the strip were consistent with those for the elastic roll and found that the theory requires also that the roll should show such an indentation. HITCHCOCK's formula was shown to be very adequate however, for most practical cases of cold rolling.

Yield Stress Curves

We have assumed in the foregoing that the yield stress curve is known, not only to some fundamental measure of strain but also to a basis of percentage reduction in the pass. It will be clear that the complex stress-strain distribution in the roll gap will cause a certain amount of work-hardening in excess of that represented by homogeneous compression from a height h_1 to h_2 , because there will be redundant shearing not indicated by the pass reduction.

What we have to do is to determine from a simple mechanical test the stress-strain curve of the material, for example, in simple homogeneous tension or compression and interpret this in relation to the actual deformations in rolling.

The usual stress-strain curve is found for simple homogeneous compression or tension: this can be done successfully up to extensions of about 40 per cent with ductile materials but this corresponds only to about 30 per cent reduction in thickness and is insufficient as a basis for rolling mill calculations.

The method first investigated by SACHS [39] and later developed by COOT and LARKE [40] gives a means of establishing the yield stress in compression for thick material, but is not applicable to thin strip material. Two methods were devised for determining the yield-stress curves for the investigation referred to above [35].

One uses the plane compression test described on page 17. The roll surface are very nearly parallel in cold rolling, and since the theories assume homogeneous compression, the yield-stress curve in plane compression should be very close to that in cold rolling. In the test, a strip of material is compressed incrementally, lubricating each time, the successive increments giving progressive

reductions. The envelope of all the individual compressions forms the yield-stress curve, and since the friction is very small, a very near approach to the true plane compression curve is obtained. The ratio of strip thickness to die breadth should be kept within a ratio of 1:2 to 1:4 for the best results.

The second method uses the tensile test, test pieces being cut in the length direction of the strip from material progressively rolled down, say in 5 per cent passes. The true stress-true strain curve from each test is set up at the appropriate ordinate of reduction, and the envelope of all the curves drawn in as the yield stress curve of the material. The basis of this method was fully described elsewhere [35].

Coefficient of Friction in Cold Rolling

What do we know about the coefficient of friction between lubricated surfaces pressed together with high pressure, and moved relatively to each other for small distances? The evidence is contradictory at present. The values derived from rolling tests as described above depend upon the theory used, the constancy of the rolling conditions, and whether the elastic recovery of the strip is allowed for. From many hundreds of passes which he has calculated at one time or another or by one method or another, the author has come to the conclusion that, if a coefficient of friction as normally conceived exists under rolling conditions, then the value is rather lower than has usually been assumed: probably between 0.05 and 0.07 for good lubrications and adequate cooling.

For good lubricants, OROWAN and LOS [41] found:

- (a) For mild steel on hardened steel, using palm oil μ started at 0.025–0.035, rose gradually to 0.06 as the relative amount of movement increased.
- (b) For aluminium on hardened steel and slightly contaminated surfaces, μ started at about 0.08 and rose steadily with relative movements.

For the same combination, but using Shell lubricant, μ rose from 0.06 to 0.1.

The point OROWAN makes is that the linear movement is a controlling factor.

These values are roughly confirmed by rolling tests, in that steel-on-steel seems to lead to lower coefficients than non-ferrous metals-on-steel. Moreover, by taking certain limiting rolling conditions, and allowing for elastic recovery, μ is found to range from 0.05 to 0.08. The relative movement in rolling is usually small corresponding to the lowest values given by OROWAN (movements less than 1 mm), but with large diameter rolls the relative movements might be more than this. Yet so far as we know, the coefficient is the same for all geometrical similar systems, whereas such a phenomenon as described by OROWAN would involve a variable of the system.

BOWDEN and TABOR's [42] tests, using a special type of apparatus, gave coefficients for well lubricated surfaces from 0.07 to 0.10, but their test procedure, like OROWAN's, involved sliders rubbing on surfaces and the conditions

are strictly not the same as in rolling. There is much surface smearing in rolling, but little transfer of metal to the roll surface.

One method of finding the coefficient of friction in cold rolling tests, which is independent of any particular theory of rolling, is being used at Imperial College at present. It gives good, consistent results.

An increasing back tension is applied to the strip until slipping occurs, when the neutral point has moved to exit, i.e. $\varphi_n = 0$. Under this condition

$$P = R' \int_0^{\varphi_1} s \, d\varphi \quad \text{and} \quad G = \int_0^{\varphi_1} R R' \mu s \, d\varphi$$

whence $\mu = G/(R P)$. Experimentally, it is necessary to measure and record continuously the roll force and torque in a suitable mill, in which a gradually increasing back tension can be applied. It is also necessary, strictly, to measure the forward slip (i.e. the amount by which the strip speed at exit exceeds the roll speed, as a fraction of roll speed) but in practice the value of $G/(R P)$ peaks distinctly at zero forward slip so that no difficulty is experienced in observing it.

This method has now been tried out for a great number of lubricants and rolling conditions and has proved very successful. It confirms that the coefficient of friction lies between 0.04 and 0.08 for normal roll lubricants. The results are not yet published.

REFERENCES

- [1] SCHMID, E., and BOAS, W., *Plasticity of Crystals with Special Reference to Metals* (Hughes & Co., London, 1950). Translation from original German «Kristallplastizität».
- [2] MOTT, N. F., *The Mechanism of Work-Hardening in Metals*, Proc. Inst. Mech. Eng. **166**, 413 (1952).
- [3a] HUME-ROTHERY, W., *Structure of Metals and Alloys*, Inst. Met. Monographs No. 1 (1947), The Institute.
- [3b] COTTRELL, A. H., *Theoretical Structural Metallurgy* (Arnold & Co., London 1948).
- [4] BISHOP, J. E. W., and HILL, R., *Plastic Properties of a Face-Centered Cubic Metal*, Phil. Mag. **42**, 414, 1298 (1951).
- [5] HILL, R., *The Mathematical Theory of Plasticity* (Oxford University Press London, 1950).
- [6] For a general discussion, see SOUTHWELL, *Theory of Elasticity*, chapters 8, 9; SECHLER, *Elasticity in Engineering*, chapters 2, 3, and 4. TIMOSHENKO, *Theory of Elasticity*, Chapter 6.
- [7] BRIDGMAN, P. W., Metals Tech. Pub. 1782 (1942); Rev. mod. Phys. **17**, (1945); J. appl. Phys. **17**, 201 (1946), etc.
- [8] HENCKY, H., Z. angew. Math. Mech. **4**, 323 (1924).
- [9] HUBER, M. T., Czasopisms tech. Lemberg **22**, 81 (1904).
- [10] NADAI, A., J. appl. Phys. **8**, 205 (1937).
- [11] PRAGER, W., and HODGE, P. G., *Theory of Perfectly Plastic Solids* (Chapman and Hall, London, 1951; Wiley, New York).

- [12] HILL, R., *Mathematical Theory of Plasticity*, Chapter 2.
- [13] DE SAINT-VENANT, See *History of the Elasticity and Strength of Materials*, by TODHUNTER and PEARSON (Cambridge University Press, London, 1893), Vol. II, Part I, pp. 165 et seq.
- [14] LÉVY. See TODHUNTER and PEARSON as for DE SAINT-VENANT, for a critical review of the work of LÉVY and DE SAINT-VENANT.
- [15] VON MISES, R., Göttinger Nachr., math.-phys. Klasse 1913, 582.
- [16] HILL, R., *Mathematical Theory of Plasticity*, pp. 23-33.
- [17] HOHENEMSER, K., Proc. 3rd. Int. Cong. appl. Mech., Stockholm 1930, also Z. angew. Math. Mech. 11, 15 (1931).
- [18] MORRISON, J. L. M., and SHEPHERD, W. M., Proc. Inst. Mech. Eng. 163, 1 (1950).
- [19] SWIFT, H. W., Engineer 166, 333 and 357 (1948).
- [20] HILL, R., *Mathematical Theory of Plasticity*, Chapter 6.
- [21] PRAGER, W., and HODGE, P. G., *Theory of Perfectly Plastic Solids*, Chapters 3, 5, and 6.
- [22] HENCKY, H., Z. angew. Math. Mech. 3, 241 (1923).
- [23] HILL, R., *Mathematical Theory of Plasticity*, pp. 254 et seq.
- [24] GREEN, A. P., Phil. Mag. [7] 42, 911 (1951).
- [25] WATTS, A. B., and FORD, H., Proc. Inst. Mech. Eng. [B] 1, 10 (1953).
- [26] See HILL, R., *Mathematical Theory of Plasticity*, Chapter 3.
- [27] OROWAN, E., Proc. Inst. Mech. Eng. 150, 140 (1943).
- [28] KÁRMÁN, T. VON, Z. angew. Math. Mech. 5, 139 (1925).
- [29] OROWAN, E., Proc. Inst. Mech. Eng. 150, 146-159 (1945).
- [30] BLAND, D. R., and FORD, H., Proc. Inst. Mech. Eng. 159, 144 (1948).
- [31] BLAND, D. R., and SIMS, R. B., Proc. Inst. Mech. Eng. (1953, awaiting publication).
- [32] HITCHCOCK, J. H., *Roll Neck Bearings*, Appendix I. 1935 A. S. M. E. Special Report.
- [33] BLAND, D. R., and FORD, H., J. Iron Steel Inst. 171, 245 (July 1952).
- [34] COOK, M., and LARKE, E. C., J. Inst. Met. 71, 557 (1945).
- [35] FORD, H., Proc. Inst. Mech. Eng. 159, 115 (1948).
- [36] FORD, H., BLAND, D. R., and ELLIS, F., J. Iron Steel Inst. 168, 57 (1951); 171, 239 (1952).
- [37] HESSENBERG, W. C. F., and SIMS, R. B., J. Iron Steel Inst. 168, 155 (1951).
- [38] BLAND, D. R., Proc. Inst. Mech. Eng. 163, 141 (1950).
- [39] SACHS, G., Z. Metallkde. 16, 55 (1924).
- [40] COOK, M., and LARKE, E. C., J. Inst. Met. 71, 371 (1945).
- [41] OROWAN, E., and LOS, See UNDERWOOD, *The Rolling of Metals* (Chapman and Hall, London, 1950), p. 154.
- [42] BOWDEN, F. P., and TABOR, D., *The Friction and Lubrications of Solids* (Clarendon Press, Oxford, 1950).
- [43] PRAGER, W., Trans. Roy. Inst. Techn., Stockholm, 65, 1-25 (1953).

(Received: July 6, 1953.)

Hautkondensation an feingewellten Oberflächen bei Berücksichtigung der Oberflächenspannungen¹⁾

Von ROMANO GREGORIG, Zürich²⁾

1. Vorbemerkung

Es bestehen bekanntlich zwei verschiedene Arten von Kondensationen Tropfenkondensation und Hautkondensation. Die Wärmeübergangszahlen bei Tropfenkondensation ergeben für übliche Betriebszustände Werte, die ein grosses Vielfaches derjenigen bei Hautkondensation sein können. Es ist somit klar dass die Tropfenkondensation bevorzugt wird, die jedoch nur bei ganz besonderen Zuständen der Oberfläche, auf welcher die Kondensation stattfindet, auftritt. Diese kann mit Flüssigkeiten von geeigneter Oberflächenspannung derart behandelt werden, dass sich, wenigstens für eine kurze Zeit, Tropfenkondensation einstellt. Es ist jedoch bis heute noch kein Verfahren gefunden worden durch welches man auf die Dauer zum Beispiel eines Jahres Tropfenkondensation garantieren könnte. Deshalb ist man vorläufig gezwungen, sämtliche Wärmeaustauschapparate, bei welchen Kondensation vorkommt, unter der Annahme von Hautkondensation zu dimensionieren.

Es ist bekannt, dass bei einem Wärmedurchgang nur der grösste Widerstand massgebend ist. Daraus folgt, dass eine Verbesserung des Wärmeüberganges auf der Kondensationsseite nur dann besonders zweckmässig ist, wenn der Widerstand der Wärmeströmung auf dieser Seite grösser ist als auf der kühlenden Fläche. Dies ist besonders bei vertikalen Vorwärmern von Dampfturbinenanlagen der Fall, wo die Wärmeübergangszahl auf der Kondensationsseite nur einen Bruchteil derjenigen auf der Warmwasserseite beträgt. Bei solchen Vorwärmern lohnt sich die Verbesserung des Wärmeüberganges auf der Kondensationsseite.

2. Wirkung einer feingewellten Oberfläche auf den Vorgang der Hautkondensation

Um den Mechanismus der laminaren Hautkondensation besser überblicken zu können, sei hier die von NUSSELT im Jahre 1916 aufgestellte und noch heute gültige Formel ins Auge gefasst.

¹⁾ Erweiterte Fassung des am 3. Mai 1952 im Rahmen der Frühjahrstagung der Schweizerischen physikalischen Gesellschaft in Baden gehaltenen Kurzreferates.

²⁾ Forschungsabteilung der Escher Wyss AG.

Definiert man:

α = Wärmeübergangszahl der Kondensation,

r = Verdampfungswärme,

γ/g = Dichte des Kondensats,

λ = Wärmeleitzahl des Kondensats,

η = dynamische Zähigkeit des Kondensats,

ϑ = mittlere Temperaturdifferenz zwischen dem kondensierenden Dampf und der diesem zugekehrten Wandseite,

H = Höhe der vertikalen ebenen Wand und

g = Erdbeschleunigung,

so ergibt sich nach der Nusseltschen Theorie:

$$\alpha = 3400 \left\{ \frac{r \lambda^3 (\gamma/g)^2}{\eta} \cdot \frac{g^2}{H \vartheta} \right\}^{1/4}. \quad (1)$$

Diese Gleichung gibt uns an, welche Grössen geändert werden müssen und in welchem Sinne dies geschehen soll, um eine Vergrösserung von α zu erreichen. Der erste Bruch in der geschweiften Klammer kann unter Beibehaltung des gleichen Dampfes nicht geändert werden, weil er nur Stoffwerte enthält. Die Temperaturdifferenz ϑ kann insofern nicht variiert werden, als sie von den Gegebenheiten des Wärmeprozesses vorgeschrieben ist. Es bleiben somit nur noch die zwei Grössen g und H , über welche man frei verfügen kann. Wenn jedoch der Abtransport des Kondensates nur unter der Wirkung der Erdanziehung stattfinden soll, so fällt auch g als Variable ausser Betracht.

Die Wärmeübergangszahl α kann nach Gleichung (1) gross gemacht werden, indem H klein gewählt wird. Wird ein vertikales Rohr mit einem Draht bestimmten Durchmessers spiralförmig umwunden, so reduziert sich die in die Gleichung einzusetzende Höhe H auf die Ganghöhe der Spirale. Man erhält eine Erhöhung der Wärmeübergangszahl annähernd proportional der vierten Wurzel des Verhältnisses zwischen der gesamten Rohrhöhe und der Ganghöhe der Drahtspirale. Konstruktive Gründe haben die Anwendung von solchen Rohren als unzweckmässig erscheinen lassen.

Ein Ersatz der Erdanziehung mit durch Rotation hervorgerufenen Trägheitskräften führt zu praktisch unmöglichen Ausführungen.

Werden in einem Kondensator (in den Rohren das Kühlmittel, aussen kondensierender Dampf) nach Figur 1 vertikale, aussen gerillte Rohre vorgesehen, so steigt die Wärmeübergangszahl an der Kondensationsseite bei geeignetem Profil der Rillen auf ein Mehrfaches gegenüber den Werten bei glatten Rohren. Der Grund liegt darin, dass die Oberflächenspannungen gewaltige Druckgradienten in der Ebene senkrecht zur Rohrachse erzeugen. In Figur 2 ist ein Rillenprofil dargestellt. In Punkt I ist infolge der Konvexität der Kondensatoroberfläche ein Überdruck in der Kondensathaut gegenüber dem Dampf-

drucke vorhanden, welcher durch die Oberflächenspannung und den Krümmungsradius der Kondensathaut ϱ_I gegeben ist. Umgekehrt ist im Punkt *II*, des Vorzeichenwechsels der Oberflächenkrümmung wegen, ein Unterdruck vorhanden. Auf diese Art entsteht ein Druckgradient in der Kondensathaut in Richtung von Berg zu Tal. Wäre keine Gravitation vorhanden, so würde sich die Oberfläche der Kondensathaut nach dem umhüllenden Kreis g einstellen. Der Unterdruck im Punkt *II* ist bei allen in der Praxis vorkommenden Fällen sehr klein gegenüber demjenigen, welcher durch die «Saughöhe» normal zur



Fig. 1

Vertikales, aussen längsgerilltes Rohr.

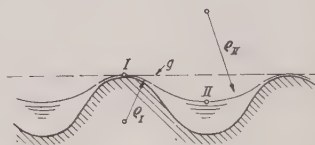


Fig. 2

Kondensatprofil an einer feingewellten Oberfläche.

Bildebene (Figur 2) hervorgerufen wird. Die Oberfläche der Kondensathaut wird somit in der Talgegend hineingesogen, und zwar in dem Masse, als das durch die Gravitation im Tal abfließende Kondensat die Höhenenergie in Reibungsenergie umwandeln kann.

Am Rillenberg ist der Druck des Kondensats infolge der Oberflächenspannung grösser als der Dampfdruck. Es muss somit eine Arbeit geleistet werden, wenn das Kondensat von der Grenze des Dampftraumes in die Kondensatschicht eindringt. Um eine Idee über die Verhältnisse zu erhalten, sei hier trockener, gesättigter Wasserdampf von 100°C und ein Krümmungsradius am Scheitel des Rillenberges von $0,6\text{ mm}$ vorausgesetzt. Damit ergibt sich ein Temperatursprung zur Aufbringung der obenerwähnten Arbeit nach den Beziehungen von Lord KELVIN und von HELMHOLTZ über das thermodynamische Gleichgewicht zwischen dem Wasserdampf und der gegenüberstehenden Wasseroberfläche von nur $1,7 \cdot 10^{-5}^\circ\text{C}$. Dieser kleine Temperatursprung wird in den nachfolgenden Rechnungen vernachlässigt.

Um den Vorgang der Hautkondensation an feingewellten Oberflächen besser behandeln zu können, seien die durch weiter unten entwickelte Rechnungen

bestimmten Grössen (Hautdicke h , Druck p , Kondensatgeschwindigkeit w und Wärmeübergangszahl α) an einem konkreten Beispiel erörtert (Figur 3).

Wie man sieht, erzwingt der grosse Druckgradient eine ausserordentlich dünne Kondensathaut (einige μm im Rillenscheitel). Daraus geht die Notwendig-

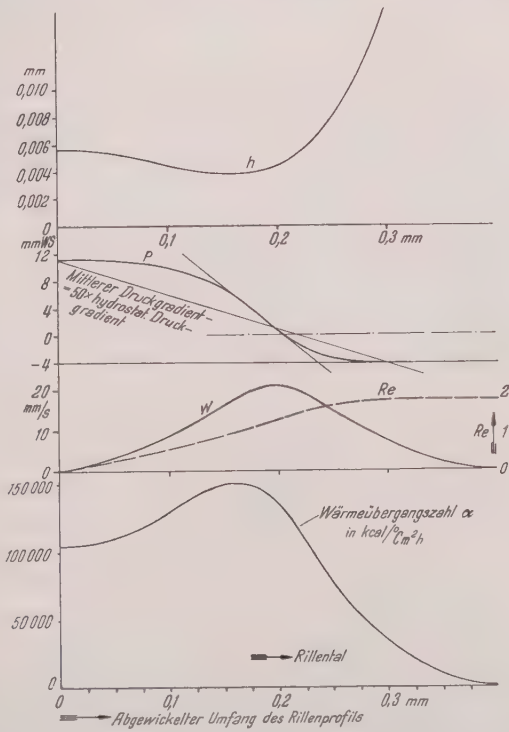


Fig. 3

Hautdicke h , Druck p , mittlere Geschwindigkeit w und Wärmeübergangszahl.

keit einer Prüfung des Einflusses der Wandrauhigkeit hervor. Er wird im Abschnitt 3.4 besprochen.

Die Wärmeübergangszahl ist, da es sich um ein reines Wärmeleitproblem handelt (Reynoldssche Zahlen von der Grössenordnung 0 bis 10), umgekehrt proportional der Dicke der Kondensathaut. Da letztere so klein ist, wird die Wärmeübergangszahl sehr gross und erreicht im Beispiel von Figur 3 mit 100000 bis 150000 $\text{kcal}/^\circ\text{C m}^2 \text{ h}$ Werte, die sogar teilweise über denjenigen liegen, welche GNAM bei Tropfenkondensation gemessen hat. Dabei ist jedoch

zu bemerken, dass bei gerillten Rohren die Kondensation sich nur auf die Gegend um den Rillenscheitel beschränkt, weil das Rillental mit der grossen Dicke des Kondensats relativ viel schlechtere Wärmeübergangszahlen aufweist. Die auf die totale Rohroberfläche bezogene mittlere Wärmeübergangszahl ist natürlich viel kleiner als die oben angegebene, jedoch noch immer ein grosses Vielfaches derjenigen bei glatten Rohren.

3. Berechnung des Wärmedurchganges

3.1. Rechnerische Bestimmung des Profils der Wellen

Ausser den schon unter 2 angeführten Grössen definieren wir noch:

h = Dicke der Kondensathaut, normal zur Wandoberfläche gemessen,

ϱ = Krümmungsradius der Oberfläche der Kondensathaut,

k = Kapillarkonstante (Kondensat gegen Dampf),

p = Druck im Kondensat, konstant über h angenommen,

w = mittlere Geschwindigkeit des Kondensats,

q = Kondensatmenge pro Längeneinheit (parallel zur Rohrachse) und

s = abgewinkelte Länge des Wellenprofils vom Scheitel aus gemessen.

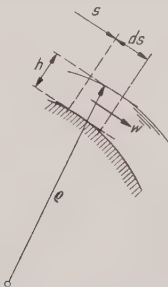


Fig. 4.

Der ausserordentlich kleinen Reynoldsschen Zahlen der Kondensatströmung wegen wird laminare Strömung vorausgesetzt. Aus dem gleichen Grunde wird die Änderung der kinetischen Energie gegenüber derjenigen der Druckenergie als unterdrückbar angesehen. Der Druckverlust ergibt sich somit auf der infinitesimalen Strecke ds zu (Figur 4)

$$dp = -3 \eta \frac{w}{h^2} ds. \quad (2)$$

Der durch die Oberflächenspannung gegebene Druck ist der Krümmung der Oberfläche proportional. Man kann somit

$$p = \frac{k}{\varrho} \quad (3)$$

setzen. Der Zuwachs an Kondensatmenge auf der infinitesimalen Strecke ds ist durch die Wärmeleitungsgleichung

$$dq = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{ds}{h} \quad (4)$$

gegeben. Weiterhin besteht noch die Gleichung

$$q = \gamma w h. \quad (5)$$

Ferner muss die Form des Wellenprofils gegeben sein. Die Vorschrift dieser Form führt zu direkt unlösbaren Differentialgleichungen. Sie müssen mit dem

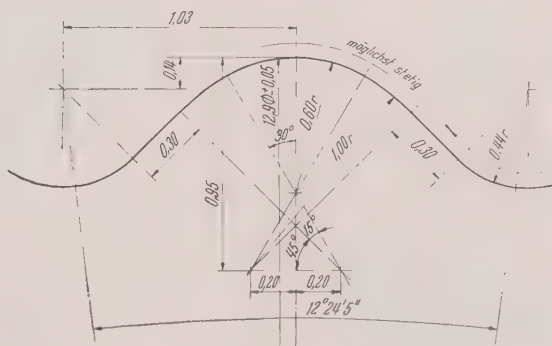


Fig. 5

Profil der den Differenzenrechnungen zugrunde gelegten feingewellten Oberfläche und das der gefrästen Versuchsrohre (Masse in Millimeter).

Differenzenverfahren gelöst werden. Um jedoch zu einer möglichst günstigen Form zu gelangen, schlagen wir eine Vorschrift über den Verlauf der Kondensatdicke h in Funktion des Weges s vor, und zwar in der Form

$$h = \Phi(s). \quad (6)$$

Gleichungen (2) bis (6) ergeben nach elementaren Operationen:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0} - \frac{3}{r} \frac{\lambda}{\gamma k} \frac{\partial}{\partial s} \left[\int_0^s \frac{ds}{\Phi(s)} \right] \frac{ds}{\Phi^2(s)}, \quad (7)$$

wobei ϱ_0 den Krümmungsradius der Kondensatoberfläche für $s = 0$ bedeutet. Wenn man von der Wärmeleitung in der gewellten Wand absieht, ist jedes Wegintervall Δs für den Wärmeübergang gleichwertig, mit anderen Worten: Keine Stelle s_i wird vor der Stelle s_n bevorzugt. Diese Überlegung führt zu

einem Wellenprofil mit konstanter Dicke der Kondensathaut. Wir setzen somit:

$$h = \Phi(s) = h_0 = \text{const.}$$

Gleichung (7) wird zu

$$\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho} = \frac{3}{2} \frac{\eta}{r} \frac{\lambda}{\gamma} \frac{\vartheta}{k} \frac{\vartheta}{h_0^4} s^2 \quad (8)$$

und ermöglicht die Berechnung des Verlaufes der Oberfläche des Kondensats mittels einer graphischen Integration. Das Wellenprofil ist hiermit auch gegeben, da ja $h = h_0 = \text{const}$ ist.

Auf die Stoffwerte wird noch in Abschnitt 3.3 eingegangen.

Ursprünglich wurde beabsichtigt, die gerillten Rohre bei den Kondensatoren der Dampfturbinenanlagen zu verwenden. Das durch graphische Integration erhaltene, in Figur 5 dargestellte Profil wurde für eine Kondensationstemperatur des Wasserdampfes von 30°C und die Werte $h_0 = 0,005$ mm, $\vartheta = 0,53^\circ\text{C}$ und $\varrho_0 = 0,6$ mm nach Gleichung (8) ermittelt. Der Bestimmung der Arbeitsweise dieses Profils bei anderen Zuständen diene, wie unten ausgeführt wird, eine Differenzenrechnung.

3.2. Berechnung des Wärmeüberganges

Werden die verschiedenen Grössen eines bekannten Zustandes für $s = s_n$ mit dem Index n und an der Stelle $s + \Delta s$ mit $n + 1$ bezeichnet, so ergeben sich gemäss den Gleichungen (2) bis (5) und Figur 6

$$\varrho_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{\varrho_n} - \frac{3}{h_n^3} \frac{\eta}{k} \frac{\vartheta}{\gamma} \Delta s}, \quad (9)$$

$$\Delta q_n = \frac{\lambda}{r} \frac{\vartheta}{h_n} \Delta s, \quad (10)$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta q_n, \quad (11)$$

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta s}{R}, \quad (12)$$

$$\Delta \psi = \frac{\Delta s}{\varrho}, \quad (13)$$

$$h_{n+1} = h_n + \left[(\varphi - \psi) + \frac{1}{2} (\Delta \varphi - \Delta \psi) \right] \Delta s, \quad (14)$$

wobei die Bedeutung des Radius R , der Winkel φ und ψ der Figur 6 zu entnehmen ist. Das der Differenzenrechnung zugrunde zu legende Wertepaar $(h_0; \varrho_0)$ ist so zu wählen, dass im ebenen Schnitt senkrecht zur Rohrachse zwei einander zugeordnete «tiefste» Talpunkte der als stetig vorausgesetzten Rillen

und Kondensatbegrenzung auf ein und denselben Rohrradius zu liegen kommen, womit auch der Forderung nach Symmetrie genügt wird. Für jeden Dampfzustand und Wert der Temperaturdifferenz ϑ können somit verschiedene Profile des Kondensats ermittelt werden. Man erhält die in Figur 7 dargestellte Kurvenschar, wobei jede einzelne der Kurven die Gleichungen (9) bis (14) und die soeben besprochenen Grenzbedingungen erfüllt. Jedem von diesen Profilen entspricht eine gewisse Kondensatmenge der Talströmung, die sich

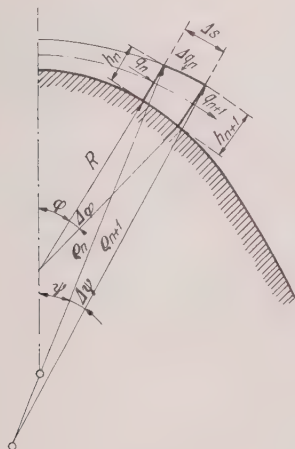


Fig. 6

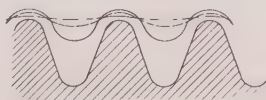


Fig. 7

Kondensatprofile bei verschiedenem Füllgrad der Ablaufrinne.

damit in Funktion der Rohrlänge bestimmen lässt. Die Kondensatmenge, welche in der Richtung der Rohrachse bei gegebenem Profil in der Rille abfließen kann, wurde durch ein Relaxationsverfahren nach SOUTHWELL bestimmt. Figur 8 legt das Endergebnis aller Berechnungen der mittleren (auf die dem Radius des Rillentaies entsprechende Zylinderfläche bezogenen) Wärmeübergangszahlen in Funktion von Rohrlänge, Dampfzustand und Temperaturdifferenz zwischen Sattedampf und Wand dar.

Der plötzliche starke Abfall der Wärmeübergangszahl bei einer gewissen Rohrlänge ist durch den Umstand gegeben, dass die Rillen im unteren Teil des Rohres volllaufen. Hohe, durch die Kapillarkräfte hervorgerufene Druckgradienten werden in diesen Partien vollständig ausgeschaltet. Für die überschwemmten Rillen in den unteren Partien der Rohre ist, wie schon oben erwähnt, laminare Strömung angenommen worden, und die Rechnung des Wärmeüberganges erfolgte nach NUSSELT. Diese Annahme musste getroffen werden, da die kritische Reynoldssche Zahl für eine Kanalströmung mit Profil nach Figur 5 bis jetzt noch unbekannt ist. Vermutlich ist, besonders bei heissem

Kondensat, in der Rille Turbulenz zu erwarten, womit die wirklichen Wärmeübergangszahlen im Gebiete des starken Abfallens (Figur 8) höher als die hier berechneten liegen dürften.

Andererseits ist es auffallend, wie die Wärmeübergangszahl dort, wo die Rillen noch nicht vollgelaufen sind, eine sehr schwache Funktion der Rohrlänge darstellt. Dies ist damit zu erklären, dass die örtlichen Wärmeübergangszahlen

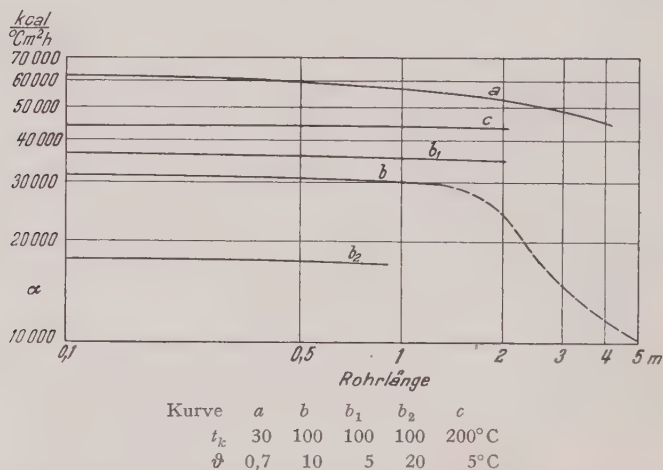


Fig. 8

Mittlere Wärmeübergangszahl in Funktion der Rohrlänge für verschiedene Sattdampftemperaturen und Temperaturdifferenzen ϑ .

in den Scheiteln um so grösser werden, je mehr die wirksame Oberfläche durch das Anschwellen des Kondensatstromes in der Rille vermindert wird (Figur 7). Die Kompensation beider Effekte ist so weitgehend, dass sich mit zunehmender Rohrlänge nur wenig abnehmende, fast konstante Wärmeübergangszahlen ergeben.

3.3. Veränderlichkeit der Stoffwerte

Von allen Stoffwerten ist die Zähigkeit des Kondensats diejenige, deren Veränderlichkeit über die Dicke des Kondensatfilms den stärksten Einfluss auf den Wärmeübergang hat. Eine Berechnung der mit der Filmdicke linear veränderlichen Zähigkeit ergab jedoch, dass man für in der Technik übliche Betriebszustände einfach mit dem arithmetischen Mittelwert der Zähigkeiten an der Dampf- und Wandseite rechnen kann.

3.4. Einfluss der Oberflächenbeschaffenheit

Die Berechnung des Wärmeüberganges bei einer sinusförmig angenommenen Wandrauigkeit zeigt, dass bei Rauigkeiten von der Grössenordnung $< 0,2$ Filmdicken der Einfluss derselben vernachlässigbar ist.

3.5. Wärmefluss durch die Wand

Die Berechnung des Wärmeflusses durch die Wand (Methode der Quadrate) führte zur Erkenntnis, dass man in Fällen von wärmedurchgangsmässig hoch gezüchteten Kondensatoren die Wand des Wärmedurchgangs aus gut leitendem Material herstellen muss. Gelten die Bezeichnungen:

λ_w = Wärmeleitfähigkeit der Wand,

d = minimale Wanddicke (1 mm in bezug auf die Abmessungen von Figur 5),

Q = übertragene Wärmemenge,

F = Oberfläche des dem Rohr koaxialen Zylinders entsprechend dem Rillental und

Δt_w = mittlerer Temperatursprung in der Wand,

so ergibt sich für alle der Figur 5 geometrisch ähnlichen Wandquerschnitte

$$\Delta t_w = \frac{2,5 d}{\lambda_w} \cdot \frac{Q}{F}. \quad (15)$$

4. Messungen

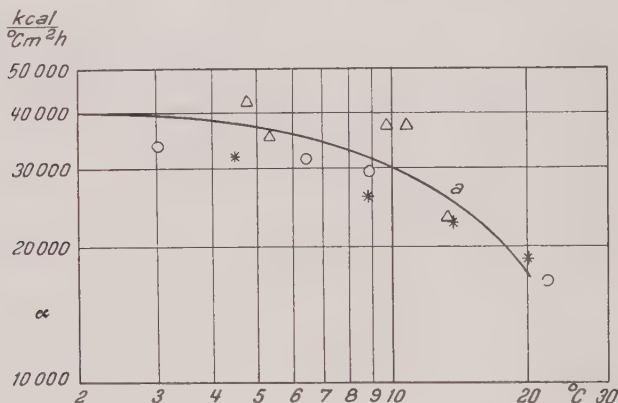
Um die theoretischen Ausführungen überprüfen zu können, müssen natürlich die der Rechnung zugrunde gelegten Voraussetzungen möglichst weitgehend erfüllt werden. Vor allem gilt dies für Grösse und Form des Profils der Rillen. Die kupfernen Versuchsrohre von 525 mm Länge, 16 mm Innen- und 19,2 mm minimalem Aussendurchmesser wurden durch Fräsen am Umfang mit 29 Rillen versehen. Die Toleranz der Profilmasse betrug $\pm 0,01$ mm. Das Rillenprofil ist in Figur 5 dargestellt. Bei den Versuchen wurde Sattdampf von 100°C verwendet. Die Bestimmung der Wärmemenge erfolgte durch Kondensatmessung.

Versuche in den Escher-Wyss-Laboratorien, Zürich, wurden durchgeführt:

- a) an glatt polierten Rohren, welche kurz vor dem Versuch 48 h in Lötwasser gelegt worden sind (um Hautkondensation zu erzwingen),
- b) an ebenfalls glatt polierten, jedoch noch (zur Erzielung guter Benetzung) mit dem Waschmittel «Vel» behandelten Rohren und
- c) an oxydierten Rohren ohne jegliche Behandlung.

Durch Messung des Kondensats, der Temperatur des Sattdampfes, des Kühlwassers und der Oberfläche der Versuchsrohre wurde die Wärmedurch-

gangszahl bestimmt. Um die Wärmeübergangszahl auf der Dampfseite berechnen zu können, musste, ausser Gleichung (15), noch die Wärmeübergangszahl auf der Wasserseite bekannt sein. Diese wurde nach der Beziehung von KRAUSSOLD bestimmt. Um den Einfluss der Ungenauigkeit dieser Formel möglichst klein zu halten, wurden in den Rohren sehr grosse Wassergeschwindigkeiten eingestellt.



a = gerechnete Kurve für Rauigkeit = 0, o ohne Oberflächenbehandlung,
 * Oberfläche mit Lötwasser behandelt, Δ Oberfläche mit «Vel» behandelt.

Fig. 9

Versuchsergebnisse an gefrästen Versuchsrohren.

In Figur 9 sind die Ergebnisse von Versuch und Rechnung dargestellt woraus man die gute Übereinstimmung zwischen den beiden Resultaten er sehen kann.

Gefräste Rillenrohre kommen natürlich für die praktische Anwendung nicht in Frage, da sie zu teuer sind. Nach dem guten Ergebnis der Versuche an genau gefrästen Rohren dachte man vielmehr an gezogene Rohre. Bei diesen können aus Herstellungsgründen die Masstoleranzen nicht so klein gehalten werden wie bei den ersteren. Die Versuche wurden deshalb an einem 2510 mm langen gezogenen, gerillten Rohr wiederholt, um den Einfluss der Ungenauigkeit des Rillenprofils auf die Wärmeübergangszahl zu überprüfen (Figur 10).

In Figur 11 ist die Wärmeübergangszahl an der Kondensationsseite in Funktion der Temperaturdifferenz zwischen Dampf und Wandtemperatur aufgetragen. Die Streuung ist auf die bei unbehandelter Oberfläche durch ein Schauglas beobachtete partielle Tropfenkondensation zurückzuführen. Die gestrichelte Kurve stellt die Rechnungsergebnisse dar; die ausgezogene hingegen ist

5.1. Laminare Strömung in der Ableitungsrille des Kondensats

Die dimensionslose Schreibweise von Gleichung (9) und der Gleichung des Druckverlustes in der Ableitungsrille führt auf folgende zwei dimensionslose Kenngrößen

$$K_1 = \frac{\eta \lambda \vartheta}{r k \gamma \varrho_0} \quad \text{und} \quad K_{2L} = \frac{\alpha \eta \vartheta}{r \gamma^2 \varrho_0^2}.$$

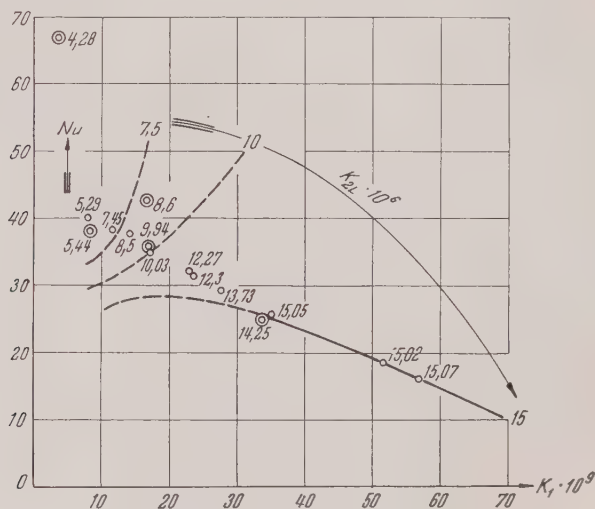


Fig. 12

Graphische Auftragung der Wärmeübergangszahl mittels dimensionsloser Kenngrößen.

Bei laminarer Strömung des Kondensats in den Ableitungsrillen wird die Nusselt-Zahl somit eindeutig durch

$$Nu = \frac{\alpha \varrho_0}{\lambda} = \psi_L \left(\frac{\eta \lambda \vartheta}{r k \gamma \varrho_0}; \frac{\alpha \eta \vartheta}{r k \gamma^2 \varrho_0^2} \right)$$

gegeben (siehe Figur 12).

5.2. Turbulente Strömung in der Ableitungsrille des Kondensats

Mit dem Ansatz von BLASIUS für den Widerstandsbeiwert und diesmal auch bei Berücksichtigung des Wärmeüberganges in der Ablaufrille hat man

$$Nu = \psi_T \left(\frac{\eta \lambda \vartheta}{r k \gamma \varrho_0}; \frac{\alpha^{7/4} \vartheta^{7/4} \eta^{1/4}}{\varrho_0^{5/4} \gamma^2 r^{7/4} g^{3/4}}; Re; Pr \right) \quad (16)$$

mit

$$Re = \frac{\alpha \vartheta \varrho_0}{r \eta g} \quad \text{und} \quad Pr = \frac{c_p \eta g}{\lambda}.$$

anstatt der zwei Variablen (Re ; Pr) kann man erfahrungsgemäss

$$Re^m Pr^n$$

mit etwa $m = 3/4$ und $n = 1/3$ schreiben, womit sich die Anzahl der Variablen in (16) von vier auf drei reduziert.

6. Zusammenfassung

Nach einer einleitenden Übersicht der Haut- und Tropfenkondensation wird die Hautkondensation an einer unebenen Fläche erörtert. Die Oberflächenspannungen rufen, der verschiedenen Krümmungen der Kondensatoberfläche wegen, sehr starke Druckgradienten hervor. Die Wirkung letzterer kann ein vielfaches derjenigen des Schwerfeldes betragen (bis zu einigen Zehnerpotenzen). Starke Druckgradienten ergeben aus Gleichgewichtsgründen dünne Kondensathäute, was nach der Theorie von NUSSELT zu sehr grossen Wärmeübergangszahlen führt. Für einen Kondensator mit achsenparallel gerillten, vertikalen Rohren werden bei gegebenen geometrischen Verhältnissen die durch Differenzenrechnung erhaltenen Wärmeübergangszahlen angegeben. Letztere wurden durch Versuche bestätigt. Kennzahlen der Modellähnlichkeit bestimmen die Nusseltsche Zahl des Wärmeüberganges.

Summary

Following a synopsis on film- and drop-condensation, one deals with condensation on an uneven surface. The surface tensions give rise to very great pressure gradients because of the different curvatures of the surface of the condensate. The action of the latter can amount to a multiple (up to a few powers with basis ten) of the value corresponding to the gravitation. Large gradients of pressure produce thin films of condensate, and according to the theory of NUSSELT they lead to large coefficients of heat transmission. Heat transfer coefficients are given determined with calculus of finite differences for a condenser with vertical tubes, grooves parallel to the tube axis and given geometrical form. The latter are confirmed by tests. Adimensional numbers determinate the NUSSELT number.

(Eingegangen: 19. Februar 1953.)

Die exakte Lösung der Integralgleichungen gewisser Schwingungsprobleme

VON JENS RAINER MARIA RADOK¹⁾ und ALFRED HELLER, Zürich²⁾

1. Einleitung

Die Schwingungsprobleme gewisser dynamischer Systeme mit polynomialen Massen- und Steifheitsverteilungen lassen sich leicht auf Fredholmsche Integralgleichungen mit entarteten symmetrischen Kernen zurückführen. Die Lösung solcher Integralgleichungen hat jedoch bisher grosse Schwierigkeiten bereitet, so dass man fast immer gezwungen war, Näherungsmethoden zu verwenden.

In dieser Abhandlung ist eine Methode entwickelt worden, die mit dem bekannten Iterationsverfahren³⁾ verwandt ist. Es wird nämlich gezeigt, dass man durch geschickte Wahl der Ausgangsfunktion, die durch den Kern bestimmt wird, zu Potenzreihen für die Eigenfunktionen kommen kann. Die Koeffizienten dieser Potenzreihen genügen besonders einfachen Rekursionsformeln, mit deren Hilfe man schliesslich nur eine endliche Anzahl willkürlicher Konstanten erhält. Diese restlichen Konstanten führen dann auf die charakteristische Gleichung für die Eigenwerte.

Es liegt in der Natur des eben angedeuteten Prozesses, dass der Übergang zu den exakten Lösungen und der exakten charakteristischen Gleichung rechnerisch formell durchgeführt werden kann. Die Potenzreihen, die man durch die Methode erhält, haben Koeffizienten, die Potenzen der Frequenzen im Zähler und Fakultäten im Nenner enthalten, so dass in jedem Fall die Konvergenzbetrachtungen sehr einfach werden.

Im zweiten Teil dieser Mitteilung wird die Integralgleichung für symmetrische Biegeschwingungen von Balken abgeleitet, wobei die Krümmung der Balkenachse als unbekannte Veränderliche eingeführt wird. Im Falle dieses einfachen Problems bereitet die direkte Ableitung dieser Gleichung aus der Differentialgleichung keine Schwierigkeit. Die asymmetrischen Biegeschwingungen lassen sich genau gleich behandeln, während es in komplizierteren Fällen vorzuziehen ist, zum Beispiel das Hamiltonsche Prinzip anzuwenden⁴⁾.

¹⁾ Sonst Aeronautical Research Laboratory, Department of Supply, Melbourne, Australia.

²⁾ Institut für Flugzeugstatik, ETH.

³⁾ W. SCHNEIDLER, *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik* (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1950).

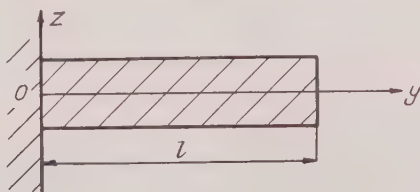
⁴⁾ J. R. M. RADOK, *Dynamic Aeroelasticity*, Rep. 58 (College of Aeronautics, Cranfield, England).

Die allgemein zu verwendende Methode ist im dritten Teil für einen speziellen Kerntypus entwickelt, während in den letzten zwei Teilen diese Methode auf die Lösung zweier Probleme angewandt ist, deren exakte Lösungen seit langem bekannt sind. Das erste dieser Probleme befasst sich mit den Schwingungen eines gleichförmigen Balkens¹⁾, während das zweite diejenigen des fest eingespannten Keiles²⁾ untersucht. In beiden Fällen wird gezeigt, dass die Methode auf die exakten Lösungen führt.

2. Ableitung der Bewegungsgleichungen

Es ist bereits in der Einleitung erwähnt worden, dass die Untersuchung dieser Abhandlung auf der Basis der zuständigen Integralgleichungen ausgeführt werden soll. Wie sich sogleich zeigen wird, sind diese Gleichungen von demselben Typus, unabhängig davon, ob der Balken an einem Ende eingespannt oder ob beide Enden frei sind. Nachdem die Integralgleichung in jedem Falle die Randbedingungen implizit enthält, das heisst, nachdem ihre Lösungen automatisch diese Bedingungen erfüllen, wird es das Ziel dieses Paragraphen sein, eine allgemeingültige Integralgleichung für die zu betrachtenden Fälle abzuleiten.

Man betrachte den Balken von Figur 1, der am Ende $y = 0$ eingespannt



Figur 1

und am Ende $y = l$ frei sei. Die Massenverteilung und Steifheit des Balkens an der Stelle y seien

$$m(y) \quad \text{und} \quad EI(y),$$

so dass bei dynamischer Belastung, auf Grund der Bernoulli-Euler-Formel, die Gleichgewichtsbedingung an der Stelle y folgende Form hat:

$$m(y) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(EI(y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = m(y) \ddot{z} + [EI(y) z'']'' = 0. \quad (2.1)$$

¹⁾ S. TIMOSHENKO, *Schwingungsprobleme der Technik* (Springer, Berlin 1932).

²⁾ G. R. KIRCHHOFF, *Über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt*, Berliner Mber., 1879.

Dazu kommen die Randbedingungen

$$z(0, t) = z'(0, t) = E I(y) z''(y, t)_{y=l} = [E I(y) z''(y, t)]'_{y=l} = 0, \quad (2.2)$$

von denen die zwei letzten das Verschwinden des Biegemomentes und der Querkraft am freien Balkenende ausdrücken.

Integriert man die Gleichung (2.1) zweimal von u bis l und von v bis l , so erhält man, unter Benützung der zwei letzten Bedingungen von (2.2), die Gleichung

$$\int_v^l du \int_u^l m(y) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dy + E I(v) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0, \quad (2.3)$$

die sich jetzt auf das Gleichgewicht der Biegemomente im Abschnitt $y = v$ und $y = l$ bezieht. Die Gleichung (2.3) ist aber noch keine reine Integralgleichung, indem ihre Lösungen jetzt zwar die letzten beiden Bedingungen von (2.2) erfüllen, die bei ihrer Ableitung benützt wurden, nicht aber die übrigen Bedingungen (2.2).

Um diese Bedingungen auch noch in Betracht zu ziehen, kann man jetzt auf zwei verschiedene Arten verfahren, von denen die eine auf die Integralgleichung für die Auslenkungen z , die andere auf eine äquivalente Gleichung für die Krümmungen z'' führt. Die zweite Methode soll hier verwendet werden, da dann die Lösungen direkt zu Biegemomenten führen, die vom praktischen Standpunkt aus von grösstem Interesse sind. Dazu kommt, dass man im Falle einer Näherungslösung die Auslenkungen, das heisst die Schwingungsformen durch zweimalige Integration erhalten kann, wodurch etwaige Fehler bekannterweise reduziert werden.

Zur weiteren Transformation der Gleichung (2.3) betrachte man jetzt die folgende Beziehung, die auf Grund der ersten zwei Bedingungen von (2.2) berechtigt ist:

$$\ddot{z}(y, t) = \int_0^y \frac{\partial^2 \ddot{z}}{\partial \eta^2} d\eta = \int_0^v d\eta \int_0^\eta \frac{\partial^2 \ddot{z}}{\partial \zeta^2} d\zeta = \int_0^v d\eta \int_0^\eta \ddot{z}''(\zeta, t) d\zeta. \quad (2.4)$$

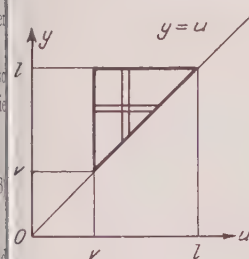
Bevor man von (2.4) in (2.3) einsetzt, sollen die Doppelintegrale in diesen beiden Ausdrücken umgedreht werden. Unter Benützung der Figuren 2a, 2b findet man leicht an Stelle von (2.3) und (2.4)

$$\int_v^l m(y) \ddot{z}(y, t) (y - v) dy + E I(v) z''(v, t) = 0 \quad (2.3')$$

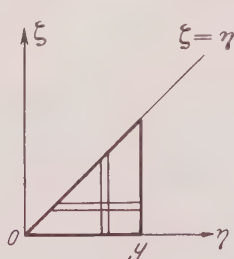
und

$$\int_0^v \ddot{z}''(\zeta, t) (y - \zeta) d\zeta = \ddot{z}(y, t). \quad (2.4')$$

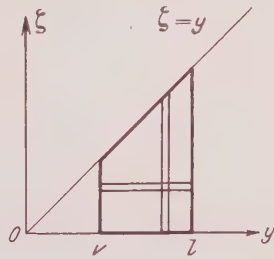
Setzt man jetzt (2. 4') in (2. 3') ein und reduziert wiederum das Doppelintegral durch Vertauschen der Integrationen auf ein einfaches Integral (unter Benützung von Figur 2c), so erhält man schliesslich die endgültige Integralgleichung



Figur 2a



Figur 2b



Figur 2c

für die Schwingungen des eingespannten Balkens, wobei die Krümmung z'' die unbekannte Veränderliche ist:

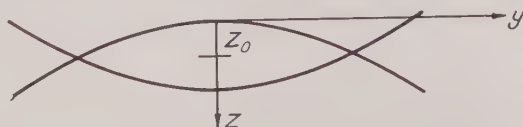
$$\int_0^l \bar{\mu}^2(\zeta, y) \ddot{z}''(\zeta, t) d\zeta + E I(y) z''(y, t) = 0 \quad (2. 5)$$

mit

$$\bar{\mu}^2(\zeta, y) = \int_{\zeta, y}^l m(u) (u - \zeta) (u - y) du. \quad (2. 6)$$

Dabei steht $\overline{\zeta, y}$ für den grösseren Wert von ζ oder y .

Als nächstes betrachte man den sich frei im Raum bewegenden Balken. Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, soll die augenblickliche Untersuchung auf symmetrische Verformungen des Balkens beschränkt werden. Beim freien Balken verlangen Impuls- und Drallsatz, dass der Gesamtimpuls und der Gesamtdrall dauernd verschwinden. Aus dem Impulssatz folgt zunächst, dass der Schwerpunkt S des Balkens, dessen Länge nun $2l$ sein soll, sich nicht bewegt.



Figur 3

In dem mitbewegten Koordinatensystem (y, z) (siehe Figur 3) besitze S die Koordinaten $(0, z_0)$. Die Auslenkung des Balkenelementes an der Stelle y bezüglich des ruhenden Schwerpunktes ist dann

$$z(y, t) - z_0(y, t)$$

und seine absolute Beschleunigung

$$\ddot{z}(y, t) - \ddot{z}_0(y, t) .$$

Die Bedingung, dass die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses verschwindet, nimmt daher folgende Form an:

$$\int_{-l}^{+l} m(y) \ddot{z}(y, t) dy - 2M \ddot{z}_0(t) = 0 , \quad (2.7)$$

wobei

M = Masse des halben Balkens.

(2.7) kann man jetzt wieder so umformen, dass unter dem Integral \ddot{z} durch $\ddot{z} - \ddot{z}_0$ ersetzt wird. Die Gleichung (2.7) erhält dann die Form:

$$\int_0^{+l} \mu^1(\zeta) \ddot{z}''(\zeta, t) d\zeta - M \ddot{z}_0(t) = 0 , \quad (2.7')$$

wo

$$\mu^1(\zeta) = \int_{\zeta}^l m(v) (v - \zeta) dv . \quad (2.8)$$

(Der Drallsatz liefert bei den symmetrischen Schwingungen keine Aussage.)

Um jetzt die Integralgleichung für den freien Balken abzuleiten, kann man gleich vorgehen wie beim einseitig eingespannten Stab. Die Randbedingungen (2.2) behalten ihre Gültigkeit. In (2.1), (2.3), (2.3') ist an Stelle von \ddot{z} die neue Beschleunigung $\ddot{z} - \ddot{z}_0$ einzusetzen. Statt (2.5) erhält man so:

$$\int_0^l \bar{\mu}^2(y, \zeta) \ddot{z}''(\zeta, t) d\zeta - \mu^1(y) \ddot{z}_0(t) + E I(y) z''(y, t) = 0 . \quad (2.5')$$

Eliminiert man jetzt \ddot{z}_0 zwischen den Gleichungen (2.5') und (2.7'), was im Sinne der allgemeinen dynamischen Theorie bedeutet, dass z_0 eine verborgene Koordinate ist, so findet man schliesslich die gesuchte Integrodifferentialgleichung

$$E I(y) z''(y, t) + \int_0^l K(y, \zeta) \ddot{z}''(\zeta, t) d\zeta = 0 , \quad (2.9)$$

wo

$$K(y, \zeta) = \bar{\mu}^2(y, \zeta) - \frac{\mu^1(y) \mu^1(\zeta)}{M} . \quad (2.10)$$

Bisher wurde angenommen, dass die Masse des Balkens stetig verteilt sei. Man sieht aber aus der Definition der Grössen μ^1 , $\bar{\mu}^2$, dass man in der Balkenmitte eine konzentrierte Masse $2M_0$ hinzufügen kann, ohne diese Massenfunktionen

u ändern, da sie nur von der Masse zwischen der Schnittstelle und dem freien Balkenende beeinflusst werden. Definiert man also die Gesamtmasse des halben Balkens mit beliebiger longitudinaler Massenverteilung $m(y)$ als

$$M = \int_0^l m(y) dy + M_0, \quad (2.11)$$

so sieht man sofort, dass die Gleichung (2.10), wie zu erwarten war, für alle vorgeschlagenen Probleme zuständig ist. So erhält man zum Beispiel für $M_0 = \infty$ die ursprüngliche Gleichung (2.5) für den eingespannten Balken, während $M_0 = 0$ dem Balken ohne konzentrierte Masse entspricht.

Schliesslich soll noch eine kurze Bemerkung über die Ableitung von ähnlichen Integralgleichungen für kompliziertere Probleme derselben Art gemacht werden. So mag es zum Beispiel wünschenswert sein, nicht nur symmetrische, sondern auch antisymmetrische Schwingungen zu studieren. Oder es mögen Torsionsschwingungen von Interesse sein. Beim Flugzeug handelt es sich meist nicht nur um einen einfachen Balken, sondern um zwei oder mehrere Balken, die aufeinander senkrecht stehen (Rumpf, Flügel, Schwanzfläche) und Biege- wie auch Torsionsschwingungen unterliegen. Alle diese Probleme bedeuten eine Verallgemeinerung des oben behandelten Problems in dem Sinne, dass die elastischen Massensysteme eine grössere Anzahl von Freiheitsgraden haben oder dass noch weitere verborgene Koordinaten vorhanden sind. Den Fall antisymmetrischer Schwingungen des freien Balkens kann man zum Beispiel durch die Einführung einer Rotation um den Schwerpunkt studieren. Zu den Bedingungen (2.2) hat man jetzt aber die Bedingung des Verschwindens des Dralls hinzuzufügen.

Im allgemeinen ist es aber in komplizierteren Fällen nicht mehr so einfach, die zuständigen Bewegungsgleichungen durch ähnliche Überlegungen abzuleiten. Es ist daher besser, auf die Prinzipien der allgemeinen Dynamik, das heisst auf die Lagrangeschen Gleichungen oder auf das Hamiltonsche Prinzip zurückzugreifen. In der Tat sind die Gleichungen auf diesem Wege für ein Flugzeug mit Pfeilflügel und Rumpf in der Arbeit von RADOK¹⁾ abgeleitet worden, und es ist dort gezeigt worden, wie die Probleme dieser Abhandlung als Sonderfälle herauskommen.

3. Probleme natürlicher Schwingungen und ihre angenäherte Lösung

Setzt man jetzt voraus, dass der Balken natürliche Schwingungen ausführt, so kann man schreiben

$$z''(y, t) = e^{i\omega t} Z(y). \quad (3.1)$$

¹⁾ J. R. M. RADOK, *Dynamic Aeroelasticity*, Rep. 58 (College of Aeronautics, Cranfield, England).

Damit erhält (2. 9) die Form

$$E I(y) Z(y) - \omega^2 \int_0^l K(y, \varphi) Z(\varphi) d\varphi = 0. \quad (3.)$$

Diese Gleichung wird leicht in eine Fredholm-Integralgleichung zweiter Art umgewandelt, indem man folgende Transformation einführt:

$$\bar{Z}(y) = \sqrt{E I(y)} Z(y), \quad \bar{K}(y, \varphi) = \frac{K(y, \varphi)}{\sqrt{E I(y)} \sqrt{E I(\varphi)}}, \quad (3.)$$

so dass man jetzt anstatt (3. 2) die Gleichung

$$\bar{Z}(y) - \omega^2 \int_0^l \bar{K}(y, \varphi) \bar{Z}(\varphi) d\varphi = 0 \quad (3.)$$

erhält.

Dieses ist die Grundgleichung der späteren Untersuchungen, und die anzuhaltende angenäherte Lösungsmethode soll jetzt kurz beschrieben werden. Es soll angenommen werden, dass der Kern K ausgeartet ist in dem Sinne, dass er ein homogenes Polynom n -ten Grades in φ und y ist¹⁾.

$$\left. \begin{aligned} P_n(\varphi, y) &= a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} \varphi + \cdots + a_1 y \varphi^{n-1} + a_0 \varphi^n \quad (\varphi < y), \\ P_n(y, \varphi) &= a_n \varphi^n + a_{n-1} \varphi^{n-1} y + \cdots + a_1 \varphi y^{n-1} + a_0 y^n \quad (\varphi > y). \end{aligned} \right\} \quad (3.)$$

Es ist leicht einzusehen, dass \bar{K} immer symmetrisch ist, so dass

$$[P_n(\varphi, y)]_{y > \varphi} = [P_n(y, \varphi)]_{\varphi > y}.$$

Ein solcher Kern entspricht einer Massenverteilung, die selbst durch ein Polynom dargestellt werden kann.

Weiterhin soll die Gleichung (3. 2') noch normalisiert werden, das heisst das Integrationsintervall soll von 0 bis 1 gehen, so dass die Gleichung jetzt die folgende Form hat

$$\bar{Z}(y) - \omega^2 \int_0^1 \bar{K}(y, \varphi) \bar{Z}(\varphi) d\varphi = 0. \quad (3.)$$

Ist die Länge l nicht gleich 1, so verursacht die entsprechende Umformung eine Änderung des Frequenzparameters ω^2 .

¹⁾ In den Beispielen treten etwas allgemeinere Kerne auf, die aber ebenfalls entsprechend der folgenden Theorie behandelt werden können.

Man betrachte jetzt den Integraloperator

$$L \bar{Z}(\varphi) = \int_0^y P_n(\varphi, y) \bar{Z}(\varphi) d\varphi + \int_y^1 P_n(y, \varphi) \bar{Z}(\varphi) d\varphi, \quad (3.5)$$

für $\bar{Z}(\varphi) = \varphi^m$.

$$L \varphi^m = y^{(m+1)+n} \left\{ \frac{n a_n}{(m+1)(m+n+1)} + \frac{(n-2) a_{n-1}}{(m+2)(m+n)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(2-n) a_1}{(m+n)(m+2)} + \frac{(-n) a_0}{(m+n+1)(m+1)} \right\} \\ + a_0 \frac{y^n}{m+1} + a_1 \frac{y^{n-1}}{m+2} + \dots + a_{n-1} \frac{y}{m+n} + a_n \frac{1}{m+n+1}. \quad (3.6)$$

Der Operator transformiert also eine beliebige Potenz von φ in die Form

$$L \varphi^m = y^{(m+1)+n} C_m + P_n^m(y), \quad (3.6')$$

wobei das neue Polynom $P_n^m(y)$ wiederum vom Grad n ist. Dieses Resultat gibt einen Hinweis für den Ansatz der Potenzreihe, mit der Fredholm-Gleichungen des obigen Typs immer annähernd gelöst werden können.

Man setze nämlich die Lösung \bar{Z} der Gleichung (3.2'') in der folgenden allgemeinen Form an:

$$\bar{Z}(\varphi) = \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^n A_{l,j} \varphi^{j(n+1)+l}. \quad (3.7)$$

Bricht man jetzt die Reihe im Sinne einer Approximation bei $j = k$ ab, so ist der Fehler

$$\omega^2 \sum_{l=0}^n A_{l,k} y^{(k+1)(n+1)+l} C_{j(n+1)+l}. \quad (3.8)$$

Durch Koeffizientenvergleich der Potenzen von y ergeben sich Beziehungen zwischen den Konstanten A_l . In der Tat führt (3.7) nach Anwendung von (3.6') bei Vergleich der Potenzen von y mit Exponenten $> n$ zur Rekursionsformel

$$A_{l,j} = \omega^2 A_{l,j-1} C_{(j-1)(n+1)+l}, \quad (j = 1, 2, \dots, k; l = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (3.9)$$

durch welche man die $A_{l,j}$ durch die $A_{l,0}$ ausdrücken kann. Zudem sieht man von (3.6) und der Definition von C_m , dass die Koeffizienten $A_{l,j}$ durch $A_{l,0}$ ausgedrückt im Nenner Fakultäten von der Ordnung $j(n+1)+l$ enthalten werden, während man im Zähler Polynome von ω^2 vom Grad n hat. Daher werden die angesetzten Lösungen für genügend grosse k gut konvergieren.

Schliesslich gibt der Koeffizientenvergleich der Potenzen von y mit Exponenten $\leq n$ das folgende System von $n + 1$ Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} A_{n,0} &= \omega^2 \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^n A_{l,j} \frac{a_0}{j(n+1) + l + 1}, \\ A_{n-1,0} &= \omega^2 \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^n A_{l,j} \frac{a_1}{j(n+1) + l + 2}, \\ &\dots\dots\dots \\ A_{1,0} &= \omega^2 \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^n A_{l,j} \frac{a_{n-1}}{j(n+1) + l + n}, \\ A_{0,0} &= \omega^2 \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^n A_{l,j} \frac{a_n}{j(n+1) + l + n + 1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

das mit Hilfe von (3. 9) so reduziert werden kann, dass es nur die $n + 1$ Konstanten $A_{l,0}$ enthält. Nach dieser Reduktion kann man dann aber die Koeffizienten $A_{l,0} - A_{n,0}$ durch $A_{0,0}$ ausdrücken und in der letzten Gleichung einsetzen. Auf diese Weise erhält man ein Polynom in ω^2 von der Ordnung kn . Damit die Konstante $A_{0,0}$ endliche Werte haben kann, muss ω^2 eine Wurzel dieses Polynoms sein. Somit ist dieses Polynom die charakteristische Gleichung für die Bestimmung der Eigenwerte, und die Eigenfunktionen sind durch (3. 7) gegeben.

Es wird nun von Interesse sein, diese Lösungsmethode an praktischen Problemen auszuprobieren. Aus der vorausgehenden Betrachtung ergibt sich nämlich, dass die Wahl einer grössern Summationsgrenze die Form der Lösungen nicht ändert. Aus diesem Grunde und wegen der guten Konvergenz der Konstanten $A_{j,l}$ kann man jetzt vermuten, dass die angenäherten Lösungen (3. 7) die ersten Glieder der Potenzreihenentwicklungen der exakten Lösungen repräsentieren. Daraus würde folgen, dass die ersten $n + 1$ Glieder des Polynoms für die Bestimmung der Frequenzen den Gliedern der exakten charakteristischen Gleichung entsprechen werden.

Somit erhält man die Möglichkeit, die Eigenfunktionen und Eigenwerte numerisch beliebig genau zu approximieren durch eine entsprechende Wahl der Summationsgrenze k . Auf der andern Seite sieht man auch, dass, nach Beobachtung der Gesetzmässigkeit in der Bildung der Rekursionsformel und der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms, der Schritt von k zu $k + 1$ rein formell ausgeführt werden kann, so dass die Methode bei numerischen Rechnungen den gleichen grossen Vorzug hat, den auch die Iterationsmethode bietet, indem jeder Schritt zu einer verbesserten Lösung führt. Durch die jetzige Methode erhält man alle gewünschten Eigenfunktionen und Eigenwerte auf einmal, wobei Anzahl und Genauigkeit durch k festgelegt sind. Vergrösser

man k , so erweitert sich die Säkulargleichung für die Eigenwerte ohne Änderung der bereits berechneten Glieder um zusätzliche höhere Potenzen.

In den folgenden zwei Paragraphen soll die eben abgeleitete Methode auf zwei Schwingungsprobleme angewandt werden, von denen exakte Lösungen bekannt sind. Es handelt sich dabei um die Probleme des schwingenden, eingespannten, gleichmässigen Balkens und des eingespannten vollen Keiles. Dabei sollen jedoch nicht die oben abgeleiteten Formeln benützt werden. An deren Stelle werden die gewünschten Formeln direkt abgeleitet, und es wird gezeigt werden, dass in der Tat die versprochenen Annäherungen resultieren.

2. Schwingungen von Balken konstanter Massen- und Steifheitsverteilung

Obwohl am Ende nur der Fall des eingespannten Balkens behandelt werden soll, werden doch die allgemeineren Formeln für den freien Balken mit einer Masse in der Mitte abgeleitet. Setzt man also

$$m(y) = \frac{M}{l}, \quad M_0 = k M, \quad (4.1)$$

so erhält man von (2. 10), (2. 8), (2. 6)

$$\frac{M}{l} K(y, \xi) = \bar{l}^2(y, \xi) - \frac{l^1(y) l^1(\xi)}{l(1+k)}, \quad (4.2)$$

so

$$\bar{l}^2(y, \xi) = \int_{y, \xi}^l (w - \xi) (w - y) dw, \quad (4.3)$$

$$l^1(y) = \int_y^l (w - y) dw. \quad (4.4)$$

Daher hat man für den Kern

$$\frac{M}{l} K(y, \xi) = \left\{ \begin{array}{ll} (l-y)^2 \left[\frac{l-y}{3} + \frac{y-\xi}{2} - \frac{(l-\xi)^2}{4l(1+k)} \right] & (y > \varphi) \\ (l-y)^2 \left[\frac{l-\xi}{3} + \frac{\xi-y}{2} - \frac{(l-y)^2}{4l(1+k)} \right] & (y < \varphi) \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

Normalisiert man jetzt durch Einführung der Koordinaten

$$\frac{y}{l} = Y, \quad \frac{\xi}{l} = X \quad (4.6)$$

und führt die neuen Veränderlichen

$$\varphi = 1 - Y, \quad \psi = 1 - X \quad (4.7)$$

ein, was einer Verlagerung des Koordinatenursprunges an die Balkenspitze entspricht, so nimmt die Integralgleichung (3. 2') die folgende Form an:

$$\bar{Z}(\varphi) = \lambda \left\{ \int_0^\varphi \varphi^2 \left[\frac{\varphi}{3} + \frac{\varphi - \psi}{2} - \frac{\varphi^2}{4(1+k)} \right] \bar{Z}(\psi) d\psi \right. \\ \left. \int_\varphi^1 \varphi^2 \left[\frac{\varphi}{3} + \frac{\varphi - \psi}{2} - \frac{\varphi^2}{4(1+k)} \right] \bar{Z}(\psi) d\psi \right\} \quad (4.8)$$

wobei

$$\lambda = \frac{\omega^2 M b^3}{K} \quad (K = EI = \text{Balkensteifheit}) \quad (4.9)$$

Den Integraloperator auf der rechten Seite transformiert nun die Potenz φ^n in den Ausdruck

$$\frac{\varphi^{n+4} n!}{(n+4)!} - \frac{\varphi^3}{6(n+1)} + \varphi^2 \left[\frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{4(1+k)(n+3)} \right]. \quad (4.10)$$

Daher kann man das allgemeine Resultat von m Iterationsschritten mit der Anfangsfunktion

$$A \varphi^3 + B \varphi^2,$$

die durch die Formel (4.10) angedeutet ist, in der Form

$$\bar{Z}(\varphi) = \sum_{j=1}^m \{A_j \varphi^{4j-1} + B_j \varphi^{4j-2}\} \quad (4.11)$$

schreiben. Postuliert man nun den Fehler

$$\lambda A_m \frac{\varphi^{4m+3} (4m-1)!}{(4m+3)!} + \lambda B_m \frac{\varphi^{4m+2} (4m-2)!}{(4m+2)!}, \quad (4.12)$$

so erhält man durch Koeffizientenvergleich der Potenzen von φ nach Anwendung von (4.10)

$$A_j = \frac{\lambda^{j-1} 3!}{(4j-1)!} A_1, \quad B_j = \frac{\lambda^{j-1} 2!}{(4j-2)!} B_1, \quad (4.13)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 + \lambda \sum_{j=1}^m \frac{A_j}{24j} + \lambda \sum_{j=1}^m \frac{B_j}{6(4j-1)} &= 0, \\ B_1 - \lambda \sum_{j=1}^m A_j \left\{ \frac{1}{2(4j+1)} - \frac{1}{4(1+k)(4j+2)} \right\} \\ &\quad - \lambda \sum_{j=1}^m B_j \left\{ \frac{1}{8j} - \frac{1}{4(1+k)(4j+1)} \right\} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

wobei die letzten zwei Bedingungen von φ^3 und φ^2 herrühren. Ersetzt man in (4.14) A_j, B_j durch ihre Werte (4.13), so findet man schliesslich die zwei homogenen Gleichungen für A_1, B_1 , die eine endliche Lösung dann und nur dann haben können, wenn die folgende Determinantengleichung erfüllt ist.

$$\begin{vmatrix} 1 + \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j)!} & \frac{1}{3} \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j-1)!} \\ 3 \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j-1)!} \left\{ \frac{1}{2(1+k)(4j+2)} - \frac{1}{8j} \right\} & \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j-2)!} \left[\frac{1}{2(1+k)(4j+1)} - \frac{1}{4j} \right] \end{vmatrix} = 0. \quad (4.15)$$

Jetzt führe man die Voraussetzung ein, dass der Balken eingespannt ist. Zu diesem Zwecke setzt man $k = \infty$ und erhält aus (4. 15) das Polynom in λ :

$$\left. \begin{aligned} 1 - \sum_{j=1}^m \lambda^j \left\{ \frac{1}{(4j)!} - \frac{1}{(4j)(4j-2)!} \right\} - \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j)!} \sum_{l=1}^m \frac{\lambda^l}{(4l-2)! 4l} \\ - \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j-1)!(4j+1)} \sum_{l=1}^m \frac{\lambda^l}{(4l-1)!} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4. 16)$$

Da aber

$$\begin{aligned} \frac{1}{(4j)!} - \frac{1}{(4j)(4j-2)!} &= \frac{2-4j}{(4j)!} \\ \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j)!} \sum_{l=1}^m \frac{\lambda^l}{(4l-1)! 4l} &= \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{j+1} \sum_{l=1}^j \frac{1}{4(j-l+4)!} \cdot \frac{1}{(4l-2)! 4l} \\ &\quad - \sum_{j=m}^{2m-1} \lambda^{j+1} \sum_{l=j}^{2m-1} \frac{1}{[4(j-l+m)]! [4(l-m+1)-2]! 4(l-m+1)}, \\ \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j-1)!(4j+1)} \sum_{l=1}^m \frac{\lambda^l}{(4l-1)!} &= \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{j+1} \sum_{l=1}^j \frac{1}{[4(j-l+1)-1]! (4l-1)! (4l+1)} \\ &\quad - \sum_{j=m}^{2m-1} \lambda^{j+1} \sum_{l=j}^{2m-1} \frac{1}{[4(j-l+m)-1]! [4(l-m+1)-1]! [4(l-m+1)+1]}, \end{aligned}$$

nimmt (4. 16) die folgende Form an:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\lambda}{12} - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{j+1} \left[\sum_{l=1}^j \frac{1}{[4(j-l+1)]! (4l+1)!} \right. \\ \left. \{ [4(j-l+1)][4l] - [4l-1][4l+1] \} - \frac{2+4j}{(4j+4)!} \right] \\ + \sum_{j=m}^{2m-1} \lambda^{j+1} \sum_{l=j}^{2m-1} \frac{1}{[4(j-l+m)]! [4(l-m+1)+1]!} \\ \{ 4(l-m-1) - 4(j-l+m) - 4(l-m-1)-1 \} + (l-m-1) - 1 \} = 0. \end{aligned} \quad (4. 16')$$

Dieser Ausdruck kann aber noch vereinfacht werden. Dieses soll aber nur mit dem Glied in eckigen Klammern unter dem ersten Summenzeichen durchgeführt werden, um zu zeigen, dass die ersten Glieder des Polynoms mit den entsprechenden Gliedern der exakten charakteristischen Gleichung übereinstimmen. Für den eingespannten Balken ist diese bekannterweise

$$\cosh \sqrt[4]{\lambda} \cos \sqrt[4]{\lambda} + 1 = 2 \left\{ 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^{2j+1} (-1)^{j+1}}{[4(j+1)]!} \lambda^j \right\} = 0. \quad (4. 17)$$

Somit muss die folgende Identität bewiesen werden, da man für $j = 0$ unmittelbar das Glied $-\lambda/12$ erhält:

$$\sum_{l=1}^j \frac{[4(j-l+1)][4l] - [4l-1][4l+1]}{[4(j-l+1)]![4l+1]!} - \frac{2+4j}{(4j+4)!} = \frac{(-1)^{j+1} 2^{2j+1}}{[4j-1]!} \quad (4.15)$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^j \frac{[4(j+1)]!}{[4(j-l+1)]!(4l+1)!} \{[4(j-l+1)][4l] - [4l-1][4l+1]\} \\ &= \sum_{l=1}^j \left[(4j+4) \left\{ \binom{4j+3}{4l} - \binom{4j+3}{4l-1} \right\} - \binom{4j+4}{4l+1} + \binom{4j+4}{4l} \right] \\ &= \sum_{l=1}^j \left\{ \binom{4j+4}{4l} - \binom{4j+4}{4l+1} \right\}, \end{aligned}$$

da

$$\binom{4j+3}{4l} - \binom{4j+3}{4l-1} = 0.$$

Schliesslich hat man

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^j \left\{ \binom{4j+4}{4l} - \binom{4j+4}{4l+1} \right\} = \sum_{l=0}^j \left\{ \binom{4j+4}{4l} - \binom{4j+4}{4l+1} \right\} + 4j+3 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^j \left\{ \binom{4j+4}{4l} - \binom{4j+4}{4l+1} + \binom{4j+4}{4l+2} - \binom{4j+4}{4l+3} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^j \left\{ \binom{4j+4}{4l} - \binom{4j+4}{4l+2} \right\} + 4j+3 \\ &= -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{2j+2} \binom{4j+4}{2l} (-1)^l + 4j+3 \\ &= 4j+2 + \frac{1}{4} \{ (1+i)^{4j+4} + (1-i)^{4j+4} \} = 4j+2 + 2^{2j+1} (-1)^{j+1}, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Man sieht also, dass die $(m+1)$ ersten Glieder der charakteristischen Gleichung (4.16') mit den entsprechenden Gliedern der exakten Gleichung übereinstimmen. Die weiteren Glieder in (4.16') entstehen als Resultat der Annäherung und können vernachlässigt werden in dem Sinne, dass man die Summationsgrenze m genügend gross wählt, um die erwünschte Genauigkeit zu erhalten.

Von (4.15) findet man, dass in jedem Falle, das heisst, was immer auch der Wert von m ist,

$$B_1 = -A_1 \frac{1 + \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j)!}}{1 - \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(4j-1)!}}, \quad (4.16)$$

und daher erhält man für die angenäherte Lösung von (4. 11)

$$\bar{Z}_\lambda(\varphi) = A \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{\lambda^{j-1}}{(4j-1)!} \varphi^{4j-1} - \left[\frac{1 + \sum_{l=1}^m \frac{\lambda^l}{(4l)!}}{\sum_{l=1}^m \frac{\lambda^l}{(4l-1)!}} \right] \frac{\lambda^{j-1}}{(4j-2)!} \varphi^{4j-2} \right\}. \quad (4. 20)$$

Dieser Ausdruck bestimmt für jedes λ , das die charakteristische Gleichung erfüllt, die entsprechende angenäherte Schwingungs-Krümmungs-Linie.

Lässt man jetzt $m \rightarrow \infty$, was augenscheinlich erlaubt ist, da alle Reihen konvergieren, so findet man leicht

$$\bar{Z}_\lambda(\varphi) = A \lambda^{-3/4} \left\{ \sinh(\lambda^{1/4} \varphi) - \sin(\lambda^{1/4} \varphi) - \frac{1}{2} \left[\frac{\cosh \lambda^{1/4} + \cos \lambda^{1/4}}{\sinh \lambda^{1/4} - \sin \lambda^{1/4}} \right] [\cosh(\lambda^{1/4} \varphi) - \cos(\lambda^{1/4} \varphi)] \right\}, \quad (4. 21)$$

das heisst die seit langem bekannten exakten Lösungen.

5. Schwingungen des eingespannten Keiles

Dieses Problem ist im Jahre 1879 durch G. R. KIRCHHOFF¹⁾ exakt gelöst worden, indem er von der Differentialgleichung ausging und zeigte, dass die Schwingungslinien mit Hilfe von Bessel-Funktionen ausgedrückt werden können.

In diesem Falle sind sowohl die Massen- wie auch die Steifheitsverteilung Funktionen der Längsordinate des Balkens.

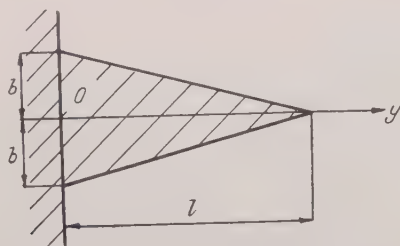


Fig. 4

Setzt man für die Breite 1

$$I(y) = \frac{2}{3} \cdot \frac{b^3}{l^3} (l-y)^3, \quad (5. 1)$$

$$m(y) = \frac{2 b \rho}{l} (l-y), \quad (5. 2)$$

¹⁾ G. R. KIRCHHOFF, Über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt, Berliner Mber., 1879.

so erhält man von (2. 6)

$$\bar{\mu}(\xi, y) = \frac{2 b \varrho}{6 l E} \left\{ \begin{array}{l} (l - y)^3 \left[\frac{l - y}{2} + (y - \varphi) \right], \quad (y > \varphi) \\ (l - \varphi)^3 \left[\frac{l - \varphi}{2} + (\varphi - y) \right], \quad (y < \varphi) \end{array} \right\} \quad (5. 3)$$

Nach Einführung der Koordinaten (4. 6), (4. 7) gibt dann (3. 3)

$$\bar{K}(\varphi, \psi) = \frac{3 \varrho l^3}{6 E b^2} \cdot \frac{1}{\varphi^{3/2} \psi^{3/2}} \left\{ \begin{array}{l} \psi^3 \left(\varphi - \frac{\psi}{2} \right), \quad (\varphi > \psi) \\ \varphi^3 \left(\psi - \frac{\varphi}{2} \right), \quad (\varphi < \psi) \end{array} \right\} \quad (5. 4)$$

Somit hat nun die Integralgleichung (3. 2') die Form

$$\bar{Z}(\varphi) = \frac{\lambda}{6} \left[\int_0^\varphi \frac{\psi^{3/2}}{\varphi^{3/2}} \left\{ \varphi - \frac{\psi}{2} \right\} \bar{Z}(\psi) d\psi + \int_\varphi^1 \frac{\varphi^{3/2}}{\psi^{3/2}} \left\{ \psi - \frac{\varphi}{2} \right\} \bar{Z}(\psi) d\psi \right], \quad (5. 5)$$

wobei

$$\lambda = \frac{3 \varrho l^4 \omega^2}{E b^2}. \quad (5. 6)$$

Der Integraloperator auf der rechten Seite transformiert die Potenz ψ^n in der Ausdruck:

$$\frac{\varphi^{n+2}}{\left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{5}{2}\right) \left(n + \frac{7}{2}\right)} - \frac{\varphi^{5/2}}{12 \left(n - \frac{1}{2}\right)} + \frac{\varphi^{3/2}}{6 \left(n - \frac{1}{2}\right)}. \quad (5. 7)$$

Wählt man

$$A \varphi^{3/2} + B \varphi^{5/2}$$

als Anfangsfunktion, so lässt sich das Resultat von m Iterationsschritten in der folgenden Form darstellen

$$\bar{Z}(\varphi) = \sum_{j=1}^m \{ A_j \varphi^{2j-1/2} + B_j \varphi^{2j+1/2} \}. \quad (5. 8)$$

Man postuliert jetzt den Fehler zu

$$\left. \begin{array}{l} \lambda A_m \frac{\varphi^{2m+3/2}}{(2m-1) 2m (2m+2) (2m+3)} \\ + \lambda B_m \frac{\varphi^{2m+5/2}}{2m (2m+1) (2m+3) (2m+4)} \end{array} \right\} \quad (5. 9)$$

und erhält nach Anwendung von (5. 7) aus dem Koeffizientenvergleich der Potenzen von φ

$$A_j = \frac{\lambda^{j-1} 3!}{(2j+1)! (2j-2)!} A_1, \quad B_j = \frac{\lambda^{j-1} 4!}{(2j+2)! (2j-1)!} B_1, \quad (5. 10)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 + \frac{\lambda}{6} \sum_{j=1}^m \frac{A_j}{2j} + \frac{\lambda}{6} \sum_{j=1}^m \frac{B_j}{2j+1} = 0, \\ B_1 + \frac{\lambda}{12} \sum_{j=1}^m \frac{A_j}{2j-1} + \frac{\lambda}{12} \sum_{j=1}^m \frac{B_j}{2j} = 0. \end{array} \right\} \quad (5. 11)$$

Die Ausdrücke für A_j und B_j (5.10) in (5.11) eingesetzt, ergeben ein homogenes Gleichungssystem in A und B , wobei die ausmultiplizierte Determinante für die nichttriviale Lösung die folgende Form annimmt:

$$\left. \begin{aligned} &1 + \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(2j+1)!(2j-2)!2j} - 2 \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(2j+2)!2j!} \\ &+ 2 \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(2j+1)!(2j-2)!2j} \sum_{K=1}^m \frac{\lambda^K}{(2K+2)!2K!} \\ &- 2 \sum_{j=1}^m \frac{\lambda^j}{(2j+1)!(2j-1)!} \sum_{K=1}^m \frac{\lambda^K}{(2K+2)!(2K-1)!(2K+1)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Nach steigenden Potenzen geordnet, sollen nun die ersten n Glieder mit der Lösung von KIRCHHOFF (5.13)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \lambda^j}{(2j+1)! [(j+1)!]^2} = 0 \tag{5.13}$$

übereinstimmen. Um dies zu beweisen, ordnet man die Doppelsummen nach Potenzen von λ und zeigt die Identität der $(n+1)$ -ten Potenz von λ in den beiden Ausdrücken (5.12) und (5.13).

$$\begin{aligned} &+ 1 - \sum_{n=1}^m \frac{\lambda^n}{(2n+2)!2n!} [(2n+2)(2n-1)-2] \\ &- 2 \sum_{n=1}^{m-1} \lambda^{n+1} \sum_{K=1}^n \frac{1}{[2(n-K+1)+2]! [2(n-K+1)-1]! (2K+1)! (2K-2)!2K} \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{m-1} \lambda^{n+1} \sum_{K=1}^n \frac{1}{[2(n-K+1)+1]! [2(n-K+1)-1]! (2K+2)! (2K-1)! (2K+1)} \\ &\equiv \sum_{n=0}^m \frac{\lambda^n (-1)^n}{(2n+1)! (n+1)! (n+1)!}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\left. \begin{aligned} &\frac{(2n+4)(2n+1)-2}{(2n+4)!(2n+2)!} \\ &+ 2 \sum_{K=1}^n \left\{ \frac{2K-1}{[2(n-K+1)+2]! [2(n-K+1)-1]! (2K+1)! (2K-1)!} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2K}{[2(n-K+1)+1]! [2(n-K+1)-1]! (2K+2)! (2K+1)!} \right\} \\ &- \frac{(-1)^n}{(2n+3)! (n+2)! (n+2)!} \end{aligned} \right\} \tag{5.15}$$

Nach einigen Umformungen nehmen diese Ausdrücke die folgende Form an:

$$2 \sum_{K=0}^{2n+2} \binom{2n+4}{K} \binom{2n+2}{K} (-1)^K \binom{K-1}{K+1} \equiv (-1)^n \frac{(2n+4)(2j+2)!}{(j+2)! (j+2)!} \quad (5.1)$$

Setzt man noch $m = n + 1$ und beachtet die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \sum_{K=0}^{2m} \binom{2m}{K} \binom{2m+2}{K} (-1)^K &= \binom{2m}{m-1} (-1)^m - (-1)^{m+1} \binom{2m}{m} \\ \sum_{K=0}^{2m} \binom{2m+2}{K} \binom{2m+1}{K} (-1)^K &= (-1)^m \binom{2m+1}{m} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

so ergibt sich sofort, dass die geforderte Identität erfüllt ist. Der Fehler (5.1) verschwindet beim Übergang $m \rightarrow \infty$, so dass die Lösung ebenfalls die Form (5.13) annimmt.

Die Krümmung ergibt sich aus den Beziehungen (3.3), (5.8) und (5.10) zu

$$Z(\varphi) = \sum_{j=1}^m \left\{ \frac{K A_1 3! \varphi^{2j-2}}{(2j+1)! (2j-2)!} + \frac{K B_1 4! \varphi^{2j-1}}{(2j+2)! (2j-1)!} \right\} \lambda^{j-1} \quad (5.1)$$

mit

$$K = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3} b^3 E}} \quad (5.1)$$

Durch Wahl der neuen Variablen

$$\xi = \varphi \lambda^{1/2}$$

und der neuen Konstanten

$$K A_1 3! = A + B, \quad K B_1 4! \lambda^{-1/2} = A - B \quad (5.2)$$

erhält $Z(\xi)$ die Form

$$Z(\xi) = A \sum_{j=0}^{2m+1} \frac{\xi^j}{(j+3)! j!} + B \sum_{j=0}^{2m+1} \frac{\xi^j (-1)^j}{(j+3)! j!},$$

die mit der Kirchhoffschen Lösung übereinstimmt.

Summary

The vibration problem of certain dynamic systems with polynomial mass and stiffness distributions can be expressed as a Fredholm integral equation with degenerated, symmetric kernel.

If a starting function is chosen appropriately, the eigenfunction can be expressed as a power series. Simple recurrence relations between the coefficients of this power series yield the characteristic equation for the eigenvalues with finite number of disposable coefficients.

This method is applied to a beam and a wedge and leads to the exact solution

(Eingegangen: 21. Februar 1953.)

Sur la thermodynamique des processus irréversibles

(Troisième mémoire)¹⁾

Par KYRILLE POPOFF, Sofia²⁾

Considérons un système, adiabatiquement isolé, dont l'état est complètement défini par les variables $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Soient $\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0$ les valeurs de ces variables, correspondant à l'état stable du système, et posons $x_i = \xi_i - \xi_i^0$. L'expression de l'entropie autour de l'état stable, réduite à ses termes du second degré, est donnée par

$$\Delta S = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} g_{ik} x_i x_k, \quad \text{avec} \quad g_{ik} = g_{ki}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

La forme $\sum_{i,k} g_{ik} x_i x_k$ est une forme quadratique, positivement définie.

La théorie des processus irréversibles de la thermodynamique, esquissée par PRIGOGINE, repose sur la symétrie du tenseur L_{ik} , figurant dans les relations phénoménologiques

$$x'_i = \sum_k L_{ik} X_k, \quad (1)$$

où les x'_i sont les «flux», c'est-à-dire les dérivées des x_i par rapport au temps t , les X_k les «forces», les dérivées de $(-\Delta S)$ par rapport aux x_k respectivement.

Dans ce qui suit, nous montrons:

1° Si les x_i , et par conséquent les g_{ik} , sont d'après l'hypothèse les seuls éléments déterminant l'état du système, les L_{ik} doivent être complètement déterminés par les g_{ik} . L'intégrale générale du système d'équations différentielles (1), qui est d'ordre n , contenant n constantes d'intégration; ces constantes sont complètement définies par les valeurs initiales des n variables x_i , mais pour que ces intégrales déterminent des processus irréversibles, il faut qu'on ait $x_i(+\infty) = 0$, ce qui impose n nouvelles conditions aux L_{ik} .

2° Nous montrons que toutes ces conditions sont remplies par des intégrales du système plus général d'ordre $2n$

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i, \quad \text{où} \quad X_i = -\frac{\partial(\Delta S)}{\partial x_i}, \quad (2)$$

Le cas le plus général, les L_{ik} ne dépendant ainsi que des g_{ik} .

¹⁾ Cf. KYRILLE POPOFF, *Sur la thermodynamique des processus irréversibles*, 1^{er} mémoire: ZAMP 3, 42-51 (1952); 2^e mémoire: ZAMP 3, 440-448 (1952); *Sur les relations phénoménologiques* Prigogine, C. r. Acad. Sci. Paris 253, N° 13, 648-649 (1952); *Sur l'échange de chaleur par conduction* dans un système à un autre, C. r. Acad. Sci. Paris 256, N° 2, 785-786 (1953).

²⁾ Institut de Mathématiques à l'Université de Sofia.

3° Nous appliquons la théorie générale que nous développons à la théorie de la conductibilité de la chaleur et à la théorie des phases.

Etude des relations phénoménologiques d'Onsager

Considérons le système d'équations différentielles

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= L_{11} X_1 + L_{12} X_2 + \cdots + L_{1n} X_n, \\ x'_2 &= L_{21} X_1 + L_{22} X_2 + \cdots + L_{2n} X_n, \\ &\dots\dots\dots \\ x'_n &= L_{n1} X_1 + L_{n2} X_2 + \cdots + L_{nn} X_n, \end{aligned} \right\}$$

avec

$$X_k = g_{k1} x_1 + g_{k2} x_2 + \cdots + g_{kn} x_n.$$

C'est un système linéaire d'ordre n dont la solution générale est donnée par

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \alpha_1 e^{r_1 t} + C_2 \alpha_2 e^{r_2 t} + \cdots + C_n \alpha_n e^{r_n t}, \\ x_2(t) &= C_1 \beta_1 e^{r_1 t} + C_2 \beta_2 e^{r_2 t} + \cdots + C_n \beta_n e^{r_n t}, \\ &\dots\dots\dots \\ x_n(t) &= C_1 \lambda_1 e^{r_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{r_2 t} + \cdots + C_n \lambda_n e^{r_n t}, \end{aligned}$$

où les r_i et les $\alpha_i, \beta_i, \dots, \lambda_i$ sont des fonctions des L_{ik} et des g_{ik} seulement. Les conditions initiales $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$ déterminent complètement les n constantes d'intégration C_1, C_2, C_n en fonction des L_{ik} . Mais pour que les équations (1) définissent un processus irréversible, il faut qu'il ait encore $x_1(+\infty) = 0, x_2(+\infty) = 0, \dots, x_n(+\infty) = 0$, ce qui exige que tous les r_i soient négatifs. Or, les r_i étant des fonctions des L_{ik} , cela impose n nouvelles conditions aux L_{ik} . Ainsi, dans le cas de $n = 2$, on a

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{1}{2} (L_{11} g_{11} + 2 L_{12} g_{12} + L_{22} g_{22}) \\ &\pm \frac{1}{2} \sqrt{(L_{11} g_{11} + 2 L_{12} g_{12} + L_{22} g_{22})^2 - 4 (L_{11} L_{22} - L_{12}^2) (g_{11} g_{22} - g_{12}^2)} \end{aligned}$$

On constate d'abord que les L_{ik} entrent comme éléments déterminant le processus irréversible, contrairement à l'hypothèse admise que les ξ_i sont les seules variables déterminant l'état du système. Il faut de plus que les r_i soient tous réels et négatifs pour qu'on ait $x_i(+\infty) = 0$, ce qui impose des nouvelles conditions à remplir par les L_{ik} .

où les A, B, \dots, N comme les $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ ne dépendent que des g_{ik} . On a de plus

$$x'_i(t) = C_1 e^{r_1 t} r_1 \eta_1 + C_2 e^{r_2 t} r_2 \eta_2 + \dots + C_n e^{r_n t} r_n \eta_n. \quad (8)$$

L'élimination des $C_1, e^{r_1 t}, \dots, C_n e^{r_n t}$ des équations (7) et (8) conduit aux relations phénoménologiques

$$\begin{vmatrix} x'_i & r_1 \eta_1 & r_2 \eta_2 & \dots & r_n \eta_n \\ X_1 & A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ X_2 & B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n & N_1 & N_2 & \dots & N_n \end{vmatrix} = 0,$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$x'_i = L_{i1} X_1 + L_{i2} X_2 + \dots + L_{in} X_n, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

où les L_{ik} comme les $r, \alpha, \beta, \dots, \lambda$ sont des constantes ne dépendant que des g_{ik} .

Etude du cas général où l'on garde tous les termes dans le développement de ΔS

Dans le cas général où l'on garde tous les termes dans le développement de ΔS , il est essentiel de montrer que l'on a n intégrales $x_i(t)$, contenant n constantes, permettant de choisir arbitrairement les valeurs initiales x_i^0 et s'annulant pour $t = +\infty$. En suivant la méthode d'intégration de POINCARÉ, que nous avons employée dans notre second mémoire cité, on peut ramener les équations (2), où cette fois on retient tous les termes dans le développement de (ΔS) , à un système d'équations différentielles d'ordre $2n$ de la forme

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_1}{r_1 u_1 + \dots} &= \frac{du_2}{r_2 u_2 + \dots} = \dots = \frac{du_n}{r_n u_n + \dots} = \frac{du_{n+1}}{r_{n+1} u_{n+1} + \dots} = \dots \\ &= \frac{du_{2n}}{r_{2n} u_{2n} + \dots} = dt \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

où les points (...) remplacent des termes de second degré et de degré supérieur à deux, où les u_i sont des fonctions linéaires des x_i et des x'_i et où les r_i sont les racines de l'équation algébrique (4). Aux racines négatives r_1, r_2, r_n correspondent ici n intégrales $x_i(t)$, fonctions holomorphes de $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_n t}$, s'annulant pour $t = +\infty$ et contenant n constantes d'intégration et qu'on peut développer suivant les puissances de $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_n t}$. Avec ces valeurs des $x_i(t)$ on forme les $X_i = -\delta(\Delta S)/\delta X_i$, qui deviennent ainsi des fonctions holomorphes des $e^{r_i t}$.

L'élimination des $e^{r_{it}}$ de $x'_i(t)$ et des X_1, X_2, \dots, X_n conduit ainsi aux relations phénoménologiques. Dans ce cas pourtant les L_{ik} sont des fonctions de t aussi, dont les valeurs principales coïncident avec les valeurs du paragraphe précédent. Pour plus de détails, nous renvoyons au tome III du *Traité d'analyse* de E. PICCARD et à notre second mémoire cité.

Après ces généralités, considérons quelques problèmes physiques concrets.

Transfèrement de la chaleur d'un système à un autre

En appliquant la méthode ici développée nous allons montrer que l'hypothèse de FOURIER concernant le transport de la chaleur d'un système à un autre découle des équations (2).

Considérons un système de deux plaques cylindriques, mises en contact thermique par leurs faces et adiabatiquement isolées du reste par une couche imperméable à la chaleur. Dans ce qui suit, nous négligeons le travail de la dilatation thermique.

Soit m la masse, par unité de surface de contact, T_1 la température absolue, c_1 la chaleur spécifique de la première plaque et m_2, T_2, c_2 les données correspondant à la seconde; T_0 la température du système après l'établissement de l'équilibre thermique. Nous admettons que l'épaisseur des plaques est assez faible pour que la température de chacune reste uniforme pendant le processus. En désignant par q_1 la chaleur à emprunter, par l'unité de surface, au moment t par la première plaque de la seconde pour arriver à l'équilibre thermique et par q_2 la quantité correspondant à la seconde, on aura $q_1 + q_2 = 0$, où

$$q_1 = m_1 c_1 (T_1 - T_0) = m_1 c_1 \Delta T_1, \quad q_2 = m_2 c_2 (T_2 - T_0) = m_2 c_2 \Delta T_2, \quad (11)$$

d'où l'on tire

$$m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2 = T_0 (m_1 c_1 + m_2 c_2) \quad (12)$$

et

$$q_1 = - \frac{m_1 c_1 \cdot m_2 c_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} (T_1 - T_2). \quad (13)$$

On aura ainsi pour ΔS , correspondant à un moment donné t et à l'unité de surface de contact thermique, en ne retenant que des termes du second degré,

$$\Delta S = \frac{q_1}{T_1} + \frac{q_2}{T_2} = - \frac{T_1 - T_2}{T_0^2} q_1,$$

ce qu'on peut écrire, eu égard à la formule (13),

$$\Delta S = - \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 c_1 \cdot m_2 c_2} \cdot \frac{q_1^2}{T_0^2},$$

où l'on tire

$$-\frac{\partial(\Delta S)}{\partial q_1} = \frac{2}{T_0^2} \cdot \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 c_1 \cdot m_2 c_2} q_1 = a q_1, \quad \text{avec } a > 0,$$

t, par conséquent, on aura ici l'équation unique

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} = a q_1, \quad (14)$$

dont l'intégrale est de la forme $q_1 = C e^{rt}$.

En posant cette valeur de q_1 dans (14), on aura, a étant positif,

$$r^2 = a, \quad r_{1,2} = \pm \sqrt{a},$$

la valeur \sqrt{a} correspondant seulement au problème physique, q_1 devant tendre vers zéro pour $t = +\infty$.

On a ainsi

$$q_1 = C e^{rt} = C e^{-\sqrt{a}t}, \quad \dot{q}_1 = -\sqrt{a} C e^{-\sqrt{a}t} = -\sqrt{a} q_1, \quad (15)$$

avec $C = q_1^0$ — la valeur de q_1 pour un moment donné $t = t_0$.

Avec la valeur de q_1 de (13) et de a , on obtient l'expression suivante du « flux » de chaleur, correspondant à l'hypothèse de FOURIER

$$\dot{q}_1 = -\frac{1}{T_0} \sqrt{\frac{2 m_1 c_1 \cdot m_2 c_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}} (T_1 - T_2). \quad (16)$$

Jusqu'ici nous avons supposé qu'à chaque moment la température des plaques est uniforme. Mais quoique très minces, la température des plaques, qui est une fonction continue le long des axes des plaques, différera sur les deux faces de chacune des plaques, et on aura des valeurs différentes de l'entropie suivant qu'on forme l'expression de l'entropie avec l'une ou avec l'autre de ces températures dont la différence est petite de l'ordre de l'épaisseur des plaques. La valeur de l'entropie de chaque plaque correspondra à une température moyenne, dépendant de la conductibilité des plaques. Si l'on désigne par T_1 et T_2 les températures extrêmes sur les deux plaques, T_0 la température à l'état de stabilité et en posant $\lambda_1 T_1 - T_0$, $\lambda_2 T_2 - T_0$, les températures moyennes à mettre dans l'expression de ΔS seront

$$T_0 - \lambda_1 \Delta T_1, \quad T_0 + \lambda_2 \Delta T_2,$$

où λ_1 et λ_2 dépendent de la conductibilité des plaques et diffèrent très peu de l'unité. Ainsi on aura

$$q_1 = m_1 c_1 \lambda_1 \Delta T_1, \quad q_2 = m_2 c_2 \lambda_2 \Delta T_2, \quad q_1 + q_2 = 0. \quad (17)$$

Avec ces valeurs de q_1 et q_2 on aura

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{m_1 c_1 \lambda_1 \cdot m_2 c_2 \lambda_2}{m_1 c_1 \lambda_1 + m_2 c_2 \lambda_2} (T_1 - T_2), \quad \frac{q_1}{m_1 c_1} = \lambda_1 \Delta T_1, \\ \frac{q_2}{m_2 c_2} &= \lambda_2 \Delta T_2 = -\frac{q_1}{m_2 c_2}, \quad \lambda_2 \Delta T_2 - \lambda_1 \Delta T_1 = -q_1 \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 c_1 \cdot m_2 c_2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

et en se bornant aux termes de second degré

$$\Delta S = \frac{q_1}{T_0 + \lambda_1 \Delta T_1} + \frac{q_2}{T_0 + \lambda_2 \Delta T_2} = \frac{\lambda_2 \Delta T_2 - \lambda_1 \Delta T_1}{T_0^2} q_1 = -\frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 c_1 \cdot m_2 c_2} \cdot \frac{q_1^2}{T_0^2}$$

d'où

$$\frac{d(-\Delta S)}{dq_1} = -\frac{2(m_1 c_1 + m_2 c_2)}{m_1 c_1 \cdot m_2 c_2} \cdot \frac{q_1}{T_0^2} = -a q_1.$$

En suivant les calculs de la page précédente, on aura définitivement

$$\dot{q}_1 = -\sqrt{\frac{2(m_1 c_1 + m_2 c_2)}{m_1 c_1 \cdot m_2 c_2}} \cdot \frac{m_1 c_1 \lambda_1 \cdot m_2 c_2 \lambda_2}{m_1 c_1 \lambda_1 + m_2 c_2 \lambda_2} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_0}.$$

Conduction de la chaleur dans une barre homogène

Considérons une barre cylindrique de densité ρ et de chaleur spécifique c , mise dans un étui imperméable à la chaleur, éventuellement ouvert même de deux côtés. Nous admettons que la température de la barre est une fonction continue de l'abscisse x , comptée sur l'axe de la barre, et admet des dérivées. Considérons trois sections de la barre, correspondant à $x - dx$, x et à $x + dx$ et soit f l'aire de ces sections que nous supposons égale à $u n$. On a ainsi deux tranches limitrophes de volume $f dx$ et de masse $\rho f dx$.

Considérons le système des deux tranches. Soit $\dot{q}(x - dx)$ le flux de chaleur pénétrant le système par la section $(x - dx)$ et $q(x + dx)$ le flux de chaleur sortant par la section $(x + dx)$, rapportés à l'unité de surface.

Désignons par ds l'accroissement de l'entropie de l'unité de masse du système des deux tranches pendant l'intervalle de temps dt . On aura pour l'accroissement de l'entropie du système, rapporté à l'unité de temps

$$2 \rho f dx \frac{ds}{dt}.$$

Désignons d'autre part par du l'accroissement de l'énergie interne, rapporté à l'unité de masse pendant l'intervalle de temps dt . On aura pour l'accroissement de l'énergie interne du système pendant l'unité de temps

$$2 \rho f dx \frac{du}{dt} = f [\dot{q}(x - dx) - \dot{q}(x + dx)] = -2 f dx \frac{d\dot{q}(x)}{dx}.$$

Ainsi, en négligeant le travail de la dilatation thermique, on aura

$$T \varrho \frac{ds}{dt} = - \frac{d\dot{q}(x)}{dx},$$

ou bien

$$\varrho \frac{ds}{dt} = - \frac{1}{T} \cdot \frac{d\dot{q}}{dx} = - \frac{d(\dot{q}/T)}{dx} - \frac{\dot{q}}{T^2} \cdot \frac{dT(x)}{dx}.$$

Pourtant on a

$$T(x + dx) - T(x - dx) = 2 \frac{dT(x)}{dx} dx.$$

Or, d'après la formule (13), cette quantité est proportionnelle à la quantité de chaleur q dans un processus adiabatique. En posant

$$\frac{dT}{dx} = \mu q,$$

μ étant le coefficient de proportionnalité figurant dans (13) ou (18), on aura

$$\varrho \frac{ds}{dt} = - \frac{d(\dot{q}/T)}{dx} - \frac{\mu q \dot{q}}{T^2}.$$

Ainsi l'accroissement de l'entropie se trouve décomposé en deux parties: 1° à la divergence de l'entropie

$$- \frac{d(\dot{q}/T)}{dx}$$

et 2° à une partie

$$\Delta \dot{\sigma} = - \frac{\mu}{T^2} q \dot{q}$$

correspondant à

$$\Delta \sigma = - \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{T^2} q^2$$

et provenant d'une source, due à un processus adiabatique irréversible, considéré dans le paragraphe précédent. La dérivée par rapport à q de cette partie étant $(-\mu q/T^2)$, on aura pour déterminer q , d'après la théorie développée ici

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = b q \quad \text{avec} \quad b = \frac{\mu}{T^2}$$

et qui conduit, d'après le paragraphe précédent, à

$$\dot{q} = -\sqrt{b} q = -\sqrt{\frac{1}{b}} \cdot \frac{dT}{dx}.$$

C'est la formule du flux de chaleur, d'après l'hypothèse de FOURIER. Dans son ouvrage *Thermodynamics of Irreversible Processes*, M. DE GROOT reproduit le résultat analogue, dû à M. PRIGOGINE et obtenu par l'application directe des relations phénoménologiques d'ONSAGER, dans leur forme primitive où figurent les coefficients L_{ik} , dont la signification est, comme nous l'avons montré, à établir pour qu'on ait $q(+\infty) = 0$.

Applications à la théorie des phases

Considérons un récipient de parois imperméables à la chaleur et absolument rigides, rempli d'un liquide (I) et de ses vapeurs (II) à des températures respectives T_1 et T_2 . Soient M , V , U la masse totale, le volume et l'énergie totale de la substance, remplissant le récipient. En désignant par M_i ($i = 1, 2$) les masses respectives des deux composants, par v_i , u_i et s_i le volume, l'énergie et l'entropie respectifs, rapportés à l'unité de masse des composants, on aura

$$\left. \begin{aligned} M_1 + M_2 &= M, & M_1 v_1 + M_2 v_2 &= V, & M_1 u_1 + M_2 u_2 &= U, \\ S &= M_1 s_1 + M_2 s_2. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Choisissons l'énergie et le volume comme variables indépendantes déterminant l'état des composants. Les relations (20) déterminent M_2 , v_2 , u_2 en fonction de M_1 , v_1 , u_1 . D'autre part s_i , T_i , p_i , étant des fonctions de u_i , v_i , deviennent des fonctions de M_1 , v_1 , u_1 . En définitive, l'entropie totale S du système sera une fonction déterminée de M_1 , v_1 et u_1 . En désignant par u_1^0 , v_1^0 , M_1^0 les valeurs de ces variables à l'état d'équilibre thermodynamique, on aura, en posant

$$v_1 - v_1^0 = v, \quad u_1 - u_1^0 = u, \quad M_1 - M_0 = m,$$

$$\begin{aligned} 1S &= S(u_1, v_1, M_1) = S(u_1^0, v_1^0, M_1^0) + \left(\frac{\partial S}{\partial u_1} \right)_0 u + \left(\frac{\partial S}{\partial v_1} \right)_0 v + \left(\frac{\partial S}{\partial M_1} \right)_0 m \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1^2} \right)_0 u^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial v_1} \right)_0 u v + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial M_1} \right)_0 u m + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1^2} \right)_0 v^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial M_1} \right)_0 v m + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial M_1^2} \right)_0 m^2 \right] + \dots \end{aligned}$$

Les dérivées partielles étant prises pour les valeurs u_1^0 , v_1^0 , M_1^0 des variables indépendantes, correspondant au maximum de S , on aura

$$\left(\frac{\partial S}{\partial u_1} \right)_0 = \left(\frac{\partial S}{\partial v_1} \right)_0 = \left(\frac{\partial S}{\partial M_1} \right)_0 = 0 \quad (21)$$

et en ne retenant que les termes du second degré en u , v , m

$$\begin{aligned} 1S &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1^2} \right)_0 u^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial v_1} \right)_0 u v + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial M_1} \right)_0 u m + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1^2} \right)_0 v^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial M_1} \right)_0 v m + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial M_1^2} \right)_0 m^2 \right]. \end{aligned}$$

Pour le calcul des dérivées secondes, nous aurons recours à l'expression de la différentielle seconde

$$d^2S = \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} du dv + \dots + \frac{\partial^2 S}{\partial M_1^2} dM_1^2.$$

Les équations différentielles, correspondant aux équations (2), sont dans le cas

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1^2} \right)_0 u - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial v_1} \right)_0 v - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial M_1} \right)_0 m, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} &= - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial v_1} \right)_0 u - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1^2} \right)_0 v - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial M_1} \right)_0 m, \\ \frac{d^2 m}{dt^2} &= - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial M_1} \right)_0 u - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial M_1} \right)_0 v - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial M_1^2} \right)_0 m, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

dont la solution qui nous intéresse dépend des racines négatives de l'équation en r suivante:

$$\begin{vmatrix} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1^2} \right)_0 - r^2 & - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial v_1} \right)_0 & - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial M_1} \right)_0 \\ - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial v_1} \right)_0 & - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1^2} \right)_0 - r^2 & - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial M_1} \right)_0 \\ - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial M_1} \right)_0 & - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial M_1} \right)_0 & - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial M_1^2} \right)_0 - r^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (23)$$

— (15) étant une forme positivement définie, trois des racines de cette équation en r sont négatives et les trois autres positives. Les constantes d'intégration dans l'intégrale générale du système (22), correspondant aux racines positives, doivent être posées nulles.

Les résultats qu'on obtient ainsi correspondent au problème physique tant que la masse d'un des composants, donnée par les équations (21), n'est pas négative ou plus grande que M .

Pour déterminer les valeurs des variables indépendantes correspondant à l'état d'équilibre thermodynamique nous suivons la méthode de GIBBS, telle qu'elle a été exposée par MAX PLANCK¹⁾.

Des équations (20), on obtient

$$\left. \begin{aligned} dM_2 &= -dM_1, \quad M_2 dv_2 = -M_1 dv_1 - (v_1 - v_2) dM_1, \\ M_2 du_2 &= -M_1 du_1 - (u_1 - u_2) dM_1 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

¹⁾ MAX PLANCK, *Thermodynamik*, 9^e éd. (W. de Gruyter, Berlin et Leipzig 1930).

et

$$\begin{aligned}
 dS &= M_1 ds_1 + M_2 ds_2 + s_1 dM_1 + s_2 dM_2, \quad (dM = dm) \\
 &= M_1 ds_1 + M_2 ds_2 + (s_1 - s_2) dM \\
 &= M_1 \frac{du_1 + p_1 dv_1}{T_1} + M_1 \frac{du_2 + p_2 dv_2}{T_2} + (s_1 - s_2) dm \\
 &= M_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) du_1 + M_1 \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) dv_1 \\
 &\quad + \left(s_1 - s_2 - \frac{(u_1 - u_2) + p_2(v_1 - v_2)}{T_2} \right) dm.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Ainsi les équations (21) définissant l'état d'équilibre, deviennent

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial S}{\partial u} &= M_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial v} = M_1 \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) = 0, \\
 \frac{\partial S}{\partial M_1} &= s_1 - s_2 - \frac{(u_1 - u_2) + p_2(v_1 - v_2)}{T_2} = 0,
 \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

d'où l'on tire les conditions de GIBBS

$$T_1 = T_2 = T_0, \quad p_1 = p_2 = p_0. \tag{27}$$

D'autre part, u et v ayant été choisis comme variables indépendantes, on aura

$$\begin{aligned}
 T_1 &= f_1(u_1, v_1), \quad T_2 = f_2(u_2, v_2) = f(u_1, v_1, M_1), \\
 p_1 &= \varphi_1(u_1, v_1), \quad p_2 = \varphi_2(u_2, v_2) = \varphi(u_1, v_1, M_1), \\
 s_1 &= \psi_1(u_1, v_1), \quad s_2 = \psi_2(u_2, v_2) = \psi(u_1, v_1, M_1)
 \end{aligned}$$

et les trois équations déterminent les trois variables v_1, u_1, M_1 qui correspondent à l'état d'équilibre thermodynamique. Il est à remarquer que les équations (26) contiennent s et u par la différence de leur valeurs à l'état (I) et à l'état (II).

En suivant MAX PLANCK, on peut donner une autre forme à la dernière des équations (26). La différence $(s_1 - s_2)$ à l'état d'équilibre thermodynamique ne dépendant que de l'état (I) et de l'état (II) est indépendante du chemin suivi dans le passage de l'état (I) à l'état (II). On peut trouver cette différence en suivant le passage sur l'isotherme T_0 . On aura ainsi, s_1 et s_2 se rapportant à l'unité de masse de la même substance et à la température T_0 ,

$$s_1 - s_2 = \int_{(II)}^{(I)} ds = \int_{II}^I \frac{du + p dv}{T_0} = \frac{u_1 - u_2}{T_0} + \frac{1}{T_0} \int_{(II)}^{(I)} p dv.$$

Avec cela, en posant $T_2 = T_0$, la dernière des équations (26) devient

$$\frac{1}{T_0} \int_{II}^I p \, dv - \frac{p_2(v_1 - v_2)}{T_0} = 0, \quad \int_{II}^I p \, dv = p_2(v_1 - v_2).$$

Il nous reste à former les dérivées secondes, figurant dans les équations (22), au moyen des quantités mesurables directement.

De (25), on obtient, eu égard aux relations (21)

$$\begin{aligned} d^2S &= \frac{M_1}{T_0^2} (-dT_1 - dT_2) du_1 - \frac{M_1 p_0}{T_0^2} (-dT_1 - dT_2) dv_1 - \frac{M_1}{T_0} (dp_1 - dp_2) dv_1 \\ &+ \left[ds_1 - ds_2 - \frac{du_1 - du_2 + p_0 (dv_1 - dv_2)}{T_0} - \frac{(v_1 - v_2) p_2}{T_0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u_1 - u_2 + p_0 (v_1 - v_2)}{T_0^2} dT_2 \right] dM_1 \\ &= \frac{M_1}{T_0^2} (-dT_1 - dT_2) du_1 - \frac{M_1 p_0}{T_0^2} (-dT_1 - dT_2) dv_1 - \frac{M_1}{T_0} (dp_1 - dp_2) dv_1 \\ &+ \left[\frac{u_1 - u_2 + p_0 (v_1 - v_2)}{T_0^2} dT_2 - \frac{v_1 - v_2}{T_0} dp_2 \right] dM_1. \end{aligned}$$

Les u_1, v_1, u_2, v_2 et M_1 qui figurent dans cette expression de d^2S correspondent à l'état d'équilibre. Les différentielles $dT_1, dT_2, du_2, dv_2, dp_1, dp_2$ d'autre part doivent être exprimées en fonction de du_1, dv_1 et de $dM_1 = dm$.

Nous avons eu d'abord

$$M_2 dv_2 = -M_1 dv_1 = (v_1 - v_2) dm, \quad \text{avec} \quad M_2 = M - M_1,$$

u et v ayant été choisis comme variables indépendantes, on aura $T = T(u, v)$. Cette relation détermine u comme fonction de T et de v , soit $u = u(v, T)$, satisfaisant identiquement l'équation $T = T[u(v, T), v]$, d'où l'on tire d'abord en prenant les dérivées des deux membres suivant T

$$1 = \frac{\partial T(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(v, T)}{\partial T}, \quad \frac{\partial T(u, v)}{\partial u} = \frac{1}{\partial u(v, T)/\partial T} = \frac{1}{c_v}.$$

En différentiant la même identité suivant v , on obtient

$$\frac{\partial T(u, v)}{\partial v} = - \frac{\partial T(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(v, T)}{\partial v} = - \frac{1}{c_v} \cdot \frac{\partial u(v, T)}{\partial v}.$$

D'autre part, on a d'après le premier principe de la thermodynamique

$$\begin{aligned} dq &= du(v, T) + p(v, T) dv = \frac{\partial u(v, T)}{\partial T} dT + \left[\frac{\partial u(v, T)}{\partial v} + p(v, T) \right] dv \\ &= c_v dT + a dv, \quad \text{avec} \quad a = \frac{\partial u(v, T)}{\partial v} + p(v, T), \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\frac{\partial T(u, v)}{\partial v} = -\frac{1}{c_v} (a - p).$$

Définitivement, on aura

$$dT = \frac{\partial T(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial T(u, v)}{\partial v} dv = -\frac{a - p}{c_v} dv + \frac{1}{c_v} du,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} dT_1 &= -\frac{a_1 - p_0}{c_{v1}} dv_1 + \frac{1}{c_{v1}} du_1, \\ dT_2 &= -\frac{a_2 - p_0}{c_{v2}} dv_2 + \frac{1}{c_{v2}} du_2 \\ &= \frac{a_2 - p_0}{c_{v2}} \cdot \frac{M_1}{M_2} dv_1 - \frac{1}{c_{v2}} \cdot \frac{M_1}{M_2} du_1 \\ &\quad - [(a_2 - p_0)(v_1 - v_2) - (u_1 - u_2)] \frac{dm}{c_{v2} M_2}. \end{aligned}$$

Pour obtenir dp en fonction de du et dv , considérons p comme fonction de u et de v . On aura ainsi

$$dp(u, v) = \frac{\partial p(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial p(u, v)}{\partial v} dv.$$

D'autre part, on a d'après le premier principe de la thermodynamique

$$dq = du(p, T) + p dv(p, T) = k dp + c_p dT$$

où l'on a

$$k = \frac{\partial u(p, T)}{\partial p} + p \frac{\partial v(p, T)}{\partial p}, \quad c_p = \frac{\partial u(p, T)}{\partial T} + p \frac{\partial v(p, T)}{\partial T}.$$

En portant dans l'expression de $p(u, v)$ en fonction de u, v les valeurs de u et v en fonction de p et T , on aura

$$p = p(u, v) = p[u(p, T), v(p, T)],$$

d'où l'on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial p(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(p, T)}{\partial p} + \frac{\partial p(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(p, T)}{\partial p}, \\ 0 &= \frac{\partial p(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(p, T)}{\partial T} + \frac{\partial p(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(p, T)}{\partial T}. \end{aligned}$$

ici, en tenant compte des expressions de k et de c_p et en posant

$$\Delta = k \frac{\partial v(p, T)}{\partial T} - c_p \frac{\partial v(p, T)}{\partial p},$$

on obtient

$$\Delta \frac{\partial p(u, v)}{\partial v} = - \frac{\partial u(p, T)}{\partial T} = p \frac{\partial u(p, T)}{\partial T} - c_p, \quad \Delta \frac{\partial p(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial v(p, T)}{\partial T}$$

où

$$p \frac{\partial p(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial p(u, v)}{\partial v} dv = \frac{\partial v(p, T)/\partial T}{1} du + \frac{p [\partial v(p, T)/\partial T] - c_p}{1} dv.$$

On aura ainsi

$$dp_1 \left(\frac{\partial v(p, T)/\partial T}{1} \right)_1 du_1 + \left(c_p - p \left[\frac{\partial v(p, T)/\partial T}{1} \right] \right)_1 dv_1,$$

en tenant compte des expressions de du_2 et dv_2

$$dp_2 \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{\partial v(p, T)/\partial T}{1} \right)_2 du_1 + \left(c_p - p \left[\frac{\partial v(p, T)/\partial T}{1} \right] \right)_2 dv_1 - \frac{1}{M_2 A_2} \left\{ [u_1 - u_2 + p_0 (v_1 - v_0)] \frac{\partial v(p, T)}{\partial T} - c_p (v_1 - v_2) \right\}_2 dm,$$

les indices 1 et 2 se rapportant aux phases (I) et (II) à l'état d'équilibre.

De l'équation $dq = du + p dv$, on obtient pour la quantité de chaleur ($q_1 - q_2$) nécessaire pour faire passer l'unité de masse de la substance de température T_0 à sous pression p_0 de l'état I à l'état II,

$$q_1 - q_2 = u_1 - u_2 + p_0 (v_1 - v_2).$$

Ces valeurs des dT et des dp introduites dans l'expression (28) de d^2S conduisent, après réductions faciles, à une expression de la forme

$$d^2S = A du_1^2 + 2 B du_1 dv_1 + 2 C du_1 dm + D dv_1^2 + 2 E dv_1 dm + F dm^2$$

où les coefficients sont les dérivées secondes respectives figurant dans les seconds membres du système d'équations différentielles (22). Nous nous dispensons de reproduire ici les expressions de ces coefficients. Nous nous contentons de remarquer qu'ils sont formés tous avec des quantités qu'on peut obtenir par des mesures directes. On aura ainsi le système d'équations linéaires d'ordre 6

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -A u - B v - C m, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = -B u - D v - E m,$$

$$\frac{d^2m}{dt^2} = -C u - E v - F m,$$

dont l'intégration ne présente pas de difficultés. Les intégrales cherchées correspondent aux trois racines négatives de l'équation algébrique de degré 6 en

Zusammenfassung

In zwei früheren Abhandlungen haben wir uns mit den phänomenologischen Relationen

$$x'_i = \sum_k L_{ik} X_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

beschäftigt, wo x'_i die « Ströme » und X_k die « Kräfte », das heisst die Ableitung von x_i in bezug auf die Zeit t bzw. die partiellen Ableitungen von $(-\Delta S)$ in bezug auf x_k bedeuten und wo (ΔS) der Ausdruck der Entropie in der Nähe des Stabilitätszustandes eines adiabatischen Systems ist.

Für $n = 2$ haben wir gezeigt, dass die phänomenologische Relation (1) ein System erster Integrale von dem Gleichungssystem

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ist.

Hier betrachten wir den Fall, wo n irgendeine ganze positive Zahl bedeutet und zeigen in dem Falle, wo (ΔS) der reduzierte Ausdruck

$$\Delta S = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} g_{ik} x_i x_k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

der Entropie bedeutet, dass die Lösung des Systems (1), das ein lineares System n -ter Ordnung ist, nur n Integrationskonstanten enthält, welche die Anfangswerte von $x_i(t)$ willkürlich zu wählen gestatten. Nun müssen aber die Werte von

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^n k_j e^{r_j t},$$

für $t = +\infty$, gleich Null sein, und folglich müssen alle n Werte von r_j negativ sein. Da die r_j Funktionen der L_{jk} sind, so erscheinen die L_{ik} als Elemente, die den Charakter des irreversiblen Prozesses bestimmen und n neue Bedingungen ergeben, was der Grundannahme widerspricht, dass die x_i die einzigen unabhängigen Variablen sind, die den Zustand des Systems bestimmen.

Im Gegensatz jedoch zu dem ist die Lösung des Gleichungssystems (2) n -ter Ordnung (2) von der Gestalt:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{2n} C_j \eta_j e^{r_j t}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

wo nun die r_j die $2n$ Wurzeln der säkularen Gleichung (2) n -ten Grades

$$\begin{vmatrix} g_{11} - r^2 & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} - r^2 & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} - r^2 \end{vmatrix} = 0$$

sind und nur von den g_{ik} abhängen. Da $\sum g_{ik} x_i x_k$ eine positiv definite quadratische Form ist, sind alle Wurzeln reell: n positiv und n negativ. Setzt man nun an die Stelle von C_j die den positiven Wurzeln entsprechen, gleich Null, so bekommt man eine Lösung $x_i(t)$, die nur n Integrationskonstanten enthält, welche gestatten, die Anfangswerte x_i^0 willkürlich zu wählen, ausserdem ist hier $x_i(+\infty) = 0$.

Die Elimination der $C_j e^{r_j t}$ aus $x_i(t)$ und aus den mit (3) gebildeten Werten von X_k ($k = 1, 2, \dots, n$) führt zu den phänomenologischen Relationen (1), wobei die L_{ik} konstante Grössen sind, die nur von den g_{ik} abhängen.

Es wird weiter gezeigt, dass auch in dem Falle, wo (ΔS) alle Potenzen der x_i enthält, die phänomenologischen Relationen (1) eine Folge von (2) sind, wo nun die L_{ik} auch von t abhängige Glieder enthalten.

Von diesem Standpunkt aus sind die Fourier-Formeln für den Wärmeaustausch abgeleitet und die Gleichungen (2) auf die Phasentheorie (zwei Komponenten) angewendet.

Reçu le 20 février 1953.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

Note on Two-Dimensional Indentation Problems of a Non-Isotropic Semi-Infinite Elastic Medium

By BIBHUTIBHUSAN SEN, Chandernagore, India

Introduction

Rectangular indentation on the boundary of a semi-infinite isotropic solid was considered by SADOWSKY (1928), and indentations of various shapes for such solids were discussed by SNEDDON (1951) who obtained the result in each case by solving dual integral equations. It was, however, shown by the author (SEN, 1946) that in cases of rigid punches on the straight edge of an isotropic semi-infinite plate, the solutions could be easily obtained by proper choice of complex functions in terms of which the stresses and displacements were expressed. In this paper, this particular method has been applied to solve the problem of an approximately circular indentation on the straight boundary of a semi-infinite plate having a simple form of aeolotropy. The extension of the method to other forms of indentations and more general types of aeolotropy is not difficult.

1. Stress-Strain Relations and the Expression for the Stress Function

Let the origin be taken on the straight edge along which the axis of x is taken. The axis of y is drawn into the plate perpendicular to the edge. In the material considered we take

$$\left. \begin{aligned} E_1, E_2 &= \text{YOUNG's moduli in } x \text{ and } y \text{ directions respectively,} \\ \sigma_1 &= \text{Ratio of the contraction parallel to } x\text{-axis to the extension parallel to } y\text{-axis,} \\ \sigma_2 &= \text{Ratio of the contraction parallel to } y\text{-axis to the extension parallel to } x\text{-axis,} \\ \mu &= \text{Modulus of rigidity associated with the directions of } x \text{ and } y. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

We further assume that

$$\frac{\sigma_1}{E_2} = \frac{\sigma_2}{E_1} = k, \quad (1.2)$$

say, a relation which holds good in a material like wood.

The stress-strain relations are

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= E^{-1} \widehat{x} \widehat{x} - k \widehat{y} \widehat{y}, \\ e_{yy} &= -k \widehat{x} \widehat{x} + E_2^{-1} \widehat{y} \widehat{y}, \\ e_{xy} &= \mu^{-1} \widehat{x} \widehat{y}. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Equations of equilibrium in the absence of body forces are satisfied if we write

$$\widehat{x} \widehat{x} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \widehat{y} \widehat{y} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad \widehat{x} \widehat{y} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}. \quad (1.4)$$

From the relations (1.3), (1.4), and the compatibility equation

$$\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (1.5)$$

we obtain the equation satisfied by χ as

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + 2M \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial \eta^4} = 0 \quad (1.6)$$

in which

$$2M = (E_1 E_2)^{1/2} [\mu^{-1} - 2k], \quad \eta = \varepsilon y, \quad \varepsilon = [E_1 E_2^{-1}]^{1/4}. \quad (1.7)$$

Hence we can write

$$\chi = \operatorname{Re}[F_1(x + i\alpha\eta) + F_2(x + i\beta\eta)], \quad (1.8)$$

where

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} &= \text{real part}, \quad i = \sqrt{-1}, \\ \alpha &= [M + (M^2 - 1)^{1/2}]^{1/2}, \quad \beta = [M - (M^2 - 1)^{1/2}]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Finally putting

$$\gamma_1 = \alpha \varepsilon \quad \text{and} \quad \gamma_2 = \beta \varepsilon, \quad (1.10)$$

we get

$$\chi = \operatorname{Re}[F_1(x + i\gamma_1 y) + F_2(x + i\gamma_2 x)]. \quad (1.11)$$

By using the relations (1.4) expressions for the stresses can now be deduced from the above result¹⁾.

2. Method of Solution

In the particular type of problems under consideration, we shall have $\widehat{y} \widehat{y} = 0$ when $y = 0$. Hence assuming

$$\chi = \operatorname{Re}[\gamma_2 F(x + i\gamma_1 y) - \gamma_1 F(x + i\gamma_2 y)], \quad (2.1)$$

we can write (cf. SEN, 1939)

$$\left. \begin{aligned} \widehat{x} \widehat{y} &= \operatorname{Re}[i\gamma_1 \gamma_2 \{F''(z_2) - F''(z_1)\}], \\ \widehat{y} \widehat{y} &= \operatorname{Re}[\gamma_2 F''(z_1) - \gamma_1 F''(z_2)], \\ \widehat{x} \widehat{x} &= \operatorname{Re}[\gamma_1 \gamma_2^2 F''(z_2) - \gamma_2 \gamma_1^2 F''(z_1)], \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

¹⁾ For materials like wood which we have considered here, γ_1 and γ_2 will be real positive quantities.

where dashes denote differentiation with respect to arguments, and

$$z_1 = x + i \gamma_1 y \quad \text{and} \quad z_2 = x + i \gamma_2 y. \quad (2.3)$$

Neglecting the rigid body displacements, we have the components of displacements in the x and y directions as

$$\left. \begin{aligned} u &= \operatorname{Re} [-(\gamma_1^2 E_1^{-1} + k) \gamma_2 F'(z_1) + (\gamma_2^2 E_1^{-1} + k) \gamma_1 F'(z_2)], \\ v &= \operatorname{Re} [i (\gamma_1 \gamma_2)^{-1} \{ (k \gamma_2^2 + E_2^{-1}) \gamma_1^2 F'(z_2) - (k \gamma_1^2 + E_2^{-1}) \gamma_2^2 F'(z_1) \}]. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

For indentation problems, boundary conditions to be satisfied along $y = 0$ are

$$\widehat{x}\widehat{y} = 0, \quad \widehat{y}\widehat{y} = 0 \quad (|x| > a), \quad v = v_0(x) \quad (|x| < a). \quad (2.5)$$

Moreover stresses should vanish at an infinite distance from the boundary. Putting $z = x + i y$, it is found that the problem reduces to the determination of an analytic function $F'(z)$ of z such that

$$\frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{\gamma_1 \gamma_2 E_2} [\operatorname{Re} \{ i F'(z) \}]_{y=0} = v_0(x), \quad |x| < a \quad (2.6)$$

and

$$(\gamma_2 - \gamma_1) [\operatorname{Re} F''(z)]_{y=0} = 0, \quad |x| > a. \quad (2.7)$$

If the forms of $F'(z)$ and $F''(z)$ are known, corresponding functions of z_1 and z_2 can be written down by mere substitution, and the expressions for the components of stress and displacement can be easily deduced.

3. Approximately Circular Indentation by a Rigid Punch on the Boundary

Let

$$(\gamma_2 - \gamma_1) F''(z) = - \frac{2P}{\pi a^2} [\sqrt{a^2 - z^2} + i z]. \quad (3.1)$$

Then

$$\left. \begin{aligned} (\widehat{y}\widehat{y})_{y=0} &= (\gamma_2 - \gamma_1) [\operatorname{Re} F''(z)]_{y=0} \\ &= - \frac{2P}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2} \quad |x| < a, \\ &= 0 \quad |x| > a. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

The total load on the pressed portion is of magnitude

$$\frac{2P}{\pi a^2} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = P. \quad (3.3)$$

By integration, we have from (3.1).

$$(\gamma_2 - \gamma_1) F'(z) = - \frac{P}{\pi a^2} \left[z \sqrt{a^2 - z^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{z}{a} + i z^2 \right] + \text{const},$$

so that

$$\left. \begin{aligned} v_0(x) &= \frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{\gamma_1 \gamma_2 E_2} (\operatorname{Re} \{ i F'(z) \})_{y=0} \\ &= - \frac{P}{\pi a^2} \cdot \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 E_2} x^2 + C, \quad \text{when } |x| < a. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Assuming that $v_0(x) = 0$ when $x = \pm a$ we shall have

$$v_0(x) = \frac{P}{\pi a^2} \cdot \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 E_2} (a^2 - x^2). \quad (3.5)$$

For the value of $F''(z)$ assumed in (3.1) all stress components will tend to zero as $y \rightarrow \infty$. The boundary curve of the indentation will be circular since the curvature

$$\frac{1}{R} = -\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = \text{a constant quantity.}$$

REFERENCES

- M. SADOWSKY, *Z. angew. Math. Mech.* **8**, 107 (1928).
 B. SEN, *Bull. Calcutta math. Soc.* **38**, 117 (1946).
 B. SEN, *Philos. Mag.* [7] **27**, 596 (1939).
 I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1951), Art. 49.

Zusammenfassung

Es wird ein Lösungsverfahren besprochen für das Problem der elastischen, längs ihres Randes durch einen starren Stempel belasteten Halbebene. Die Methode wird für einen einfachen Fall von Anisotropie am Beispiel eines Stempels mit annähernd kreisbogenförmigem Rand illustriert.

(Received: August 17, 1953.)

Ein Oszillationssatz für algebraische Eigenwertprobleme

VON FRANK WILLIAM SINDEN, Zürich¹⁾

Die vorliegende Mitteilung befasst sich mit dem Problem, die Oszillationssätze, wie sie für Differentialgleichungs-Eigenwertaufgaben gelten, sinngemäss auf gewisse algebraische Näherungsprobleme zu übertragen. Die Näherung wird nach Art der Differenzenrechnung vorgenommen. Die Komponenten des Näherungsvektors sollen also eine Tabelle der entsprechenden Funktion darstellen. An Stelle von Aussagen über die Anzahl der Nullstellen einer Eigenfunktion treten Aussagen über die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge der Komponenten eines Eigenvektors.

Definition. Eine Matrix A heisst *variationsvermindernd*²⁾, wenn für jeden Vektor \mathbf{x} der transformierte Vektor $\eta = A \mathbf{x}$ immer weniger oder gleich viele Zeichenwechsel wie \mathbf{x} selbst aufweist.

Hauptsatz. Man betrachte das Eigenwertproblem

$$A \mathbf{x} = \mu D \mathbf{x}, \quad (1)$$

wo D eine positive Diagonalmatrix ist (alle $d_{ii} > 0$) und wo A symmetrisch und

¹⁾ Institut für angewandte Mathematik der ETH.

²⁾ I. SCHOENBERG, Über variationsvermindernde lineare Transformationen, *Math. Z.* **32**, 321. (1930).

positiv definit ist. A sei noch variationsvermindernd, und alle ihre kodiagonalen Elemente $a_{i,i+1}$, $a_{i,i-1}$ seien verschieden von Null. Es gilt dann für die charakteristischen Zahlen:

$$\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n > 0.$$

und die Eigenvektoren nach der entsprechenden Reihenfolge geordnet, so hat der k -te Eigenvektor genau $k-1$ Zeichenwechsel.

Zusatz. Ist A variationsvermehrend und gelten alle übrigen Voraussetzungen des Satzes, so hat der k -te Eigenvektor genau $n-k$ Zeichenwechsel.

Da die Eigenschaft «variationsvermindernd» im Grunde genommen allgemeiner Art ist, scheint die Vermutung plausibel, dass dieser Satz auch auf Integralgleichungen verallgemeinert werden könnte. Eine solche Verallgemeinerung wird jedoch in dieser Arbeit nicht unternommen.

Mit Hilfe der Tatsache, dass die Folge

$$a_1 y_1, a_2 (y_2 - y_1), a_3 (y_3 - y_2), \dots, a_n (y_n - y_{n-1}), -a_{n+1} y_n$$

(sämtliche $a_i > 0$) immer mehr Zeichenwechsel als die Folge y_1, y_2, \dots, y_n aufweist¹⁾, kann man durch Iteration und durch Wahl von geeigneten vorzuschreibenden «Randbedingungen» allgemeinere Differenzenoperatoren konstruieren, welche die Voraussetzungen des Satzes erfüllen. Als Beispiel betrachte man das Eigenwertproblem des transversal schwingenden, inhomogenen Stabes. Im Inneren eines Grundintervalls (a, b) gelte

$$(p y'')'' = \lambda q y, \quad p(x) > 0, \quad q(x) > 0,$$

und an jedem Ende seien genau zwei von den vier Funktionen $y, y', p y'', (p y'')'$ gleich Null. Ist dieses Problem auch noch selbstadjungiert und positiv definit, so kann man es nach der eben angedeuteten Methode durch ein Differenzeigenwertproblem approximieren, welches ein oszillatorisches Eigenvektorensystem besitzt.

Ist eine Matrix A variationsvermindernd, so ist die Matrix A^* , die man aus A durch Multiplikation aller geradzahigen Zeilen und aller geradzahigen Spalten mit (-1) erhält, variationsvermehrend. A und A^* besitzen dieselben charakteristischen Zahlen. Diese «Schachbrett-Transformation» kann zum Beweis des Satzes und zur Herstellung weiterer Beispiele benutzt werden.

Zur numerischen Berechnung von Eigenwerten stehen verschiedene «Einschliessungssätze» zur Verfügung. Diese geben Schranken an, die mindestens einen Eigenwert eingrenzen. Es wird jedoch nichts darüber ausgesagt, der wieviele Eigenwert durch diese Schranken eingegrenzt ist. Der folgende Satz, der eine Modifikation des Collatzschen Einschliessungssatzes²⁾ darstellt, liefert im Gegensatz dazu Schranken für einen bestimmten, durch seine Nummer gekennzeichneten Eigenwert.

Für das Eigenwertproblem (1) seien die Voraussetzungen des Hauptsatzes bzw. des Satzes gültig. Der Versuchsvektor $u = (u_1, \dots, u_n)$ habe genau $k-1$ bzw. $n-k$ Zeichenwechsel. Aus u und dem transformierten Vektor

$$v = A u = (v_1, \dots, v_n)$$

¹⁾ G. PÓLYA und G. SZEGŐ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Bd. II (Springer, Berlin 1925 [Grundlehren der mathematischen Wissenschaften]), siehe Abschnitt V, Kapitel I, Aufgaben 7 und 15. (Siehe auch Aufgabe 13.)

²⁾ L. COLLATZ, *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen* (Geest und Portig KG., Leipzig 1949), S. 289.

bilde man die Quotienten

$$q_i = \frac{v_i}{u_i d_{ii}}$$

Sind sämtliche q_i positiv, so liegt die k -te charakteristische Zahl zwischen $\text{Max}(q_i)$ und $\text{Min}(q_i)$.

Auch den Collatzschen Einschliessungssatz für Differentialgleichungen¹⁾ kann man mit Hilfe der klassischen analytischen Oszillationssätze in analoger Weise modifizieren. Bei den anderen bekanntesten Einschliessungsverfahren, namentlich bei denen, die sich auf den Rayleighschen Quotienten beziehen, ist jedoch eine solche Modifikation nicht ohne weiteres möglich.

Summary

Conditions on a linear algebraic eigenvalue problem are given, under which there are exactly $k - 1$ changes of sign in the sequence of components of the k -th eigenvector. This is analogous to the oscillation theorems of differential equations. A class of difference equations which satisfies these conditions is defined. Finally a modification of a method of COLLATZ is given, by means of which upper and lower bounds for the k -th eigenvalue may be derived from a trial vector having $k - 1$ sign changes in the sequence of its components. This paper is merely a summary of results; no proofs are given.

(Eingegangen: 29. September 1953.)

Varia – Miscellaneous – Divers

Jahrestagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik vom 20. bis 24. April 1954, in München

Die Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik (GaMM) wird ihre nächste Jahrestagung in *München* in der Zeit vom 20. bis 24. April 1954 veranstalten. Die örtliche Tagungsleitung wird in Händen von Prof. Dr. J. HEINOLD (Technische Hochschule München) liegen.

H. GÖRTLER

Internationale Tagung über Halbleiter in Amsterdam vom 29. Juni bis 3. Juli 1954

Die Niederländische Physikalische Gesellschaft, mit Unterstützung der Union internationale de Physique pure et appliquée und der Unesco, hat die Absicht vom 29. Juni bis 3. Juli 1954 in Amsterdam eine *Internationale Tagung über Halbleiter* durchzuführen.

Die folgenden Forscher (von denen zwei unter Vorbehalt) haben zugesagt Hauptvorträge zu übernehmen: J. BARDEEN, W. H. BRATTAIN, H. B. G. CASIMIR, F. A. KRÖGER, D. POLDER, M. SCHÖN, W. SHOCKLEY, R. A. SMITH, H. VINK, H. WELKER. Hauptthemen der Tagung sind: Volumenrekombination

¹⁾ L. COLLATZ, a. a. O., S. 126.

Oberflächenleitfähigkeit; Oberflächenhaftstellen; Oberflächenrekombination, intermetallische Verbindungen; das Bändermodell für polare und nichtpolare Halbleiter; Photoleitfähigkeit in Halbleitern wie PbS, PbTe, PbSe, ZnS, CdS; die Anwendung allgemeiner physikalischer und chemischer Gesetze auf die Herstellung von Halbleitern mit spezifischen Eigenschaften.

Ferner sind Fachausschuss-Sitzungen vorgesehen zur näheren Erörterung von Einzelheiten. In diesen Sitzungen können auch kleinere Referate (15 Minuten) aus den verschiedenen Gebieten gehalten werden. Im weiteren sind einige Ausflüge beabsichtigt.

Interessenten, welche dieser Tagung beiwohnen möchten oder einen Beitrag zu geben wünschen, werden gebeten, sich so bald wie möglich an den Tagungssekretär (Dr. H. J. VINK, Floralaan 142, Eindhoven, Holland) zu wenden.

H. J. VINK

Errata

Experimentelle Untersuchung von Vereisungserscheinungen. Von DOMENIC MELCHER (ZAMP 2, Fasc. 6, 421 [1951]).

Auf Seite 432 wird die während einer Vereisung an einem Kabel auftretende Temperaturerhöhung berechnet.

Der Wärmeentzug durch den Luftstrom ergibt sich rechnerisch zu

$$Q_L = \alpha f \cdot 1T \sim 65,2 \cdot 10^{-3} \text{ cal s}^{-1},$$

wobei für $1T$ die ohne Wärmeabfluss pro Sekunde zu erwartende Temperaturerhöhung eingesetzt wurde. Bei der Umrechnung der Wärmeübergangszahl ist leider ein Fehler im Betrag von zwei Zehnerpotenzen unterlaufen.

Q_L fällt also hundertmal kleiner aus, als angegeben, und wird nicht von gleicher Grössenordnung wie die frei werdende Kristallisationswärme Q_K . Damit wird im stationären Fall die gesuchte Temperaturerhöhung richtig von der Grössenordnung einiger Zehntelgrad.

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Statik der rahmenartigen Tragwerke. Von J. PIRLET (Springer-Verlag, Berlin 1951). 168 S., 80 Abb.; DM 24.-.

Der Verfasser behandelt die Berechnung von «rahmenartigen Tragwerken», die sich aus elastisch eingespannten Balken oder Stäben zusammensetzen und deren Knotenpunkte wohl elastisch verdrehbar, aber unverschieblich sind. Die Berechnung dieser hochgradig statisch unbestimmten Systeme wird schrittweise durchgeführt; wird nur ein einziges Balkenfeld als belastet betrachtet, so ergeben sich seine beiden Einspannmomente aus den «Einspannungsgraden» der beiden Stabenden, die ihrerseits schrittweise, von den Auflagerpunkten ausgehend, berechnet werden können. In umgekehrter Richtung kann anschliessend die «Fort-

pflanzung» der Momente gefunden werden. Aus dem Umstand, dass die Einspanngrade eines Feldes durch kleine Änderungen der Einspanngrade der anschliessenden Stäbe nur unwesentlich beeinflusst werden, lässt sich ein vereinfachtes Berechnungsverfahren durch angenäherte Bestimmung der Einspanngrade aufstellen. Das Erfreuliche an diesem Buche liegt darin, dass es auf den Grundlagen der klassischen Baustatik aufbauend zu einer klaren, übersichtlichen und strengen Berechnung der untersuchten besonderen Tragwerksform gelangt.

F. Stüssi

Elasticity in Engineering. By ERNEST E. SECHLER (John Wiley & Sons, New York, 1952). 419 Seiten, mit vielen Abbildungen; \$8.50.

Dieses Buch – es ist das neueste aus der CALCIT-Serie (Guggenheim Aeronautical Laboratory, California Institute of Technology) – ist für Ingenieure bestimmt, die auf allen Gebieten der höheren Festigkeitslehre arbeiten.

Das Buch besteht aus drei Teilen. Im ersten Teil werden die gebräuchlichen Beziehungen in verschiedenen Koordinatensystemen hergeleitet, welche für zwei- und dreidimensionale Probleme das Gleichgewicht, die Verträglichkeit und die elastische Energie ausdrücken. Ferner wird der Begriff der Spannungsfunktion eingeführt. Der zweite Teil befasst sich mit Systemen, die sich im stabilen Gleichgewicht befinden. Hier werden zweidimensionale Probleme, Balkenbiegung, statisch unbestimmte Fachwerke, Torsion von Wellen, behandelt und die Grundgleichungen der Platten- und Schalentheorie diskutiert. Der dritte Teil umfasst Instabilitätsprobleme bei gedrückten Säulen, gedrückten und gebogenen Balken sowie bei Platten und Schalen.

Das Buch setzt offensichtlich wenig Vorbildung voraus. Obschon die Auswahl des Stoffes im allgemeinen dem Zweck entspricht, scheint es dem Referenten, dass gewisse elementare Dinge, wie der Mohrsche Satz über die elastische Linie und die Lösung einfacher statisch unbestimmter Probleme, eher in ein Buch über elementare Festigkeitslehre gehören.

Das Buch ist dadurch gekennzeichnet, dass die Zwischenrechnungen bei der Aufstellung einer Gleichung oder bei der Lösung eines Beispiels stets *in extenso* aufgeführt werden. Andererseits wäre es zu begrüßen, wenn der begleitende Text die physikalischen Aspekte besser herausarbeiten würde. Die am Ende jedes Kapitels zusammengestellten Übungsaufgaben sind dagegen äusserst wertvoll.

E. P. Popov

Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers. Von K. FEDERHOFER (Springer-Verlag, Wien 1950/51). I. Teil: *Statik*, 130 S., 243 Abb.; sFr. 10.—. II. Teil: *Kinematik und Kinetik des Punktes*, 103 S., 105 Abb.; sFr. 10.—. III. Teil: *Kinematik und Kinetik starrer Systeme*, 139 S., 191 Abb.; sFr. 10.—.

Die vorliegende Aufgabensammlung zur Mechanik ist in drei getrennt erscheinene Teile gegliedert, von denen der erste der Statik, der zweite der Kinematik und Kinetik des Punktes und der dritte der Kinematik und Kinetik starrer Systeme gewidmet ist. Jeder Teil enthält getrennt die Aufgaben und ihre Lösungen, wobei den letzteren eingehende Erläuterungen über den zweckmässigen Lösungsweg, die stellenweise den Charakter eigentlicher Darstellungen der behandelten Probleme annehmen, vorangestellt werden. Die erfolgreiche Beherrschung und Anwendung der Lehren der Mechanik setzt eine selbständige Erarbeitung des Stoffes voraus; dazu kann die Beispielsammlung K. FEDERHOFERS,

ie im Laufe von drei Jahrzehnten erfolgreicher Lehrtätigkeit entstanden ist, eine wertvolle Hilfe sein.

F. Stüssi

Grundlagen der Elektroakustik. Von W. REICHARDT (Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig KG., Leipzig 1952). 464 S., 311 Abb.; DM 32.—.

Das vorliegende umfangreiche Werk ist ein eigentliches Handbuch der Elektroakustik und bietet mehr als nur eine Einführung in die Grundlagen dieses Gebietes, wie im Vorwort allzu bescheiden bemerkt ist. Dies zeigt schon das umfangreiche Literaturverzeichnis mit über 400 Hinweisen, das allerdings keinen Anspruch auf Vollständigkeit machen kann und will.

Der erste Teil des Buches behandelt die Grundlagen der physikalischen Akustik. Gleich zu Anfang wird vorgeschlagen, den allgemein bekannten und gebräuchlichen Begriff der akustischen Impedanz durch den Ausdruck «Schallwellenstandwert» zu ersetzen; die selten verwendete akustische Admittanz wird «Schallwellenmitgang» genannt. Die Wünschbarkeit, eine international eingetragene und bewährte Terminologie durch rein deutsche neue Ausdrücke zu ersetzen, kann füglich bezweifelt werden. Ferner ist der Versuch, die Schalldämmung zusammen mit Reflexion, Beugung, Brechung und Ausbreitung in der Atmosphäre zu behandeln, nicht nur aus wissenschaftlichen, sondern vor allem auch aus didaktischen Gesichtspunkten abzulehnen. Der Zusammenhang des Kapitels «Nichtlinearitäten», das den ersten Teil des Buches abschliesst, mit der übrigen Materie ist schwer einzusehen.

Als weiterer Hauptabschnitt folgt «Das Schallempfinden des Menschen», in dem sich schöne Darstellungen über den Aufbau und die wichtigsten Eigenschaften des Ohres finden. Trotz dem recht beachtlichen Umfang des Kapitels «Lautstärke» vermisst man aber Angaben über die praktisch wichtige Lautstärkeberechnung sowie besonders auch über Verständlichkeitsberechnungen, die heute in der Technik mehr und mehr Eingang finden. Die Darstellung der resultierenden Lautstärke mehrerer Schallquellen ist leider bei der viel zu primitiven Vorstellung einer energiemässigen Addition stehengeblieben.

Der vierte Teil des Buches ist den Schallwandlern gewidmet, wobei zuerst die Kolbenmembran, insbesondere ihre Richtwirkung zur Sprache kommt. Ein umfangreiches Kapitel, «Mechanische Schwingungsgebilde», behandelt im wesentlichen nur den schwingenden Massenpunkt, wobei die mechanisch-elektrischen Analogien sehr breit diskutiert werden. Leider fehlt die Behandlung von kontinuierlichen Schwingungsgebilden, wie zum Beispiel die gespannte Membran und die eingeklemmte Platte, die im Wandlerbau wichtige Elemente sind. Anschliessend folgen die Kontaktmikrophone, das Telephon, der elektromagnetische Lautsprecher, die elektrodynamischen Mikrophone in ihren verschiedenen bekannten Varianten, der elektrodynamische Lautsprecher, das Kondensatormikrophon und schliesslich das Kristallmikrophon, eine Systematik der Behandlung, die nicht immer glücklich ist.

Im Abschnitt «Mikrophoneinsatz» vermittelt der Verfasser offensichtlich eigene wertvolle Erfahrungen; ganz am Rande wird hier auch die statistische Raumakustik noch gestreift. Auch das folgende Kapitel, «Beschallungstechnik», bringt viel wertvolles Material, wobei besonders die in den letzten Jahren immer häufiger verwendeten Strahlergruppen erwähnt seien. Schade, dass hier nicht auch der sogenannte «Haas-Effekt» aufgeführt wird, der eine der wichtigsten neueren Erfahrungen auf diesem Gebiete ist.

Das Buch schliesst mit der Behandlung der Schallaufzeichnung, wobei das Schwergewicht richtigerweise auf dem Grammophon und dem Magnetophon liegt.

Im ganzen Buche wird konsequent das Giorgi-Maßsystem angewendet, über das eine vorzügliche klare und kurze Einleitung vorhanden ist. Der schon eingangs erwähnte Dualismus zwischen Handbuch einerseits und elementaren Grundlagen andererseits muss zu einigen Widersprüchen führen, die die Lektüre des Buches erschweren. Seine didaktischen Mängel lassen es als Lehr- und Studienmittel weniger geeignet erscheinen, dagegen wird es dem in der Praxis stehenden Ingenieur und Techniker ein sehr willkommenes Hilfsmittel sein und ihm wertvolle Unterlagen und Anregungen vermitteln.

W. Furrer

Dynamik des Bogenträgers und Kreisringes. Von K. FEDERHOFF (Springer-Verlag, Wien 1950). 179 S., 35 Abb.; sFR. 23.50.

Der Verfasser unternimmt es hier, zu untersuchen, wie sich die Besonderheiten der Biegung und Verdrehung, wie sie bei unsymmetrischen offenen Querschnitten auftreten und die durch den Begriff des Schubmittelpunktes charakterisiert werden können, auf die Eigenschwingungen gekrümmter Stäbe auswirken. Es liegt in den Schwierigkeiten der Integration der bei der mathematischen Formulierung des Problems auftretenden Differentialgleichungen begründet, dass die Untersuchung von einschränkenden Voraussetzungen (kreisförmige Bogenachse, konstanter Querschnitt) ausgehen muss; die Einflüsse von Abweichungen gegenüber diesen Voraussetzungen können ergänzend untersucht werden. Das Buch FEDERHOFFS stellt eine willkommene erste Verbindung zwischen der verallgemeinerten Biegelehre und der Dynamik des gekrümmten Stabes her.

F. Stüssli

Theoretical Nuclear Physics. By J. M. BLATT and V. F. WEISSKOPF (John Wiley & Sons, New York; Chapman & Hall, London, 1952). 864 pp.; \$12.50.

Von einem grundsätzlichen Verständnis der im Kern wirkenden Kräfte sind wir noch weit entfernt, und eine Deutung der Phänomene ist deshalb nicht, wie etwa in der Atomphysik, ein rein mathematisches Problem auf Grund wohldefinierter physikalischer Vorstellungen. Vielmehr müssen für jeden Problemkreis eigene Modelle erdacht werden, die eine möglichst weitgehende Beschreibung der betreffenden Phänomene erlauben, deren Zusammenhang jedoch oft dunkel ist und einer späteren Synthese überlassen bleiben muss. Aus diesen die bewährte und hoffnungsvollen herauszuschälen und in eine einheitliche Darstellung zu gießen, ist ein Unterfangen, das nur bei tiefgehender Kenntnis des Gebietes erfolgreich sein kann. Den Verfassern des vorliegenden Buches ist das völlig gelungen; sie haben ein Werk geschaffen, das sowohl als Lehrbuch für Studierende wie als Nachschlagewerk für experimentelle und theoretische Physiker einzustehen.

Das Buch gliedert sich im wesentlichen in vier Teile. In einem ersten Teil (Kapitel I bis VII und XIV) wird, in induktivem Aufbau von einfacheren zu komplizierteren Systemen, versucht, möglichst viel Information über die Kernkräfte zu gewinnen. Theoretische Spekulationen über die Natur dieser Kräfte (im Sinne der Mesontheorie) fehlen, da der heutige Stand der Feldtheorien es nicht gestattet, irgendwelche quantitativen Folgerungen aus solchen zu ziehen. Konsequenterweise ist auch eine Diskussion der experimentellen Tatsachen der Mesonenphysik unterblieben; das Buch beschränkt sich auf das Gebiet kleiner Energien (< 50 MeV), mit Ausnahme eines Kapitels über die Nukleonstreuung bei hohen Energien, welche eines der Haupträtsel der Kernphysik bildet. Ein zweiter Teil (Kapitel VIII bis XI) behandelt die allgemeine Theorie der Kernreaktionen. Ausser einigen exakten Theoremen handelt es sich hierbei vor allen

in eine phänomenologische Beschreibung der Tatsachen auf Grund einiger funktamentaler Annahmen (Compoundkern). Ein dritter Teil (Kapitel XII) enthält die Theorie der Wechselwirkung von Kernen mit dem elektromagnetischen Strahlungsfeld (γ -Strahlen). Dieser Abschnitt ist besonders bemerkenswert, da er viel bisher unpubliziertes Material enthält, welches zum Teil auch Irrtümer älterer Arbeiten klarstellt. Ausserdem zeichnet er sich durch einen besonders eleganten Formalismus zur Beschreibung von Multipolstrahlung aus. Der vierte Teil endlich (Kapitel XIII) behandelt den β -Zerfall. Auch hier ist viel Konfusion in der älteren Literatur vermieden durch konsequente Unterscheidung der «verbotenen» und der «relativistischen» Übergänge.

Das ganze Werk ist leicht zu lesen, und trotz weitgehend strenger mathematischer Behandlung werden dem Leser lange formale Rechnungen erspart. Eventuell durch Vorführen vereinfachter, aber typischer Beispiele. (Ob allerdings die weitere Tendenz, jedes formale Resultat durch eine «anschauliche» Plausibilitätsbetrachtung nochmals herzuleiten, nicht etwas übertrieben wird, mag Geschmackssache sein). Ausführliche Tabellen der verwendeten Symbole erleichtern das Nachschlagen sehr. Das Buch wird wohl auf Jahre das Standardwerk über theoretische Kernphysik bleiben.

R. Schafroth

Physik dünner Schichten, Teil I: Herstellung, Dickenmessung und optische Eigenschaften. Von HERBERT MAYER (Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft mbH., Stuttgart 1950). 326 S., 142 Abb.; sFr. 37.50.

Dünne Schichten spielen heute auf vielen Gebieten der Technik eine bedeutende Rolle. Als Beispiel seien die reflexvermindernden Schichten in der Optik genannt. Die Vergütung von Objektiven ist in den letzten Jahren zur Selbstverständlichkeit geworden. Insbesondere bei Objektiven mit grösserer Linsenzahl ist diese Vergütung von grosser Bedeutung, indem sie einen beträchtlichen Lichtgewinn mit sich bringt.

Im vorliegenden Werk, Band 4 der Sammlung «Physik und Technik», wird erstmalig eine zusammenfassende Darstellung der Physik der dünnen Schichten gegeben.

Nach einem Überblick über die historische Entwicklung und einer Bestimmung des Begriffes «dünne Schicht» wird im zweiten Kapitel eine Übersicht über die wichtigsten Verfahren zur Herstellung dieser Schichten gegeben: Aufdampfen, Kathodenzerstäubung, Adsorption usw.

Im nächsten Kapitel werden die Verfahren zur Messung der Dicke dünner Schichten behandelt: mechanische Messung, elektrische Methoden, chemische Verfahren und optische Methoden. Die letzten Methoden umfassen dabei: Interferenzfarben-, Interferenzstreifen-, Intensitäts- und Polarisationsmethode. Im gleichen Kapitel wird ferner die wichtige Grösse der Oberflächenrauigkeit behandelt.

Im vierten Kapitel werden dann die Grundlagen der Optik dünner Schichten dargestellt und mit den experimentellen Ergebnissen verglichen: homogene Schichten, ihre Reflexions- und Absorptionsvermögen sowie ihre Durchlässigkeit, inhomogene und anisotrope Schichten. Es werden die Methoden zur Bestimmung der optischen Konstanten dieser Schichten dargelegt. Schliesslich geht der Autor auf Anwendung dünner Schichten in der Optik ein: Erhöhung und Verminderung der Reflexion durch dünne Schichten, dünne Schichten als Interferenzfilter sowie als Polarisatoren.

Das Werk ist mit 142 Abbildungen reich illustriert. Es besitzt einen Anhang mit 20 wichtigen Tabellen über Reflexionsvermögen, Absorptions- und Brechungs-

index von häufig verwendeten Metallen. Das Literaturverzeichnis mit über 60 Hinweisen auf Arbeiten auf dem Gebiete dünner Schichten ist sehr vollständig.

Im vorliegenden Werk ist eine klare Darstellung über das wichtige Gebiet der dünnen Schichten gegeben. Wir möchten es jedem, der auf diesem Gebiet tätig ist oder sich in dieses einarbeiten will, voll empfehlen. N. Schaeff

Zur Struktur und Materie der Festkörper. Diskussionstagung der Sektion für Kristallkunde der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft (Springer Verlag, Berlin 1952). 304 S., 95 Abb.; DM 28.60.

Die an der Diskussionstagung der Sektion für Metallkunde der Deutschen Mineralogischen Gesellschaft am 1. und 2. Mai 1951 in Frankfurt am Main gehaltenen Vorträge sowie die zugehörigen Diskussionsbeiträge sind in Buchform herausgekommen. Ähnlich wie der Band *Der feste Körper* der Zürcher Tagung (1938) zeigt dieses Buch einen Querschnitt durch den heutigen Stand der Kenntnisse und Probleme der reinen und angewandten Kristallstrukturforschung. Beiträge zur allgemeinen Symmetrie- und Strukturlehre lieferten P. NIGGLI (*Einführung von Charakterentafeln für Fourier- und Patterson-Analyse*), C. HERMAN (*Translationsgruppen in n Dimensionen*) und R. HOSEMANN (*Versuch einer allgemeinen Interferenztheorie, speziell im Hinblick auf Parakristalle, hochmolekulare und kolloide Stoffe*). Die Wachstumstheorie wurde durch W. KOSSEL beleuchtet (*Beobachtung von Kristallkugeln als Forschungsmittel für Oberflächenvorgänge*) und durch I. N. STRANSKI und Mitarbeiter aufs wertvollste ergänzt mit einer Arbeit über die Verdampfung von Kristallen. Ins Gebiet der Realbauforschung fällt der Beitrag von H. JAGODZINSKI, der die kooperative Fehlordnung in Kristallen theoretisch beleuchtete. Aus der physikalisch-chemischen Kristallforschung berichtete einerseits H. WITTE (*Einfluss der Brillouin-Zonen auf die Eigenschaften von Legierungen*), in der Diskussion durch K. SCHUBERT noch wesentlich ergänzt und andererseits A. SMEKAL, der die aus der Kristallchemie stammenden Erkenntnisse über die Bindungsverhältnisse auf die Gläser anwandte und versuchte, ein bindungsmässige Theorie des Glaszustand-Vorkommens zu geben. Diese kurze Hinweise auf den Inhalt der Einzelkapitel mögen genügen, um zu zeigen, dass hier eine wertvolle Zusammenstellung modernster kristallographisch-physikalisch-chemischer Arbeiten vorliegt, die jedem mit Kristallen arbeitenden Chemiker, Physiker und Mineralogen gewinnbringend sein werden. W. Epprecht

Introductory Nuclear Physics. By D. HALLIDAY (J. Wiley & Sons, Inc. New York, 1950). 558 pp.; \$6.50.

Dieses Buch stellt eine klare und leichtverständliche Einführung in die moderne Kernphysik dar. Es enthält in knapper und einfacher Formulierung sowohl die wichtigsten theoretischen Vorstellungen, die man sich heute über den Aufbau der Kerne sowie den Mechanismus der Kernumwandlungen macht, als auch eine Beschreibung der grundlegenden Experimente, welche zu diesen Vorstellungen geführt haben. Auch die für ein Verständnis der Kernvorgänge unerlässlichen Nachbarggebiete, wie Wechselwirkung zwischen Strahlung und Materie sowie kosmische Strahlen kommen kurz zur Behandlung. Zwei weitere Abschnitte befassen sich mit den experimentellen Methoden zum Nachweis geladener Partikel und Quanten sowie der künstlichen Erzeugung energiereicher Teilchen. Der Leser als solcher kommt für dieses Buch der Studierende mittlerer Semester wie auch der in der Praxis stehende Ingenieur mit physikalischen Interessen in Frage – er fährt damit alles Wesentliche, das er für eine erste Orientierung wie auch für ein nachfolgendes detailliertes Studium auf diesem Gebiet benötigt. H. Wäffle

Rohrströmung mit schwachem Drall

Herrn FR. A. WILLERS zum siebzigsten Geburtstag

Von LOTHAR COLLATZ, Hamburg¹⁾, und HENRY GÖRTLER, Freiburg i. Br.²⁾

Rotationssymmetrische Strömungen zäher Flüssigkeiten mit Drallkomponente um die Symmetrieachse interessieren aus offensichtlichen praktischen Gründen im Hinblick auf strömungstechnische Anwendungen; es wird ihnen aber auch ein grundsätzliches theoretisches Interesse entgegengebracht im Rahmen der gegenwärtigen Bemühungen um die Erforschung dreidimensionaler Strömungsvorgänge in zähen Flüssigkeiten, für die sie einen bereits aufschlussreichen, aber noch verhältnismässig einfachen Sonderfall darstellen. Man besitzt bisher nur einige wenige strenge Lösungen der Navier-Stokesschen oder auch nur – für Strömungen an Wänden bei grossen Reynoldsschen Zahlen – der Grenzschichtgleichungen, welche Strömungen dieser Art darstellen. Darüber hinaus hat man für einige nicht so leicht zugängliche Fälle Zuflucht zu kaum kontrollierbaren Approximationsansätzen nach dem Muster des Pohlhausen-Verfahrens genommen.

Bereits die Berechnung der stationären Strömung mit Drall durch ein gerades Kreisrohr, die noch relativ einfach überschaubar zu sein verspricht, bietet bei näherem Zusehen erhebliche Schwierigkeiten, da sich der Berechnung noch grössere Komplikationen als im bereits approximativ behandelten Fall der drallfreien Rohreinlaufströmung entgegenstellen. Immerhin zeigt sich, dass im Falle hinreichend schwachen Dralls – schwach relativ zur Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Rohrachse und in diesem Sinne linearisierbar in den Bewegungsgleichungen – in erster Näherung eine Kopplung zwischen der Drallkomponente und den anderen Strömungsabweichungen von der sich asymptotisch hinreichend weit stromabwärts einstellenden Poiseuille-Strömung nicht besteht. Der Fall des schwachen Dralls bietet daher einen ersten Zugang. Aufgefasst als der Fall des Absterbens eines Dralls hinreichend weit stromabwärts bildet er den Ausgang für die iterative Berechnung eines stärkeren Dralls weiter stromaufwärts. Auch im Hinblick auf diese weitere Zielsetzung und als Voraussetzung für deren Durchführung wird im folgenden eine sorgfältige Untersuchung des Grenzfalls schwachen Dralls durchgeführt.

¹⁾ Forschungsstelle für praktische Mathematik der Universität.

²⁾ Mathematisches Institut der Universität, Abteilung Angewandte Mathematik.

Die Berechnung des Dralls führt, wie zunächst gezeigt werden soll, auf ein Eigenwertproblem einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Deren Theorie einschliesslich des für die Anwendung interessierenden Entwicklungssatzes wird sodann dargelegt. Für die interessierenden Eigenwerte und Eigenfunktionen werden schliesslich numerische Ergebnisse mitgeteilt. Die Genauigkeit der numerischen Ergebnisse ist nicht so sehr auf das vorerst hier allein behandelte Problem des schwachen Dralls abgestellt, vielmehr bereits auf die höheren Ansprüche einer künftigen Ausweitung der Untersuchung im oben gekennzeichneten Sinne (mit dem Ziel des Anschlusses an eine von einem Anfangsquerschnitt – etwa Rohreinlauf – ausgehende andersartige Entwicklung stromabwärts) zugeschnitten.

1. Grundgleichungen. Grenzfall der Poiseuille-Strömung

Es seien x die axiale, r die radiale und φ die Winkelkoordinate eines Zylinderkoordinatensystems, $r = 0$ die Achse und $r = r_0$ die Mantelfläche des von der zähen Flüssigkeit durchströmten Kreisrohrs. Die Strömungsgeschwindigkeit habe die Komponenten u in x -, v in r - und w in φ -Richtung. Es seien schliesslich p der Druck, ρ die konstante Dichte und ν die konstante kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit.

Bei Voraussetzung eines achsensymmetrischen Strömungsfeldes sind u , v , w und p von φ unabhängig. Die allgemeinen Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung vereinfachen sich dann zu den folgenden vier Grundgleichungen unseres Problems für die unbekannten Funktionen $u(x, r)$, $v(x, r)$, $w(x, r)$ und $p(x, r)$:

$$u u_x + v u_r = -\frac{p_x}{\rho} + \nu \left\{ u_{xx} + u_{rr} + \frac{u_r}{r} \right\}, \quad (1)$$

$$u v_x + v v_r - \frac{w^2}{r} = -\frac{p_r}{\rho} + \nu \left\{ v_{xx} + v_{rr} + \frac{v_r}{r} - \frac{v}{r^2} \right\}, \quad (2)$$

$$u w_x + v w_r + \frac{v w}{r} = \nu \left\{ w_{xx} + w_{rr} + \frac{w_r}{r} - \frac{w}{r^2} \right\}, \quad (3)$$

$$u_x + v_r + \frac{v}{r} = 0, \quad (4)$$

Bei undurchlässigem Rohr sind die Haftbedingungen

$$u = v = w = 0 \quad \text{für} \quad r = r_0 \quad (5)$$

zu erfüllen. Ferner sind geeignete Vorgaben über den Strömungszustand in einem Anfangsquerschnitt $x = x_0$ und ausreichende Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsforderungen zu erfüllen.

An Stellen hinreichend weit stromabwärts vom Anfangs- (etwa Einlauf-) Querschnitt des Rohrs, durch das die Flüssigkeit unter der Wirkung eines Druckgefälles in x -Richtung strömt, werden die radiale Komponente v und die Drallkomponente w unter dem Einfluss der inneren Reibung abgeklungen sein, und man hat asymptotisch

$$v \rightarrow 0, \quad w \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Nach (2) und (4) folgt asymptotisch

$$p_r \rightarrow 0, \quad u_x \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty \quad (7)$$

und somit

$$p \sim p(x), \quad u \sim u(r) \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty. \quad (8)$$

In nullter Näherung für hinreichend grosses x gilt somit nach (1)

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} = -\frac{p_x}{\varrho \nu}. \quad (10)$$

Nach (8) müssen linke und rechte Seite dieser Gleichung konstant sein. Man findet daher durch Integration als nullte asymptotische Näherungslösung für hinreichend weit stromabwärts gelegene Stellen unter Beachtung der Haftbedingung (5)

$$u \sim U(r) = U_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad p \sim P(x) = p_0 - \frac{4 \varrho \nu U_0 x}{r_0^2}, \quad (9)$$

das heisst die bekannte Poiseuille-Strömung, eine exakte Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen für das beiderseits unendlich lange Rohr, für den Fall abweichender Anfangsbedingungen in einem Querschnitt $x = x_0$ der asymptotische Endzustand hinreichend weit stromabwärts von diesem Querschnitt.

2. Ansatz zur ersten Korrektur des Strömungsverlaufs für endliches x

Um das Abklingen der in einem Anfangsquerschnitt $x = x_0$ vorgegebenen Abweichungen von der Poiseuille-Strömung in erster asymptotischer Näherung genügend weit stromabwärts von diesem Querschnitt zu ermitteln, machen wir den Störungsansatz

$$u = U(r) + u^*, \quad v = v^*, \quad w = w^*, \quad p = P(x) + p^*. \quad (10)$$

Einsetzen von (10) in (1), (2), (3) und (4) und nachfolgende Linearisierung hinsichtlich der Störungsgrössen unter der Voraussetzung $|u^*|, |v^*|, |w^*| \ll U_0$

führt auf das System:

$$U u_x^* + U_r v^* = - \frac{p_x^*}{\varrho} + \nu \left\{ u_{xx}^* + u_{rr}^* + \frac{u_r^*}{r} \right\}, \quad (1.1)$$

$$U v_x^* = - \frac{p_r^*}{\varrho} + \nu \left\{ v_{xx}^* + v_{rr}^* + \frac{v_r^*}{r} - \frac{v^*}{r^2} \right\}, \quad (2.1)$$

$$U w_x^* = \nu \left\{ w_{xx}^* + w_{rr}^* + \frac{w_r^*}{r} - \frac{w^*}{r^2} \right\}, \quad (3.1)$$

$$u_x^* + v_r^* + \frac{v^*}{r} = 0. \quad (4.1)$$

Dieses für die erste asymptotische Approximationsordnung geltende lineare System zerfällt offensichtlich: Die Gleichung (3.1) für w^* enthält nicht die jeweiligen u^* , v^* und p^* , und umgekehrt hat w^* keinen Einfluss auf u^* , v^* und p^* in deren Bestimmungsgleichungen (1.1), (2.1), (4.1). In der ersten asymptotischen Näherung ergibt sich also noch keine gegenseitige Beeinflussung des Dralls einerseits und der Geschwindigkeits- und Druckabweichungen von der Poiseuille-Strömung andererseits. (Diese Erscheinung ist offenbar nicht auf die hier allein betrachtete Rohrströmung beschränkt.)

Setzt man nur die Kleinheit der Drallkomponente w voraus, so kann man die Gleichung (2) noch hinsichtlich w linearisieren. Man erkennt, dass dann (1) die so vom Glied $-w^2/r$ befreite Gleichung (2) sowie (4) von w frei sind und als Bestimmungsgleichungen für u , v und p daher wie im drallfreien Fall lauten. Ein schwacher Drall hat also an keiner Stelle des Rohrs einen Einfluss auf die «Hauptströmung» u , v , p . Der schwache Drall (schwach vom Anfangsquerschnitt an) überlagert sich einfach der unveränderten Hauptströmung. Bei bekannten u , v und p lässt er sich nachträglich aus der vollen, in w linearen Gleichung (3) berechnen. Die drallfreie Rohrströmung ist von PUNNIS¹⁾ approximativ berechnet worden unter der Annahme, dass am Einlaufquerschnitt $u = \text{const}$ und $v = 0$ über den ganzen Querschnitt vorgegeben sind. Für diesen und für jeden anderen Fall der Rohrströmung hat die im folgenden durchzuführende Berechnung des Verlaufs eines schwachen Dralls Interesse. Auch wenn der Drall erst hinreichend weit stromabwärts vom Anfangsquerschnitt hinreichend klein ist, interessiert seine Absterbegeschwindigkeit im Vergleich zu dem der Störungsgrößen u^* und v^* der drallfreien Hauptströmung.

PUNNIS und vor ihm für den entsprechenden ebenen Fall der Kanalströmung SCHLICHTING²⁾ haben in ihren Rechnungen eine asymptotische Näherung stromabwärts mit einer grenzschichttheoretisch berechneten Näherung von Einlaufquerschnitt her im mittleren Strömungsbereich mit erreichbarer Näherung aneinandergeschlossen. Die Berechnung der Drallkomponente w in höheren

¹⁾ B. PUNNIS, *Zur Berechnung der laminaren Einlaufströmung im Rohr*, Dissertation (Göttingen 1947). Nicht im Druck erschienen.

²⁾ H. SCHLICHTING, *Laminare Kanaleinlaufströmung*, Z. angew. Math. Mech. 14, 368 (1934).

asymptotischer Approximationsordnung mit dem Ziele des Anschlusses an eine Strömung mit stärkerem Drall hinter dem Einlaufquerschnitt, würde eine Neuberechnung der von der Drallkomponente in zweiter und höherer asymptotischer Ordnung mitbeeinflussten Größen u , v und p erforderlich machen. Grundsätzliche Schwierigkeiten würden sich dabei nicht ergeben.

In Übereinstimmung mit den Untersuchungen von SCHLICHTING und PUNNIS setzen wir voraus, dass die Reynoldssche Zahl $Re = U_0 r_0 / \nu$ hinreichend gross ist, um eine weitere Vereinfachung grenzschichttheoretischen Charakters zu gestatten: Die Veränderung des Strömungszustands, hier insbesondere des Dralls, soll klein sein gegenüber der Veränderung in radialer Richtung derart, dass man in (3.1) das Glied w_{rs}^* gegenüber w_{rr}^* vernachlässigen kann. Der nachfolgenden Berechnung kann man entnehmen, dass im Rahmen unserer Untersuchung der ersten asymptotischen Näherung für einen schwachen Drall diese Vernachlässigung bereits für mittlere Reynoldssche Zahlen (zum Beispiel 500) zulässig sein dürfte.

Die nachfolgende Untersuchung bezieht sich somit auf die Differentialgleichung

$$w_{rr}^* - \frac{U_0}{\nu} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) w_r^* + \frac{1}{r} w_r^* - \frac{1}{r^2} w^* = 0 \quad (11)$$

mit zugehörigen Rand- und Anfangsbedingungen.

3. Zurückführung auf ein Eigenwertproblem

Es ist für das Folgende zweckmässig, die folgenden dimensionslosen Veränderlichen einzuführen:

$$s = \frac{r}{r_0}, \quad q = \frac{z}{r_0 Re} \quad \left(Re = \frac{U_0 r_0}{\nu} \right) \quad (12)$$

Damit geht (11) über in

$$s^2 (1 - s^2) w_q^* = s^2 w_{ss}^* + s w_s^* - w^*. \quad (13)$$

Neben der Haftbedingung auf $s = 1$ (Rohrwand) ist Beschränktheit der Funktion w^* auf $s = 0$ (Rohrachse) zu fordern, was für zweimal stetig differenzierbares w^* nach (13) mit Verschwinden von w^* auf der Rohrachse gleichbedeutend ist. (Aus physikalischen Gründen wird man dies von vornherein fordern.) Die Randbedingungen lauten daher

$$w^* = 0 \quad \text{für} \quad s = 0 \quad \text{und für} \quad s = 1. \quad (14)$$

Hinzu kommt die Vorgabe von w^* in einem Anfangsquerschnitt, der ohne Einschränkung mit $q = 0$ bezeichnet werden kann:

$$w^* = h(s) \quad \text{für} \quad q = 0. \quad (15)$$

Das Verschwinden von w^* für $q \rightarrow \infty$ (Absterben des Dralls unter dem Einfluss der inneren Reibung) muss jeder Lösung von (13) und (14) bei beliebiger Anfangsverteilung (15) als Eigenschaft zukommen.

Der Separationsansatz

$$w^* = F(q) G(s) \quad (16)$$

führt bei Einsetzen in (13) auf

$$F(q) = e^{\lambda q} \quad (17)$$

und liefert für $G(s)$ die Differentialgleichung

$$s^2 G'' + s G' - G = \lambda s^2 (1 - s^2) G, \quad (18)$$

wobei Striche Ableitungen nach s anzeigen und λ Separationsparameter ist. Die Randbedingungen (14) gehen über in

$$G(0) = G(1) = 0. \quad (19)$$

Es wird im nächsten Abschnitt nachgewiesen werden, dass das Eigenwertproblem (18), (19) abzählbar unendlich viele Eigenwerte λ_ν und zugehörige Eigenfunktionen $G_\nu(s)$ besitzt, dass ferner die Eigenwerte sämtlich negativ sind (in Übereinstimmung mit dem zu erwartenden Absterben des Dralls mit wachsendem q) und dass unter gewissen Voraussetzungen die Anfangsverteilung (15) nach den Eigenfunktionen entwickelbar ist:

$$h(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu G_\nu(s). \quad (20)$$

Die gesuchte Drallverteilung in $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq q$ ist dann

$$w^*(q, s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{\lambda_\nu q} G_\nu(s) \quad (21)$$

oder in den ursprünglichen Variablen

$$w^*(x, r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \exp\left(\frac{\lambda_\nu x}{r_0 Re}\right) G_\nu\left(\frac{r}{r_0}\right). \quad (21a)$$

4. Theorie der Eigenwertaufgabe und Entwicklungssatz

Die in (18) und (19) aufgetretene Eigenwertaufgabe hat die Form

$$s^2 G''(s) + s G'(s) - G(s) = \lambda s^2 f(s) G(s); \quad G(0) = G(1) = 0 \quad (22)$$

mit $f(s) = 1 - s^2$, wobei Striche Ableitungen nach s bedeuten. Die Differentialgleichung werde in der selbstadjungierten Gestalt geschrieben:

$$L[G] = [s G'(s)]' - \frac{1}{s} G(s) = \lambda s f(s) G(s). \quad (23)$$

Die allgemeine Eigenwerttheorie bei Differentialgleichungen lässt sich wegen der Singularitäten bei $s = 0$ und $s = 1$ [bei $s = 1$ verschwindet $f(s) = 1 - s^2$] nicht unmittelbar anwenden; aber man kann der Aufgabe eine äquivalente Integralgleichung zuordnen. Die Randwertaufgabe

$$L[G] = r(s); \quad G(0) = G(1) = 0 \quad (24)$$

besitzt die mit Hilfe des Fundamentalsystems $s, 1/s$ von $L[G] = 0$ leicht aufstellbare Greensche Funktion $H(s, t)$:

$$H(s, t) = \begin{cases} \frac{t^2 - 1}{2t} s & \text{für } 0 < s \leq t, \\ \frac{s^2 - 1}{2s} t & \text{für } t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

welche die Randwertaufgabe (24) durch

$$G(s) = \int_0^1 H(s, t) r(t) dt \quad (25)$$

löst; somit geht (22) über in

$$G(s) = \lambda \int_0^1 t f(t) H(s, t) G(t) dt.$$

Im folgenden setzen wir $f(s)$ als in $(0, 1)$ stetige, in $0 \leq s < 1$ positive Funktion voraus. Die speziellen Gegebenheiten der Funktion $1 - s^2$ berücksichtigen wir, indem wir $f(1) = 0, f'(1) \neq 0$ verwenden. Dann kann man den Kern in bekannter Weise symmetrisieren. Mit

$$K(s, t) = \sqrt{s t f(s) f(t)} H(s, t); \quad \varphi(s) = \sqrt{s f(s)} G(s) \quad (26)$$

erhalten wir

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^1 K(s, t) \varphi(t) dt.$$

Der Kern $K(s, t)$ ist stetig und symmetrisch und gestattet die Anwendung der Integralgleichungstheorie. Es sei $h(s)$ eine zweimal stetig differenzierbare, bei

$s = 0$ und $s = 1$ dreimal differenzierbare, den Randbedingungen $h(0) = h(1) = k(1) = 0$ genügende Funktion, wobei

$$k(s) = L[h(s)] \quad (27)$$

gesetzt ist. Aus (25) und (26) folgt

$$h(s) \sqrt{s f(s)} = \int_0^1 K(s, t) \frac{k(t)}{\sqrt{t f(t)}} dt. \quad (28)$$

Wenn die Funktion

$$k^*(t) = \frac{k(t)}{\sqrt{t f(t)}}$$

in $\langle 0, 1 \rangle$ quadratisch integrierbar ist, ist¹⁾

$$h^*(s) = h(s) \sqrt{s f(s)}$$

quellenmässig darstellbar, stetig und nach normierten Eigenfunktionen $\varphi_\nu(s)$ des Kernes in eine absolut und in $\langle 0, 1 \rangle$ gleichmässig konvergente Reihe

$$h^*(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(s) \quad \text{mit} \quad c_\nu = \int_0^1 h^*(s) \varphi_\nu(s) ds \quad (29)$$

entwickelbar. Es ist also zu prüfen, ob $k^*(s)$ in $\langle 0, 1 \rangle$ quadratisch integrierbar ist. Die Stelle $s = 0$ ist harmlos; es ist nach Definition

$$k(s) = s h''(s) + h'(s) - \frac{h(s)}{s},$$

dabei ist $h(s)$ zweimal stetig differenzierbar und $h(0) = 0$; mithin ist $h'(s) = h(s)/s$ in $\langle 0, 1 \rangle$ stetig differenzierbar und hat den Grenzwert 0 für $s \rightarrow 0$; damit hat auch $k(s)$ den Grenzwert 0 für $s \rightarrow 0$ und ist bei $s = 0$ noch differenzierbar. Daher ist k^{*2} an der Stelle $s = 0$ rechtsseitig stetig (und hat dort den Wert 0). Wegen der Voraussetzungen ist $k(s)$ bei $s = 1$ linksseitig differenzierbar und hat dort den Wert 0, so dass k^{*2} auch bei $s = 1$ (linksseitig) stetig ist; $k^*(s)$ ist mithin quadratisch integrierbar. Aus (29) folgt unmittelbar

$$h(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu G_\nu(s) \quad \text{mit} \quad c_\nu = \int_0^1 s f(s) G_\nu(s) h(s) ds, \quad (30)$$

wo $G_\nu(s)$ durch

$$\int_0^1 s f(s) G_\nu^2(s) ds = 1 \quad (31)$$

¹⁾ Vergleiche etwa G. HAMEL, *Integralgleichungen* (Springer, Berlin 1937), S. 72, 76.

normierte Eigenfunktionen von (22) sind. Aus der Willkürlichkeit von $h(s)$ folgt, dass der Kern $K(s, t)$ nicht entartet ist und unendlich viele reelle Eigenwerte besitzt. Die Eigenwerte sind sämtlich negativ. Schreibt man nämlich (23) für eine zum Eigenwert λ_ν gehörige Eigenfunktion G_ν an, so folgt durch Multiplikation mit G_ν und Integration über das Intervall von 0 bis 1

$$\lambda_\nu = - \frac{\int_0^1 \left(s G_\nu'^2 + \frac{1}{s} G_\nu^2 \right) ds}{\int_0^1 s f G^2 ds} ; \quad (32)$$

man kann hier G_ν als reell annehmen und liest $\lambda_\nu < 0$ unmittelbar aus (32) ab.

Zusammenfassung: Die Eigenwertaufgabe (22), wobei $f(s)$ in $[0, 1]$ stetig, $0 \leq s < 1$ positiv und $f(1) = 0$ ist, $f'(1)$ existiert und $\neq 0$ ist, besitzt eine abzählbare Folge von sämtlich negativen Eigenwerten λ_ν mit (reell annehmen) Eigenfunktionen $G_\nu(s)$. Jede in $[0, 1]$ zweimal stetig und in $s = 0$ und $s = 1$ dreimal stetig differenzierbare Funktion $h(s)$ mit

$$h(0) = h(1) = L[h(s)]_{s=1} = 0$$

in $[0, 1]$ in eine absolut konvergente Reihe (30) nach den Eigenfunktionen G_ν entwickelbar.

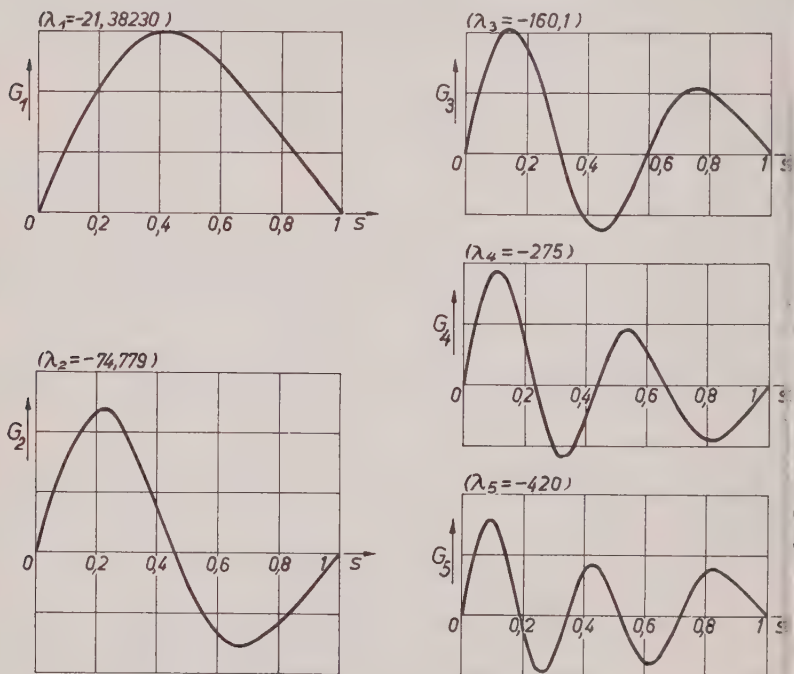
5. Numerische Ergebnisse¹⁾

Die hier gesammelten Erfahrungen werden etwas ausführlicher mitgeteilt, als es für die vorliegende Arbeit allein nötig wäre, weil die Erprobung der Methoden auch für andere ähnliche Fälle nützlich sein kann.

Die Formen der ersten fünf Eigenfunktionen in Figur 1 wurden aus den Näherungswerten des gewöhnlichen und eines verbesserten Differenzenverfahrens mit den Schrittweiten $h = 0,2$, $h = 0,1$ und $h = 0,05$ gewonnen. Die Durchführung auch bei kleiner Maschenweite gestaltet sich sehr bequem und übersichtlich, wenn man als Normierung $G(1 - h) = 1$ benutzt, also von $G(1) = 0$, $G(1 - h) = 1$ ausgehend, nach den Differenzengleichungen rekursiv $G(1 - 2h)$, $G(1 - 3h)$, ... berechnet, wobei man einen geschätzten Näherungswert λ für den betreffenden Eigenwert verwendet. Der Wert $G(0)$ wird dann nicht gleich 0 sein, sondern er hängt von λ ab. Durch kleine Variation von λ und Interpolation ist es leicht, λ so zu bestimmen, dass $G(0) = 0$ wird. Das Differenzenverfahren ist für Berechnung der Gestalt der $G_\nu(s)$ gut geeignet, während zur

¹⁾ Betreffs einer genaueren Darstellung der Methoden vergleiche etwa L. COLLATZ, *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen* (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1949). Hier werden im wesentlichen nur die Ergebnisse mitgeteilt. Für numerische Hilfs- und Kontrollrechnungen danken wir den Herren J. GRÜNSCH und M. SIMOSSEG.

genaueren Ermittlung der Eigenwerte λ_ν und zur Aufstellung von Schranken für die λ_ν andere Verfahren günstiger erscheinen.



Figur 1

Verlauf der ersten fünf Eigenfunktionen.

Obere Schranken für die Beträge der λ_ν liefert das Ritzsche Verfahren. Der Näherungsansatz

$$G(s) \approx w(s) = \sum_{\varrho=1}^p c_\varrho (s - s^{2\varrho+1})$$

mit der Forderung

$$\frac{\partial J}{\partial c_\nu} = 0 \quad \text{mit} \quad J = \int_0^1 \left[\lambda (s - s^3) w^2(s) + s w'^2(s) + \frac{1}{s} w^2(s) \right] ds \quad (\nu = 1, \dots, p)$$

wurde für $p = 1, 2$ und 3 durchgeführt und lieferte die oberen Schranken

	Obere Schranken für		
	$-\lambda_1$	$-\lambda_2$	$-\lambda_3$
$p = 1$	26,67	—	—
$p = 2$	21,788	154,2	—
$p = 3$	21,3986	86,33	587

Das Anwachsen der Eigenwerte zeigt die asymptotische Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\lambda_n}{n^2} = \left(\frac{\pi}{\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt} \right)^2 = 16, \quad (33)$$

welche die Näherungen Λ_n ergibt:

n	1	2	3	4	5
Λ_n	16	64	144	256	400

Das Verfahren der schrittweisen Näherungen liefert bequem obere und untere Schranken für λ_1 . Ausgehend von einer stetigen Funktion $F_0(s)$ mit

$$F_0(0) = F_0(1) = 0$$

werden weitere F_ν nach

$$L[F_\nu] = (s - s^3) F_{\nu-1}; \quad F_\nu(0) = F_\nu(1) = 0$$

und Schwarzsche Konstanten

$$a_k = \int_0^1 (s - s^3) F_j F_{k-j} ds,$$

Quotienten

$$\mu_{k+1} = \frac{a_k}{a_{k+1}} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

berechnet und die Abschätzungsformel

$$\frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{l_2 - 1} = -\lambda_1 \leq -\mu_{k+1}$$

benutzt, wobei $-l_2$ eine untere Schranke für $-\lambda_2$ bedeutet mit

$$-\mu_{k+1} < -l_2 < -\lambda_2.$$

Für

$$P_0(s) = 2s - 5s^3 + 5s^5 - 2s^7$$

wird

$$\mu_2 = -\frac{873470}{40841} = -21,38709, \quad \mu_3 = -\frac{18296768}{855653} = -21,38340$$

und damit

$$-\lambda_1 = 21,38266 \pm 0,00074 \text{ (Fehler also höchstens } 0,0035\%).$$

Für die niedrigeren Eigenwerte ist hier der Potenzreihenansatz

$$G(s) = \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v s^{v+1} \quad (34)$$

sehr geeignet; aus der Rekursionsformel

$$\alpha_v = \frac{\lambda}{v(v+2)} (\alpha_{v-2} - \alpha_{v-4})$$

lassen sich, von $\alpha_0 = 1$ (und formal $\alpha_{-2} = 0$) ausgehend, $\alpha_2, \alpha_4, \dots$ bequem berechnen; man schätzt λ , bildet dann

$$\Phi(\lambda) = \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v$$

und variiert λ so, dass $\Phi(\lambda) = 0$ wird. Auf diese Weise werden

$$-\lambda_1 = 21,382302, \quad -\lambda_2 = 74,7793, \quad -\lambda_3 = 160,1\bar{5}$$

ermittelt.

Untere Schranken auch für einige höhere Eigenwerte kann man aus den reziproken Potenzsummen der Eigenwerte gewinnen. Es ist

$$s_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \int_0^1 K(s, s) ds,$$

$$s_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} = \int_0^1 K_2(s, s) ds = \int_0^1 \int_0^1 [K(s, t)]^2 ds dt,$$

$$s_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \int_0^1 \int_0^1 [K_2(s, t)]^2 ds dt.$$

abei ist der iterierte Kern

$$K_2(s, t) = \int_0^1 K(s, u) K(s, t) du$$

enutzt; es ist hier

$$K_2(s, t) = \frac{1}{4} \sqrt{(s - s^3)(t - t^3)} \left\{ \frac{s^2 - 1}{12s} t (3t^2 - t^4 + 5s^2 - s^4) - st \ln s \right\}$$

$$\text{für } 0 \leq t \leq s, \quad K_2(t, s) \equiv K_2(s, t).$$

an erhält

$$s_1 = -\frac{1}{12} = -0,083\,333\,333\,3\ldots,$$

$$s_2 = \frac{7}{2880} = 0,002\,430\,555\,5\ldots,$$

$$s_4 = \frac{979}{203\,212\,800} = 0,000\,004\,817\,60\ldots$$

bei den in Figur 1 angeschriebenen Näherungswerten für die Eigenwerte λ_1 und λ_5 , welche aus s_1, s_2, s_4 in Verbindung mit der asymptotischen Formel (33) gewonnen wurden, ist die letzte hingeschriebene Ziffer als unsicher anzusehen.

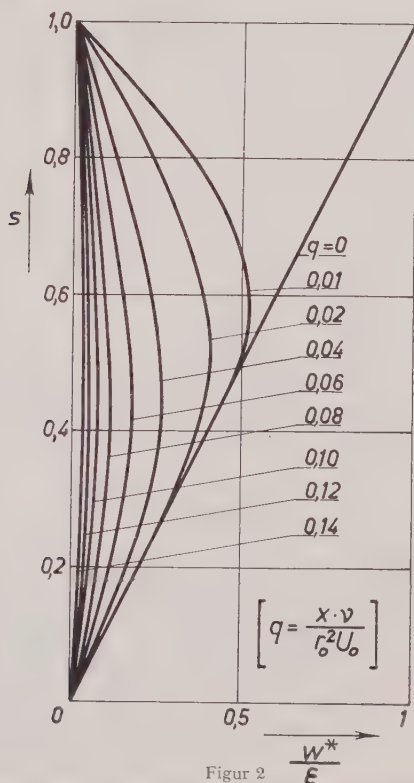
6. Anwendung

Der vom Betrage kleinste Eigenwert $\lambda_1 = -21,38230$ liefert das in Hauptströmungsrichtung am langsamsten abklingende und daher stromabwärts schliesslich dominierende Glied in der Reihe (21a) für die Drallkomponente w^* . (Dies gilt für den im allgemeinen bestehenden Fall $c_1 \neq 0$.) Aus der Untersuchung von PUNNIS¹⁾ ist zu entnehmen, dass in den entsprechenden Entwicklungen für u^* und v^* der vom Betrage kleinste Eigenwert zu $-16,03966$ berechnet wurde (dort ohne Angabe des Genauigkeitsanspruchs), und dass daher das in diesen Entwicklungen hinreichend weit stromabwärts schliesslich überwiegende Glied wie $\exp(-16,03966 x/r_0 Re)$ abklingt. Während dieses Glied also auf einer Strecke der Länge $r_0 Re/16,03966$ auf das $(1/e)$ -fache abnimmt, geschieht dies bei dem in der Entwicklung von w^* schliesslich dominierende Glied auf einer Strecke der Länge $r_0 Re/21,38230$, somit bereits nach Durchlaufen von drei Vierteln der erstgenannten Strecke.

Um nun an einem Beispiel etwas eingehender das Absterben eines (schwachen) Dralls in der Rohrströmung zu verfolgen, seien im folgenden numerische Ergebnisse der Anwendung auf den Fall mitgeteilt, dass im Anfangsquerschnitt

¹⁾ B. PUNNIS, *Zur Berechnung der laminaren Einlaufströmung im Rohr*, Dissertation (Göttingen 1947). Nicht im Druck erschienen.

$q \neq 0$ die Drallverteilung $w^*(0, s) = h(s) - \varepsilon s$ ($\varepsilon = \text{const}$, $|\varepsilon| \ll U_0$) vorgegeben ist. Eine Realisierung dieses Falls kann man sich so denken, dass die Flüssigkeit vor Eintritt in den Querschnitt $q = 0$ ein hinreichend langes, mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = \varepsilon/r_0$ rotierendes Rohr durchläuft.

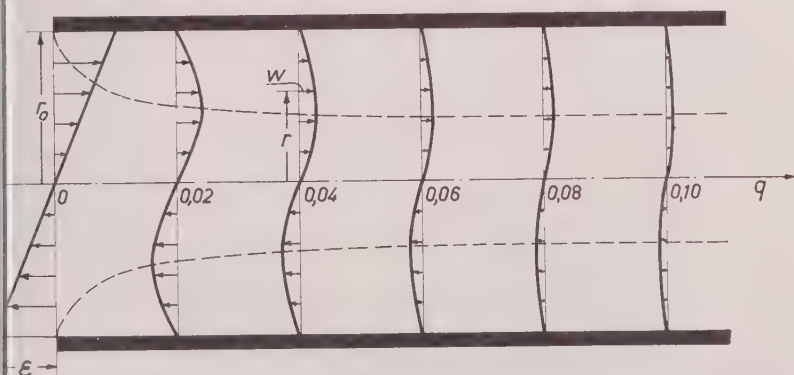


Verteilung der dimensionslosen Drallgeschwindigkeit über den Rohrradius für verschiedene Querschnitte $q = \text{const}$.

hat, so dass in diesem Rohr vor seinem Endquerschnitt $q = 0$ schließlich ein Strömung besteht, die aus einer Überlagerung der Poiseuille-Strömung Achsenrichtung und der starren Rotation zusammengesetzt ist. Diese Strömung geht mit $w^*(0, s) = \varepsilon s$ im Querschnitt $q = 0$ in unser ruhendes Verlängerungsrohr von gleichem Durchmesser über.

Der Tatsache, dass die in Abschnitt 4 gestellte Forderung $h(1) = 0$ durch die angenommene Anfangsverteilung nicht erfüllt ist, kann man durch ein

numerisch nicht ins Gewicht fallende Modifikation Rechnung getragen denken: man gebe $h(s) = \varepsilon s$ in $0 \leq s \leq 1 - \delta$ mit einem beliebig klein zu denkenden positiven δ vor und setze $h(s)$ stetig und zweimal stetig differenzierbar so fort, dass es zwischen $1 - \delta$ und 1 steil abfallend auf $h(1) = 0$ abnimmt. (Praktisch bedeutet begeben wir uns aus dem Querschnitt des unstetigen Übergangs beliebig wenig stromabwärts, wo sich wegen des Haftens an der ruhenden Rohrwandung bereits eine noch sehr dünne Grenzschicht der Drallkomponente ausgebildet hat.) Diese mit Rücksicht auf die Theorie erforderliche Modifikation



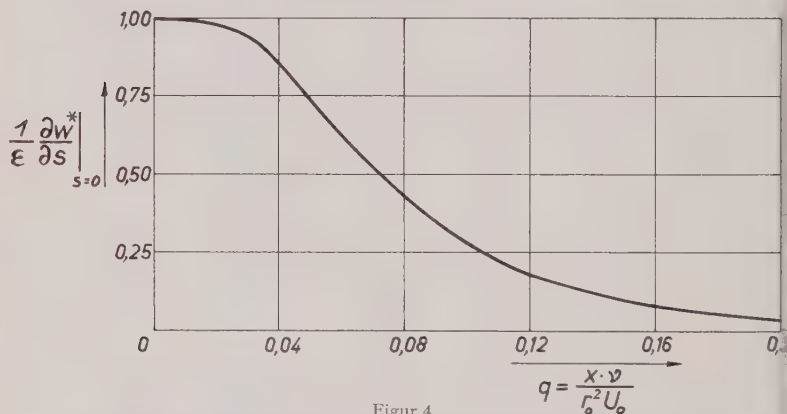
Figur 3

Verteilung der Drallgeschwindigkeit im Rohr mit Ort des Maximums in den einzelnen Querschnitten.

hat bei hinreichend kleinem δ keinen Einfluss im Rahmen der Genauigkeit der numerischen Auswertung und braucht bei dieser auch nicht berücksichtigt zu werden.

Die Auswertung erfolgte unter Berücksichtigung der aus Abschnitt 5 numerisch bekannten fünf ersten Eigenwerte und Eigenfunktionen. Während diese in einer guten Approximation der Anfangsverteilung noch nicht ausreichen, zeigt sich, dass bereits in $q = 0,01$ das fünfte Glied der Reihe (21a) nur noch maximal einen Beitrag von 4% des örtlichen w^* liefert [in etwa $s = 0,1$, vgl. $G_5(s)$ in Figur 1]. Im Querschnitt $q = 0,06$ erreicht sogar das zweite Glied der Reihe nur noch einen Beitrag von maximal etwa 5% von w^* , und weiter stromabwärts ist praktisch nur noch die erste Eigenfunktion $G_1(s)$ für die Gestalt der Drallverteilung über den Rohrquerschnitt massgebend. Von hier ab sind also die Drallverteilungen in den Querschnitten ähnlich, und für die Abnahme des Drallbetrags ist nur noch der erste Eigenwert λ_1 bestimmend. Insbesondere reicht fortan die wandnahe Zone, in der der Drall w^* von seinem Maximum an betreffenden Querschnitt monoton auf Null abnimmt, von etwa $s = 0,43$ [Ort des Maximums von $G_1(s)$] bis $s = 1$.

Figur 2 zeigt die Verteilung des Dralls, genauer: w^*/ε , über den Rohrradius für eine Folge von Querschnitten $q = \text{const}$ ($q = x \cdot v / r_0^2 U_0$). Das Hineinwandern des Drallmaximums von der Rohrwand bis zur asymptotischen Endlage (etwa $s = 0,43$, siehe oben) ist in Figur 3 nochmals veranschaulicht. Zusammen mit den an ihren Querschnittsorten aufgetragenen Drallverteilungen



Figur 4

Verteilung der Winkelgeschwindigkeit des Dralls auf der Rohrachse.

Von der Rohrachse $s = 0$ aus wächst der Drall in den einzelnen Querschnitten zunächst von Null praktisch linear an. Grenzt man den achsennahen Bereich ab, in welchem sich der Drall in den einzelnen Querschnitten mit vorgegebener Genauigkeit durch die Tangente in $s = 0$ approximieren lässt, erhält man eine Kurve, die analog zur Maximumskurve der Figur 3 verläuft. Man erhält also ein sich in Strömungsrichtung verjüngendes Rohr. In jedem Querschnitt hat der Drall innerhalb dieses Rohres approximativ die Verteilung einer starren Rotation; von Querschnitt zu Querschnitt stromabwärts klin- deren Winkelgeschwindigkeit $[\partial w^*/\partial s]_{s=0}$ jedoch rasch ab (vgl. Figur 4).

Summary

The steady laminar flow at high Reynolds' numbers in a straight tube of circular cross-section is investigated under the condition that swirl is present. Given any axially symmetrical distribution of the rotational velocities, the flow downstream is calculated in the special case that the rotational velocities are small compared to the axial velocity. The problem is reduced to an eigenvalue problem of an ordinary linear differential equation of second order, the theory of which is developed in detail. Numerical values for the five lowest eigenvalues and the corresponding eigen-functions are given. As an example, the decay of an initially rigid rotation is considered.

(Eingegangen: 16. Juni 1953.)

The Role of Coordinate Systems in Boundary-Layer Theory¹⁾

By SAUL KAPLUN, Pasadena, California²⁾

1. Introduction

For a given problem, the approximate solution given by boundary-layer theory depends on the system of coordinates used when the simplifying assumptions of boundary-layer theory are applied to the Navier-Stokes equations. In general, different systems of coordinates lead to boundary-layer equations which are not equivalent, that is, their solutions represent different flow fields. The object of this paper is to investigate in detail how these flow fields depend on the choice of coordinates, how different boundary-layer approximations to the same flow problem are related to each other, to the external flow and to the flow due to displacement thickness. The discussion is restricted to incompressible, steady, two-dimensional flow without separation. However, many of the results hold much more generally and will be discussed in a later paper.

The main result of this paper is contained in Theorem 2. Normally, one uses boundary-layer theory in the following way in order to obtain a picture of the complete flow field of a viscous fluid (outside the wake): The flow field is divided into two separate regions, that is, a boundary-layer region where the flow field is obtained from boundary-layer equations, and an outer region where the Euler equations are used to obtain an external flow, corrected for the displacement effect of the boundary layer. There has been considerable discussion about where and how to patch the two parts of the flow field, and about how to proceed to higher order approximations. However, Theorem 2 shows that one can find a system of coordinates, such that the boundary-layer solution with respect to this system gives an approximation which is valid in the whole flow field. Both the external flow and the flow due to displacement thickness are included analytically in this approximation and, hence, the problem of patching is automatically eliminated. A coordinate system with these properties will be here referred to as optimal. In Section 6, the problem is discussed to what order such an optimal boundary-layer solution is valid. In general it gives a better approximation to the exact flow field than does the composite flow field described above. It also appears to form a reasonable starting point for finding

¹⁾ Research prepared under Office of Naval Research Contract N 6 ONR-244, Task Order VIII, Project NR 061-036.

²⁾ Guggenheim Aeronautical Laboratory, California Institute of Technology.

higher order approximations, that is, approximations which are definitely outside the scope of boundary-layer theory.

In order to find such an optimal system of coordinates it is in general first necessary to compute the external flow and the flow due to displacement thickness. But once this system has been found, the optimal solution can be found immediately by means of another theorem (Theorem 1), which states that the boundary-layer solution with respect to one coordinate system, say an optimal one, may be found by a simple substitution into the solution with respect to any other system, say a conventional one.

Concrete examples illustrating the application of the above general theorems are given in Section 5.

In this paper, the concepts of the boundary-layer solution, and of the solutions for external flow and for flow due to displacement thickness, are defined with the aid of two special limiting processes. This viewpoint has previously been adopted by several authors, for example by H. WEYL [1]¹⁾, K. O. FRIEDRICHS [2], and G. E. LATTA [3]. This method is actually only a formal and more precise restatement of PRANDTL's original method, and hence is not widely used. However, it appears very natural for deriving the results of the present paper and the reasoning will be based on systematic use of the two limiting processes.

There are many examples in the literature of the use of various systems of coordinates in connection with boundary-layer theory and, in particular, it has been noted that they give the same skin friction and agree approximately within the boundary-layer region proper. To the author's knowledge, however, no systematic study of the relation between the solution based on the various systems has been undertaken and, especially, the two theorems referred to above appear to be new. The starting point for the present investigation was actually the following result due to M. D. VAN DYKE [4]. Consider Oseen flow past a semi-infinite flat plate. If rectangular coordinates are used to make a boundary-layer approximation, the resulting approximation resembles essentially the Blasius solution, and is valid only in the boundary layer proper. On the other hand, if parabolic coordinates are used, the boundary-layer approximation satisfies exactly the full Oseen equations (cf. Example 2 in Section 5). This result was further analyzed by P. A. LAGERSTROM, who pointed out how in other special cases coordinates may be found which are optimal in the sense described above [5]. He also suggested to the author the general problem of finding optimal coordinates, and guided the present study. The ideas developed by G. E. LATTA [3] have also influenced the author. A closer comparison of [3] with the results and methods of the present paper would undoubtedly shed further light on the problems studied here. This comparison has, however, as yet not been carried out.

A preliminary announcement of the results of this paper was given in [6].

¹⁾ Numbers in square brackets refer to References on page 134.

2. Boundary-Layer Approximations as Limits of Exact Solutions

The Navier-Stokes equations. The equations for steady, viscous, incompressible flow are

$$(\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{q}, \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \quad (1b)$$

where ν is the kinematic viscosity and p is the pressure divided by density.

In two-dimensions, the kinematical form of (1) is obtained by taking the curl of (1a) and integrating (1b) by means of the stream function ψ , which gives

$$\mathbf{q} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla^2 \omega, \quad (2a)$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi, \quad (2b)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2c)$$

where ω is the vorticity.

In arbitrary curvilinear coordinates, ξ^i , ($\xi^1 = \xi$, $\xi^2 = \eta$) the corresponding equations can be expressed as

$$u^j \frac{Du^i}{D\xi^j} = -|g| g^{ij} \frac{\partial p}{\partial \xi^j} + \nu \sqrt{|g|} g^{kl} \frac{D}{D\xi^k} \cdot \frac{Du^i}{D\xi^l}, \quad (1a')$$

$$\frac{\partial u^k}{\partial \xi^k} = 0, \quad (1b')$$

and

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \omega = \nu \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial \omega}{\partial \xi^j} \right), \quad (2a')$$

$$\omega = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(\sqrt{|g|} g^{kl} \frac{\partial \psi}{\partial \xi^l} \right), \quad (2b')$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \quad (2c')$$

Here ψ , ω , and ν have been treated as absolute scalars. The velocity components u and v may be considered defined by (2c'). In the language of tensor analysis [7], they are actually the contravariant vector-density components of the velocity²). It should be noted that the square of the magnitude of the velocity vector is $u^i u^j g_{ij} / |g|$, so that the value of u^i is not equal to the value of the projection of the velocity vector on the ξ^i -axis (cf. Section 3 below).

¹) $\frac{Du^i}{D\xi^j}$, $\frac{D}{D\xi^k} \cdot \frac{Du^i}{D\xi^l}$ here denote first and second covariant derivatives of the vector-density u^i (cf. [7], p. 82).

²) WEYL [1] restricts himself to conformal coordinates, in which case u and v are also equal to the covariant vector components of the velocity.

In this paper we shall be concerned with viscous flow past (or towards) rigid body. The curve representing the surface of the body (called the wall) need not be closed, but may, for example, correspond to a semi-infinite flat plate or a wedge. It will be required, however, that no other boundaries be present.

The boundary conditions at the surface of the body are then

$$u = v = 0 \quad (3a)$$

at the wall. ψ must then be a constant at the wall, which will be normalized to zero.

At infinity the customary boundary conditions are (in suitable Cartesian coordinates)

$$q \rightarrow U i, \quad p \rightarrow p_\infty \quad \text{as} \quad x \rightarrow -\infty \quad \text{or} \quad |y| \rightarrow \infty. \quad (3b)$$

However, for sufficiently divergent infinite bodies there is no potential solution of the equations for non-viscous flow which satisfies (3b). In this case we require that

$$\frac{\psi}{\psi_p} \rightarrow 1 \quad (3c)$$

at infinity, where ψ_p represents one of the solutions for potential flow past the body. Evidently (3b) is a special case of (3c).

The term *exact solution for flow past the body* will henceforth be used to denote a solution of (1) or (2) with the boundary condition (3a) satisfied at the body and (3b) or (3c) at infinity. More precisely, the term will denote a class of solutions with ν as a parameter ($0 < \nu < \nu_0$) where all solutions satisfy identical boundary conditions. Boundary layer theory is concerned with approximation to the exact flow field for small values of ν . It will be introduced below with the aid of two limit processes.

First limit process. Let $f(P, \nu)$ be a function of position and viscosity. Here P is used as an abbreviation for the coordinates (ξ, η) of a point. In the first limit process, denoted by \lim_1 , P is held fixed while ν tends to zero: The resulting limiting function is designated by the subscript e .

$$f_e(P) = \lim_1 f(P, \nu) = \lim_{\nu \downarrow 0, P \text{ fixed}} f(P, \nu). \quad (4a)$$

If this limit process is applied to the exact solution for flow past a solid, that is to $\psi(P, \nu)$, $u^i(P, \nu)$, and $p(P, \nu)$, the resulting limiting functions represent flow which will be referred to as the *external flow*.

In applying the first limit process to equations (1) and (2) at a point where the derivatives appearing in (1) or (2) actually tend to the corresponding derivatives of the limiting functions (which may be called a regular point), one may

imply replace ψ by ψ_e , etc., and put $\nu = 0$ in the equations. The resulting equations are the Euler equations, i.e., the equations of motion of a perfect fluid.

Applying the first limit process to the boundary conditions, however, it is seen that, since $u = v = 0$ at the wall, u_e and v_e must be zero at the wall, while $\psi_e/\psi_\infty \rightarrow 1$ at infinity. There is, in general, no solution of EULER'S equations, satisfying the Euler equations at every point of the flow, which also satisfies these boundary conditions, so that all points of the flow cannot be regular in the above sense.

While many types of irregular behavior are conceivable, the type made prominent by experience consists of a discontinuity in the tangential velocity (a vortex-sheet discontinuity), which represents a line of slip in the perfect fluid. The behavior under the first limit process at such a discontinuity is not regular. As $\nu \rightarrow 0$ at a point on the line of discontinuity, the viscous terms in (1) or (2) do not tend to zero, and EULER'S equations are not approached in the limit. Once such lines of slip in the perfect fluid are permitted, EULER'S differential equations are not everywhere satisfied, and an infinite number of perfect-fluid flows becomes possible. The relevant one, that is, the limit which is actually approached, is decided by the action of viscosity, in a manner which, as yet, is not understood in many essential respects.

In ordinary problems, experience and physical arguments show that the line of slip occurs right at the wall, following the wall for some distance downstream from the point of impingement of the streamline coming from upstream infinity, but that it may eventually separate from the wall, defining a wake. It is to be expected that the limits $\psi_e(P)$, $u_e^i(P)$, $\phi_e(P)$, actually exist and satisfy EULER'S equations, at least outside the region of the wake, which is essentially unexplored at the present time¹). The present discussion will, however, be restricted to flows where no separation occurs. Then, all the streamlines come from upstream infinity, the flow is irrotational and satisfies LAPLACE'S equation. The action of viscosity is restricted to the determination of circulation about the body, in accordance with the Kutta condition. ψ_e can then be found by solving the corresponding potential problem.

If the relevant solution of EULER'S equations, u_e^i , is used as a starting point, the only essential effect of introducing ν small, but greater than zero, is to replace the discontinuity by a rapid, but continuous transition, which is nearly completed within a narrow region (boundary layer). Perturbation problems of this nature are referred to in recent literature as singular (see [3] and references given there).

In a regular perturbation problem, the successive perturbations are obtained by successive application of the first limit process, which is essentially equivalent to expanding the solution in powers of a small parameter. In a singular

¹) This is briefly commented on further in Section 6.

perturbation problem, however, $u^i \rightarrow u_\varepsilon^i$ non-uniformly in any region containing boundary points. Hence, at $\nu > 0$, the limit u_ε^i breaks down as an approximation, sufficiently close to the boundary. An approximation for the continuous transition across the boundary layer may be found by the application of another limit process, described in the next paragraph.

Second limit process. Let ε be a small parameter which, in a sense, measures the effective thickness of the transition region. In the present case ε will be taken proportional to $\sqrt{\nu}$. More generally, ν may be a function of ε such that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\nu}{\varepsilon^2} = \text{const} \neq 0. \quad (5)$$

A system of coordinates (ξ, η) will be chosen with the only restriction that η be zero at the wall. It is customary also to require (cf., for example, [8], p. 1) that the lines $\xi = \text{const}$ be orthogonal to the wall. This assumption will be made here. The wider choice of coordinate systems thus provided will be essential for obtaining the principal result of this paper.

In the second limit process, the point P will not be fixed but will move toward the wall along a curve $\xi = \text{const}$ in such a way that the ratio

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{\varepsilon}$$

is fixed, in other words, keeping ξ and $\bar{\eta}$ const. Let $f(P, \nu)$, as before, be a physical quantity depending on position and viscosity. The limiting function approached in the second limit process will be denoted by $f_\zeta(\xi, \bar{\eta})$ or $\lim_\zeta f$ and defined by

$$f_\zeta(\xi, \bar{\eta}) = \lim_\zeta f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0; \xi, \bar{\eta} \text{ fixed}} f(\xi, \bar{\eta}, \varepsilon).$$

Here ζ is used as an abbreviation for the coordinate system (ξ, η) . Note that the first limit of f depends on f only; the second limit, on the other hand, depends also on the choice of coordinates. To emphasize this, ζ is used as a subscript in the notation introduced by (6).

Now consider an exact solution as described by ψ, u, v, ω, p . We define

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{\varepsilon}, \quad \bar{v} = \frac{v}{\varepsilon}, \quad \bar{\omega} = \varepsilon \omega.$$

The boundary-layer approximations of the quantities $\psi, u, \bar{v}, \bar{\omega}, p$ may then be defined as the limiting functions $\bar{\psi}_\zeta, u_\zeta, \bar{v}_\zeta, \bar{\omega}_\zeta$, and p_ζ , that is

$$\psi_\zeta = \lim_\zeta \bar{\psi}, \quad u_\zeta = \lim_\zeta u, \quad \text{etc.} \quad (8)$$

The following notation will also be used

$$\psi_{\zeta} = \varepsilon \bar{\psi}_{\zeta}, \quad v_{\zeta} = \varepsilon \bar{v}_{\zeta}, \quad \omega_{\zeta} = \frac{\bar{\omega}_{\zeta}}{\varepsilon}. \quad (8b)$$

The slight inconsistency in the notation should be kept in mind: ψ_{ζ} is not obtained by applying the second limit process to ψ , but by applying it to ψ/ε and afterwards multiplying it by ε . If now $\bar{\eta}$ is again replaced by η/ε , ψ_{ζ} , etc., are functions of ξ , η , and v . The flow field which has ψ_{ζ} as stream function is the flow field given by boundary-layer theory. [The relation of ψ_{ζ} to u_{ζ} , ω_{ζ} , etc., will be discussed below, see (10b) and ff.]. The definition of the boundary-layer approximation thus introduced is formally different but actually equivalent to PRANDTL's definition (cf. also [1], [2], and [3]). It is an approximation with respect to a coordinate system ζ . A different coordinate system would in general give rise to a different approximation, as discussed in Section 3.

The functions $\bar{\psi}_{\zeta}$, u_{ζ} , \bar{v}_{ζ} , $\bar{\omega}_{\zeta}$, and p_{ζ} depend on the two variables ξ and η/ε , and their variation with the latter variable represents the transition across the boundary layer. Note that the boundary-layer approximation is formally defined wherever the ζ -coordinates are defined, hence a flow field is formally given even outside the boundary layer proper. It is this complete flow field that will be discussed in the present paper.

ψ_{ζ} , u_{ζ} , etc. satisfy the Prandtl boundary-layer equations, which actually may be obtained by applying the second limit process to equations (1') or (2'). As an example, (2') become

$$\left(\frac{\partial \bar{\psi}_{\zeta}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{\psi}_{\zeta}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \bar{\omega}_{\zeta} = \sqrt{|g|} g_{ww}^{22} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\eta}^2} \bar{\omega}_{\zeta}, \quad (9a)$$

$$\bar{\omega}_{\zeta} = -g_{ww}^{22} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_{\zeta}}{\partial \bar{\eta}^2}. \quad (9b)$$

Here the subscript w indicates that the quantity in question has been evaluated at the wall: $g_{ww}^{22}(\xi) = g^{22}(\xi, 0)$, etc.

Note that the relation of $\bar{\psi}$ to u and \bar{v} is unaltered by the second limit process since $\bar{\psi}_{\zeta}$, u_{ζ} , and \bar{v}_{ζ} still satisfy the relations

$$\frac{\partial \bar{\psi}_{\zeta}}{\partial \eta} = u_{\zeta}, \quad \frac{\partial \bar{\psi}_{\zeta}}{\partial \xi} = -\bar{v}_{\zeta}, \quad (10a)$$

and

$$\frac{\partial \psi_{\zeta}}{\partial \eta} = u_{\zeta}, \quad \frac{\partial \psi_{\zeta}}{\partial \xi} = -v_{\zeta}. \quad (10b)$$

As a consequence, (1') and (2') remain equivalent after the second limit process has been carried out. The flow field given by ψ_{ζ} is the same as that given by ψ and v_{ζ} . On the other hand, the relation of ω to this field has been altered. The

vorticity of the flow field described by ψ_ξ is

$$-\frac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left(\sqrt{|g|} g^{kl} \frac{\partial \psi_\xi}{\partial \xi^l} \right).$$

As is seen by (9b), this is in general different from ω_ξ .

The boundary-layer approximation may also be defined as the solution of (9) with certain approximate boundary conditions which will be discussed later. For the present, however, it will be regarded as the result of applying the second limit process, in the manner described above, to the exact solution of the Navier-Stokes equations.

3. Comparison of Different Boundary-Layer Solutions

The boundary-layer approximations to an exact solution of the Navier-Stokes equations are not uniquely determined, but depend both on the choice of dependent variables used to represent the flow field, and on the independent variables, i.e., the coordinates.

Dependent variables. As remarked above, the (ψ) and the (u, v) representations are equivalent. In general, however, different representations lead to different approximations. For example, when (ξ, η) are orthogonal coordinates, the flow field is often represented by means of velocity components (U, V) in the sense of vector geometry (cf. [8], p. 101, and especially [7], p. 114). The magnitudes of U and V are then equal to the projections of the velocity vector on the local coordinate axes. They are connected with the contravariant velocity densities u, v through the relations

$$u = h_2(\xi, \eta) U, \quad v = h_1(\xi, \eta) V, \quad (1)$$

where $ds^2 = h_1^2 d\xi^2 + h_2^2 d\eta^2$ is the square of the line element. Applying the second limit process, one obtains

$$u_\xi = h_{2w} U_\xi, \quad \bar{v} = h_{1w} \bar{V}_\xi, \quad (1)$$

where $h_{iw} = h_i(\xi, 0)$ and $V = V/\varepsilon$. Thus the original metrical relations (1) no longer hold, except at the wall. The flow field corresponding to u_ξ and \bar{v}_ξ then be different from that corresponding to U_ξ and \bar{V}_ξ . The example of (U, V) representations also shows that, in general, the boundary layer approximation does not satisfy the exact continuity equation¹⁾. However, the (ψ) and the (u, v) representation have the special property of preserving the exact continuity equation under the boundary-layer approximation. In the following only the (ψ) and the equivalent (u, v) representations will be used. While further investigation of the role of the dependent variables may be of interest

¹⁾ Cf. Ref. [8], p. 119.

will not be carried out in the present paper, which is concerned mainly with the role of the independent variables.

The flow field will, in general, also depend on the choice of the parameter ε as a function of ν . In the following it will therefore be assumed that $\varepsilon = \text{const} \sqrt{\nu}$. The choice of the constant will not affect the flow field.

Independent variables. Main correlation theorem. Consider now two boundary-layer approximations to the same exact solution, one based on the system of coordinates $\zeta = (\xi, \eta)$ and the other one on another system $\chi = (\varrho, \sigma)$. Here η and σ respectively are assumed to be zero at the wall. The two flow fields may be represented by the stream functions ψ_ζ and ψ_χ respectively. Their relation is then described by the following correlation theorem:

THEOREM 1. *If $\psi_\zeta = f(\xi, \bar{\eta})$ is given, then the boundary-layer solution with respect to χ can be found directly by the substitution formula*

$$\bar{\psi}_\chi = f(\xi_\chi, \bar{\eta}_\chi) \quad (12a)$$

where

$$\xi_\chi = \lim_\chi \xi = \xi(\varrho, 0), \quad (12b)$$

$$\bar{\eta}_\chi = \lim_\chi \bar{\eta} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=0} \bar{\sigma}. \quad (12c)$$

The theorem states that the result of applying \lim_χ to $\bar{\psi}$ is identical with that of first applying \lim_ζ and then \lim_χ .

The evaluations of the limits (12b) and (12c) are easily shown to be correct by considering ξ and η as functions of σ for a fixed ϱ , and using the fact that η and σ vanish at the wall. Equation (12a) can be obtained directly, if it is assumed that $\psi(\xi, \bar{\eta}, \varepsilon)$ is a continuous function of ξ , $\bar{\eta}$, and ε (in the space of those variables), at $\varepsilon = 0$. The validity of the theorem can be checked also by verifying that $\bar{\psi}_\chi$, as given by (12a), satisfies the appropriate boundary-layer equations [cf. (9)] and boundary conditions [cf. (14) and (18) below].

The dependence of the boundary-layer solution on the choice of coordinates can now be studied with the aid of (12). Since ψ is treated as an absolute scalar, ψ_ζ and ψ_χ represent the same flow field if and only if the systems ζ and χ are connected by the relations

$$\xi(\varrho, \sigma) = \xi(\varrho, 0), \quad (13a)$$

$$\eta(\varrho, \sigma) = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} \right)_{\sigma=0} \sigma. \quad (13b)$$

These relations are equivalent to

$$\xi = f_1(\varrho), \quad (13a')$$

$$\eta = f_2(\varrho) \sigma, \quad (13b')$$

where f_1 and f_2 are arbitrary functions. According to (13a'), only the shape of the curves $\xi = \text{const}$, but not their spacing ('labelling') has an effect on the boundary-layer approximation. Equation (13b') implies that a relabelling of the curves $\eta = \text{const}$, other than $\eta \rightarrow \text{const } \eta$, would alter the flow field given by the boundary-layer approximation. On the other hand, certain changes of shape of the η -curves do not change the flow field.

The flow fields given by ψ_ζ and ψ_χ will now be compared in the case where ζ and χ are arbitrary systems, not necessarily related by (13).

Conditions at the wall. In general it should be noted that, since $\eta = \bar{\eta} = 0$ at the wall, the first and second limit processes are identical there. Since the first limit is independent of ζ , the same must then be true for the second limit at the wall. It is then a direct consequence of the boundary condition (3a) that, at the wall,

$$u_\zeta(\xi, 0) = v_\zeta(\xi, 0) = 0 \quad (14)$$

independently of the system of coordinates.

Furthermore, we have the important relation that *the skin friction obtained from the boundary-layer approximation is independent of the choice of coordinates*. This can be seen directly, as follows. Let τ denote the exact skin friction (the subscript w being omitted from the usual notation for convenience). In analogy with (8), define $\bar{\tau} = \tau/\varepsilon$, $\bar{\tau}_\zeta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\tau}$, and $\tau_\zeta = \varepsilon \bar{\tau}_\zeta$. Then

$$\tau_\zeta = \varepsilon \bar{\tau}_\zeta = \varepsilon \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon^{-1} \tau(\xi, \varepsilon)]. \quad (15)$$

Since the limit on the right does not depend on the nature of coordinates $\tau_\zeta = \tau_\chi$ at any point on the wall.

Whenever the no-slip condition (3a) holds, the exact skin friction is simply $-\mu$ times the vorticity at the wall

$$\tau = -\mu \omega_w = \mu g_w^{22} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right)_w. \quad (16a)$$

Passing to the limit

$$\tau_\zeta = -\frac{\mu}{\varepsilon} \bar{\omega}_\zeta w = \mu g_w^{22} \left(\frac{\partial^2 \psi_\zeta}{\partial \eta^2} \right)_w. \quad (16b)$$

Thus, in computing τ_ζ from the velocity field given by the boundary-layer approximation, one may use the exact relation between stress and rate of strain. However, if the no-slip condition does not hold, τ_ζ would denote the skin friction computed by means of an appropriate approximate relation derived from the exact relation by the passage to the limit. If the exact stress relation is used, the skin friction may not be invariant when slipping occurs.

Differences at a distance from the boundary. At the boundary the choice of coordinates is irrelevant in the sense discussed above. Within the boundary

layer proper, that is, within a distance of order ε from the wall, the flow associated with ψ_ζ and ψ_χ should agree up to and excluding terms of order ε . This follows from Theorem 1.

However, at a distance from the boundary, ψ_ζ and ψ_χ may differ radically. According to (12), the flow (ψ_χ) may be regarded as an image of the flow (ψ_ζ), obtained by the following mapping: let a point P go into an image point Q in such a way that, if the ξ - and η -affices of P are

$$\xi(P) = a, \quad \eta(P) = b, \quad (12e)$$

the point Q is determined by the relations

$$\xi_\chi(Q) = a, \quad \varepsilon \bar{\eta}_\chi(Q) = b. \quad (12f)$$

Then, the stream function has the same numerical values at Q and at P , that is

$$\psi_\chi(Q) = \psi_\zeta(P). \quad (12g)$$

Thus, a streamline $\psi_\chi = c$ will be the direct image of the streamline $\psi_\zeta = c$, but, in general, the coordinate curves will not be direct images under this mapping. However, if χ and ζ are connected at the wall by the special relations

$$\varrho_w = \xi_w, \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} \right)_w = 1, \quad (12h)$$

ξ_χ becomes equal to ϱ and $\varepsilon \bar{\eta}_\chi$ to σ , so that the χ -affices of Q become

$$\varrho(Q) = a = \xi(P), \quad \sigma(Q) = b = \eta(P). \quad (12j)$$

Thus, if (12h) holds, the coordinate curves as well as the streamline curves map as direct images. This means that a given streamline, $\psi = c$, passes through the same coordinate affices in both flows.

Now, keeping conditions (12h) imposed at the wall (with respect to some fixed ζ -system), one may deform the χ -coordinates in an otherwise general manner. In particular, in any region external to the wall, of the type $\eta \geq \eta_0 > 0$, any desired continuous deformation of the χ -coordinates can be performed without violating (12h). Since the direct-image relations then hold, it is clear that, within a region of this type, the family of streamlines may be deformed into any desired continuous image of itself by a suitable choice of χ .

Thus, at a distance from the boundary, the flow field obtained from the boundary-layer approximation depends almost exclusively on the choice of coordinates, rather than on the physical problem. For this reason it is customary to disregard the boundary-layer approximation entirely outside the boundary layer. The boundary-layer solution is assumed valid as a certain approximation up to the edge of the boundary layer, where it is patched on to a potential solution. However, the viewpoint taken in this paper is different.

One may make positive use of the dependence of ψ_ζ on the choice of ζ by searching for special systems of coordinates, such that ψ_ζ approaches the exact solution ψ as closely as possible. Then ψ_ζ would be a valid approximation even outside the boundary-layer region proper. The problem of such 'optimal' systems of coordinates will be discussed in the following section.

4. Comparison with Exact Solution. Choice of Optimal Coordinates

In the preceding section, it was shown how the boundary-layer solution, as described for example by ψ_ζ , varies radically with the choice of ζ . The question was raised whether one could turn this fact to good advantage, by choosing ζ in such a way that ψ_ζ is in some sense very close to ψ , even outside the boundary-layer region proper. The conditions that such a ψ_ζ would have to satisfy, need to be specified more precisely. It is certainly natural to require that u_ζ and v_ζ satisfy the same boundary conditions as u and v at infinity. A stronger requirement would be that, near infinity, ψ_ζ should agree with ψ up to a certain order in ε . It is, in fact, possible to require that ψ and ψ_ζ agree up to and including first order terms in ε everywhere outside the boundary. An equivalent requirement is that ψ_ζ contain, in a sense to be defined, the external flow and the flow due to displacement thickness. (The latter flow is actually the first order perturbation of ψ_e outside the boundary.)

Below it will be shown that systems of coordinates ζ may be found, such that ψ_ζ satisfies this requirement. Such systems will be called optimal. The Discussion (Section 6) will briefly touch upon the question whether other requirements on ψ_ζ would be preferable.

Behavior of ψ_ζ for $\bar{\eta}$ large. First order approximation to ψ for $\eta \neq 0$. A fundamental assumption of boundary-layer theory is that, for a flow property f

$$\lim_{\bar{\eta} \rightarrow \infty} (\lim_{\zeta} f) = \lim_{\eta \rightarrow 0} (\lim_1 f) \quad (17)$$

provided the limits exist. Applying (17) to u yields

$$u_\zeta \rightarrow u_{ew} \quad \text{as} \quad \bar{\eta} \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Applying (17) to v or \bar{v} , or to ψ or $\bar{\psi}$, however, leads in general to trivial results. To find the behavior of ψ_ζ and v_ζ for $\bar{\eta}$ large, higher order external perturbations have to be considered.

Previously, the external flow had been defined as

$$\psi_e = \lim_1 \psi, \quad u_e = \lim_1 u, \quad \text{etc.} \quad (19a)$$

We shall now consider this definition to be valid only for $\eta \neq 0$ and extend the limiting functions by continuity to the wall:

$$\psi_{ew} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \psi_e(\xi, \eta), \quad u_{ew} = \lim_{\eta \rightarrow 0} u_e(\xi, \eta), \quad \text{etc.} \quad (19b)$$

ote that if (19a) is applied even for $\eta = 0$, ψ_e would have been continuous here, whereas u_e in general would be discontinuous.

Due to the presence of the boundary layer, it is to be expected that the first external perturbation is of order ε , that is,

$$\psi = \psi_e(P) + \varepsilon \psi'_e(P) + o(\varepsilon) \tag{20}$$

where $\lim_1 o(\varepsilon)/\varepsilon = 0$. Thus the first order external perturbation may be defined by a repeated application of the first limit process as

$$\psi'_e = \lim_1 \frac{\psi - \psi_e}{\varepsilon}, \tag{21a}$$

$$\psi'_{ew} = \psi'_e(\xi, 0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \psi'_e(\xi, \eta). \tag{21b}$$

Again it is necessary to extend the definition to $\eta = 0$ by continuity, since

$$\lim_1 \frac{\psi_w - \psi_{ew}}{\varepsilon} = 0$$

whereas ψ'_{ew} , as will be seen by (23), is in general different from zero.

Now, for η small,

$$\psi_e = u_{ew} \eta + \left(\frac{\partial^2 \psi_e}{\partial \eta^2} \right)_w \frac{\eta^2}{2} + \cdots$$

Hence $\lim_{\varepsilon} (\psi_e/\varepsilon) = u_{ew} \bar{\eta}$ and $\lim_{\varepsilon} [(\psi - \psi_e)/\varepsilon] = \bar{\psi}_\varepsilon - u_{ew} \bar{\eta}$. Applying (17) $(\psi - \psi_e)/\varepsilon$ one then finds that

$$\bar{\psi}_\varepsilon - u_{ew} \bar{\eta} \rightarrow \psi'_{ew} \quad \text{as} \quad \bar{\eta} \rightarrow \infty \tag{22}$$

$$\psi_\varepsilon \sim u_{ew} \eta + \varepsilon \psi'_{ew} \quad \text{for} \quad \bar{\eta} \text{ large.} \tag{22'}$$

Since $\bar{\psi}_\varepsilon - u_{ew} \bar{\eta} = \int_0^{\bar{\eta}} (u_\varepsilon - u_{ew}) d\bar{\eta}$ it follows from (22) that

$$\psi'_{ew} = \int_0^\infty (u_\varepsilon - u_{ew}) d\bar{\eta}. \tag{23}$$

This relation shows how ψ'_{ew} may be evaluated from any given boundary-layer approximation. On the other hand, since ψ'_e may be defined by (21), the integral in (23) must be independent of the choice of ζ . This may also be checked from (22). It may be seen that ψ'_e satisfies the Laplace equation and hence represents potential flow. ψ'_e may then be determined if one uses (23) as a boundary condition, together with the additional condition that $\psi'_e/\psi_e \rightarrow 0$ at infinity. It follows from the preceding discussion, in particular from (23), that ψ'_e represents the external perturbation flow due to displacement thickness. ψ_e repre-

sents a flow past the body so that the body surface is a streamline ($\psi_e = 0$). ψ'_e on the other hand, represents a flow that seems to emanate from a source distribution at the wall.

First order approximation to ψ_ξ for $\eta \neq 0$. The first limit process may be applied to the boundary-layer solution ψ_ξ in the same manner as was done to ψ . The flow field represented by the limit $\psi_{\xi e}$ will be called the external flow contained in the boundary-layer solution. Since, for a fixed η , $\bar{\eta}$ tends to infinity as ε tends to zero, one may use equation (22) in evaluating the limit:

$$\psi_{\xi e} = \lim_1 \psi_\xi = u_{ew} \eta. \quad (24a)$$

The associated velocity component $u_{\xi e} = \partial \psi_{\xi e} / \partial \eta = u_{ew}$ may be found directly as $\lim_1(u_\xi)$ for $\eta \neq 0$, and extended to the wall by continuity. Thus, for a fixed ξ , the curves of u_ξ versus η with ε as parameter will have the line $u = u_{ew}$ as a limiting curve for ε tending to zero. The external flow field contained in the boundary-layer approximation has thus a constant ξ -component of velocity. This is of course due to the fact that u_ξ depends on η and ε only in the combination η/ε , so that the limiting value $u_{\xi e}$ is $u_\xi(\xi, \infty)$. On the other hand, the ξ -component of the exact solution may have a more complicated dependence on η and ε . Hence, its corresponding limiting curve, $u_e(\xi, \eta)$, may vary with η and need coincide with $u_{\xi e}$ only at the wall.

Similarly, one may define the external first perturbation contained in the boundary-layer approximation and use (23) in its evaluation:

$$\psi'_{\xi e} = \lim_1 \frac{\psi_\xi - \psi_{\xi e}}{\varepsilon} = \psi'_{ew}. \quad (\eta \neq 0) \quad (24b)$$

Its value for $\eta = 0$ is defined as the limiting value when $\eta \rightarrow 0$. Since $\psi'_{\xi e}$ is independent of η it follows that $u'_{\xi e}$ is zero and $v'_{\xi e} = \partial \psi'_{\xi e} / \partial \xi = v'_{ew}$. Hence $v'_{\xi e}$ and v'_{ew} , regarded as functions of η , must coincide for $\eta = 0$, but as η varies the former must remain constant, whereas the latter may vary.

Optimal coordinates. The boundary-layer solution will be said to contain the external flow of the exact solution, whenever

$$\psi_{\xi e} \equiv \psi_e \quad \text{i.e.,} \quad u_{ew} \eta = \psi_e \quad (25a)$$

and to contain the flow due to displacement thickness, whenever

$$\psi'_{\xi e} \equiv \psi'_e \quad \text{i.e.,} \quad \psi'_{ew} = \psi'_e. \quad (25b)$$

A coordinate system will be called optimal if both these equations are satisfied. Assuming that ψ_e and ψ'_e are given, let $\chi = (\rho, \sigma)$ be such an optimal system. It can be seen immediately that (25b) is satisfied if and only if ψ'_e is a function of ρ only. In other words, it is sufficient (and necessary) to choose

the curves $\varrho = \text{const}$ to coincide with streamlines of the flow due to displacement thickness. (25a) is satisfied if and only if $u_e = \partial\psi_e/\partial\eta = u_{ew}$, so that u_e is a function of ϱ only. This can be accomplished by taking $\sigma = \psi_e$. Most generally, we may choose $\sigma = f(\varrho)\psi_e$ where $f(\varrho)$ is an arbitrary function of ϱ . Then $\sigma' = 1/f(\varrho) = u_{ew}$. Hence, the following theorem has been proved.

THEOREM 2. *The coordinate system $\xi = (\xi, \eta)$ is a particular optimal system, in the sense that (25a) and (25b) are satisfied, if*

$$\xi = \psi'_e, \quad \eta = \psi_e. \quad (26a)$$

Any other system, $\chi = (\varrho, \sigma)$, is optimal if and only if it is related to the above system by

$$\varrho = f_1(\xi), \quad \sigma = f_2(\xi)\eta \quad (26b)$$

where f_1 and f_2 are arbitrary functions. The flow field given by the boundary-layer approximation is the same for all optimal systems, but will be different if any other system is chosen.

The last statement follows directly from a comparison of (26b) and (13').

It will now be shown that the optimal boundary-layer solution, as formally defined by the requirement (25), also has the other properties discussed at the beginning of this section. First it will be checked that it satisfies all the boundary conditions imposed on the exact solution. The conditions at the wall (3a) are satisfied according to (14). At infinity ψ approaches a potential solution which actually is ψ_e , whereas ψ_∞ approaches $\psi_{\infty e}$. If now $\psi_e = \psi_{\infty e}$ it follows that ψ satisfies the correct boundary condition. Note that, according to the same boundary condition, u_∞ should approach $u_e(\xi, \infty)$. On the other hand, for any boundary-layer solution, $u_\infty(\xi, \infty) = u_e(\xi, 0)$. To satisfy the correct boundary condition at infinity for u_∞ one should then make $u_e(\xi, 0) = u_e(\xi, \infty)$. An easy way of achieving this is to choose $\eta = \psi_e$ as in (26a), since in this case $\sigma' = \text{const} = 1$.

So far only the relation $\psi_{\infty e} = \psi_e$ has been used. If in addition $\psi'_{\infty e} = \psi'_e$ then ψ and ψ_∞ agree to first order at infinity and actually in any region which excludes the boundary. This follows directly from the fact that for $\eta \neq 0$,

$$\psi = \psi_e + \varepsilon \psi' + o(\varepsilon) \quad (20)$$

and also

$$\psi_\infty = \psi_{\infty e} + \varepsilon \psi'_{\infty e} + o(\varepsilon).$$

A further evaluation of the result will be attempted in Section 6.

Construction of optimal approximation. In general, the optimal system cannot be determined *a priori*. However, one may proceed as follows. First the external flow ψ_e is found by solving the proper potential flow problem. Then a boundary-layer solution ψ_ε with respect to any convenient system of coordinates is found by solving the boundary-layer equations (9), or equivalent equations, using (14) and (18) as boundary conditions. By evaluating the integral in (23) one finds ψ'_{ew} , and then the flow due to displacement thickness by solving LAPLACE equation for ψ'_e . ψ_e and ψ'_e being known, an optimal system χ is directly given by (26). Finally, to find ψ_χ it is not necessary to solve the corresponding equation; ψ_χ may be obtained from ψ_ε by a direct substitution in accordance with (12).

5. Examples

Example 1. Flow Towards a Flat Plate

The stream function

$$\psi = \sqrt{\nu U} x f(\bar{y}), \quad (27)$$

where $\bar{y} = \sqrt{U/\nu} y$, and

$$f''' + f f'' - (f')^2 + 1 = 0, \quad (27)$$

$$f(0) = f'(0) = 0; \quad f'(\infty) = 1, \quad f(\infty) \sim \bar{y} - c, \quad (27)$$

$$c = \int_0^\infty [1 - f'(\bar{y})] d\bar{y}, \quad (27)$$

represents an exact solution of the Navier-Stokes equations for $y \geq 0$, satisfying the conditions $\psi = \partial\psi/\partial y = 0$ at $y = 0$, $\psi \sim U x y - c x \sqrt{\nu U}$ as $y \rightarrow \infty$ [cf. previous comments and equation (3c)]. Thus ψ represents a flow normal to an infinite wall, as in Figure 1 (see [1] and [2]).

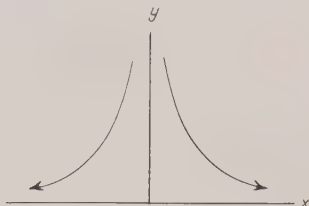


Figure 1

Holding U , x , and y fixed, and letting $\nu \rightarrow 0$, we obtain the external flow. Thus,

$$\psi_e = \lim_{\nu \rightarrow 0} \left[\sqrt{\nu U} x f\left(\sqrt{\frac{U}{\nu}} y\right) \right] = U x y. \quad (28)$$

Choosing the boundary-layer thickness parameter as $\varepsilon = \sqrt{\nu/U}$, and regarding U as constant under the limit process, the boundary-layer approximation with respect to the (x, y) -coordinates is found by applying the \lim_ε process. Thus,

$$\bar{\psi}_\varepsilon = \lim_\varepsilon \frac{\psi}{\varepsilon} = \lim_\varepsilon U x f(\bar{y}) = U x f(\bar{y}) \quad (29a)$$

$$\psi_\varepsilon = \varepsilon \bar{\psi}_\varepsilon = \sqrt{\nu} U x f(\bar{y}). \quad (29b)$$

Finally, the flow due to displacement thickness is found as:

$$\psi'_\varepsilon = \lim_1 \left(\sqrt{\nu} \frac{U x f(\bar{y})}{\varepsilon} - \frac{U x y}{\varepsilon} \right) = -c U x. \quad (30)$$

Thus, the optimal ξ -coordinates are $\xi = f_1(\psi'_\varepsilon)$, or, since the choice of f_1 is inconsequential, $\xi = x$. The optimal η -coordinates are $\eta = f_2(\xi) \psi_\varepsilon$. Since the choice of f_2 does not affect the result, we can take $f_2(\xi) = 1/(U\xi)$, that is, $\eta = y$. Thus, in the present case, the (x, y) -coordinates lead to the optimal boundary-layer approximation, which, as may be seen by comparing ψ_ε with ψ , appears to satisfy the full Navier-Stokes equation.

Example 2. Oseen Flow Past a Semi-Infinite Flat Plate

In this example the Oseen equations will be regarded as a model for the Navier-Stokes equations, rather than as an approximation. In other words, the Oseen equations will be taken as the fundamental 'exact' equations and we shall be concerned with approximations to these equations. The results of the present paper apply, of course, equally well to the Oseen equations as to the Navier-Stokes equations.

The Oseen equation for ψ is:

$$\left(\nu \nabla^2 - U \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \psi = 0. \quad (31a)$$

The boundary conditions for a flat plate are

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \quad \text{at} \quad y = 0, x > 0 \quad (31b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow U, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad |y| \rightarrow \infty, \quad \text{or as} \quad x \rightarrow -\infty. \quad (31c)$$

The stream function ψ_ε is obtained from the equation resulting by the first limit process, which is

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi_\varepsilon = 0, \quad (32a)$$

and from the boundary conditions:

$$\psi_e = 0 \quad \text{at} \quad y = 0, x > 0; \quad \frac{\partial \psi_e}{\partial y} \rightarrow U, \quad \frac{\partial \psi_e}{\partial x} \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad |y| \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty \quad (32b)$$

(cf. Section 2), corresponding to the assumption of no separation. Furthermore, in view of symmetry of the viscous problem about the x -axis, it is expected that the circulation is zero. Thus,

$$\psi_e = U y. \quad (32c)$$

Next, choosing $\varepsilon = V/\bar{U}$, (31a) is written in the form:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \bar{\psi} = 0. \quad (33a)$$

Holding x, y (and nominally, U) constant, and letting $\varepsilon \rightarrow 0$, $\psi \rightarrow \bar{\psi}_z$, we obtain the following boundary-layer equations:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \bar{\psi}_z}{\partial \bar{y}^2} = 0 \quad (33b)$$

and the conditions:

$$\bar{\psi}_z = \frac{\partial \bar{\psi}_z}{\partial \bar{y}} = 0 \quad \text{at} \quad \bar{y} = 0, x > 0. \quad (33c)$$

Furthermore, at infinity, the boundary conditions are:

$$\bar{\psi}_z \sim U \bar{y} + \psi'_{ew} \quad (33d)$$

where ψ'_{ew} is unknown. Hence, the boundary-layer approximation with respect to rectangular coordinates is:

$$\bar{\psi}_z = 2 U \sqrt{x} \left\{ \frac{\bar{y}}{2 \sqrt{x}} \operatorname{erf} \frac{\bar{y}}{2 \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\frac{\bar{y}^2}{4x}} - 1 \right) \right\}. \quad (33e)$$

From equation (33e) we now find

$$\psi'_{ew} = -\frac{2 U \sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}. \quad (34a)$$

Putting $\psi = \psi_e + \varepsilon \psi'$ in equation (31a) and letting $\varepsilon \rightarrow 0$, the perturbation equation is

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi'_e = 0, \quad (34b)$$

or, since ψ represents an irrotational flow as $x \rightarrow -\infty$,

$$\nabla^2 \psi'_e = 0. \quad (34c)$$

The solution corresponding to a distribution of fundamental sources at the wall, which satisfies (34c) and (34a) is:

$$\psi'_e = -2 U \sqrt{\frac{r+x}{2\pi}}. \quad (34d)$$

Since ψ'_e is constant along confocal parabolas, the optimal ξ -coordinates may conveniently be taken as:

$$\xi = \operatorname{Re} \zeta, \quad \zeta = \sqrt{x+iy}, \quad 0 \leq \arg(x+iy) < 2\pi. \quad (35a)$$

The optimal η -coordinates are of the form $\eta = f(\zeta)/y$, or, choosing $f(\zeta) = 1/(2\zeta)$, we may take

$$\eta = \operatorname{Im} \zeta. \quad (35b)$$

The classical approximation is now transformed to optimal coordinates using the transformation (12). The quantities x_ζ, \bar{y}_ζ , are, from (35):

$$x_\zeta = \xi^2, \quad (36a)$$

$$\bar{y}_\zeta = 2\xi\bar{\eta}. \quad (36b)$$

Hence, the optimal approximation is:

$$\bar{\psi}_\zeta = 2U\xi \left\{ \bar{\eta} \operatorname{erf} \bar{\eta} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} (e^{-\bar{\eta}^2} - 1) \right\} \quad (36c)$$

$$\psi_\zeta = 2\sqrt{U} \eta \left\{ \bar{\eta} \operatorname{erf} \bar{\eta} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} (e^{-\bar{\eta}^2} - 1) \right\}. \quad (36d)$$

While it can be seen that the classical approximation has a non-vanishing y -component of velocity at infinity and does not satisfy all the boundary conditions for ψ , and is further characterized by all the 'anomalies' of the Blasius solution, it can be verified that the optimal boundary-layer approximation satisfies exactly the Oseen equation and all the boundary conditions (31)¹⁾.

Example 3. Flow Against a Wedge

For this class of flows, the exact solution of the Navier-Stokes equation is known only when the wedge angle is 180° (cf. Example 1). ψ_e is therefore found by solving the corresponding potential problem, which gives

$$\psi_e = \operatorname{Im} \left[U \frac{2-\alpha}{2} e^{-i\pi\alpha/(2-\alpha)} (z^*)^{2/(2-\alpha)} \right], \quad (37)$$

¹⁾ The solution of OSEEN's equations is due to LEWIS and CARRIER [9], and the phenomenon that the boundary layer approximation in parabolic coordinates is exact, has first been noticed by VAN DYKE [4].

where $z^* = x^* + i y^*$ is the complex variable in the physical plane, U is the speed of the external flow at $z^* = -1$, and $\pi\alpha$ is the apex angle (cf. Figure 2).

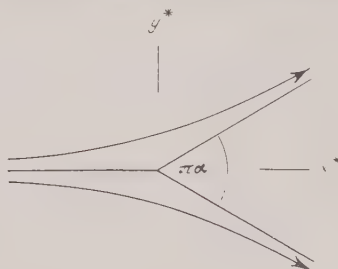


Figure 2

The boundary-layer solution for the wedge has been investigated, among other authors, by H. WEYL [1], who uses 'streamline-potential' coordinates as a basis for the approximation, that is, the coordinates

$$x = \frac{q_e}{U}, \quad y = \frac{\psi_e}{U}, \quad (38)$$

where q_e is the harmonic conjugate of ψ_e , normalized to be zero at the apex. We then have $\psi_e = U y$, or, $u_e \equiv U = u_{ew}$. The boundary-layer equations based on the streamline-potential coordinates admit a solution of the 'similarity' type, namely, of the form

$$\bar{\psi}_z = U \sqrt{x} f_\alpha(\lambda), \quad \lambda = \frac{\bar{y}}{\sqrt{x}} \quad (39a)$$

where $\bar{y} = y \sqrt{U/\nu}$ and

$$f_\alpha(0) = f'_\alpha(0) = 0, \quad f'_\alpha(\infty) = 1. \quad (39b)$$

Furthermore, as $\lambda \rightarrow \infty$, $f_\alpha(\lambda) \sim \lambda - c_\alpha$ where $c_\alpha = \int_0^\infty [1 - f'_\alpha(\lambda)] d\lambda$.

Thus $\psi'_e = U c_\alpha / x$, and, therefore, solving LAPLACE'S equation, we obtain:

$$\psi'_e = -U c_\alpha \xi, \quad \text{where} \quad \xi = \operatorname{Re} \sqrt{x + i y}. \quad (40)$$

It is thus seen that the streamline-potential coordinates (38) are not optimal. They have the limited advantage that ψ_e is contained in the boundary-layer approximation, but ψ'_e is not contained, and all the singularities of the Blasius approximation are present.

The optimal ξ -coordinates may be taken as:

$$\xi = \operatorname{Re} \zeta \quad (41a)$$

and the optimal η -coordinates may be taken as:

$$\eta = \text{Im } \zeta, \quad (41b)$$

where $\zeta = 1/z$. This gives a conformal set of coordinates, which may be called streamline-parabolic. The optimal coordinates in Examples 1 and 2 are special cases of this system.

We have $x_\zeta = \xi^2$, $y_\zeta = 2\xi\bar{\eta}$, and so the optimal boundary-layer approximation is:

$$\bar{\psi}_\zeta = U \xi f_\alpha(2\bar{\eta}), \quad (42)$$

where f_α is the same function as that in equation (39).

Now, as $\bar{\eta} \rightarrow \infty$, $\psi_\zeta \sim 2U\xi\eta - \varepsilon U c_\alpha \xi = \psi_e + \varepsilon \psi'_e$, and further, the solution extends over the entire plane and is free from anomalies. Unfortunately, however, the Navier-Stokes equation is not satisfied by the optimal approximation, except if $\alpha = 1$, corresponding to Example 1.

A special case is $\alpha = 0$, which represents flow past a semi-infinite flat plate, in other words, the non-linear version of Example 2. In this case parabolic coordinates are optimal. They have been used for this case in [10], [11], and [12] where, however, the inclusion of flow due to displacement thickness is not commented upon.

It should be pointed out that, in general, the optimal coordinates cannot be taken as conformal. This is evident, for example, if the streamlines $\psi'_e = \text{const}$ meet the wall at angles other than normal. An example of this is flow past a finite flat plate.

6. Discussion

The significance of Theorem 2 will now be discussed.

First, it is obvious from (15) that if one is interested only in the first approximation to the skin friction, then the choice of coordinates is irrelevant. The purpose of choosing an optimal system is rather to obtain a good picture of the complete flow field. The problem studied here, is, vaguely speaking, that of obtaining as much information as possible within the limits of boundary-layer theory. It is reasonable to require this information, before proceeding to approximations which are definitely beyond boundary-layer theory, for example, in considering higher order approximations to the skin friction.

The flow field of the optimal solution will therefore be compared with a flow field obtained by standard methods, that is with the composite flow field defined as follows: A certain definite edge, terminating the boundary-layer region, is introduced. Within the boundary-layer region, the flow field is taken from a non-optimal boundary-layer solution; outside the edge, a potential flow, consisting of the external flow and flow due to displacement thickness,

is assumed. The viscous and non-viscous solutions are patched together along the edge.

First a general observation can be made. The unpatched solution, that is, the optimal boundary-layer solution, is conceptually clearer. It is free from artificial singularities and therefore easier to handle analytically. The question of where and how to patch and the problems associated with this are avoided.

In order to make a more detailed comparison it is convenient to consider separately the potential part of the flow and the viscous shear waves. These terms are easily defined in the case of Oseen flow, since in that case the velocity field separates into a potential and a transversal wave in such a way that all pressure forces are associated with the former and the viscous shear only with the latter. A suitable definition for the non-linear case will be discussed later. For the time being we may consider the vorticity as representing the viscous shear waves. Thus consider first the vorticity. In the patched solution it is assumed to be zero outside the boundary layer. In the optimal solution it vanishes continuously away from the boundary, but very rapidly (exponentially in Example 2), so that the actual numerical correction is small. However, in the neighborhood of the leading edge, the difference may be large. Consider, for example, the flat plate (Examples 2 and 3). If rectangular coordinates are used, the entire line $x = 0$ is singular. The vorticity tends to infinity as x decreases to zero for any value of y . Furthermore, no vorticity is obtained in the region upstream of the leading edge. These defects are remedied by the use of parabolic coordinates. The artificial singularity along the line $x = 0$ is removed, and a certain upstream vorticity is obtained. In the Oseen case, the optimal solution is, in fact, exact and thus holds in particular near the origin. In the non-linear case, the optimal solution is not correct near the origin, but, qualitatively, comes much closer to the anticipated actual behavior of the exact solution than the solution in rectangular coordinates. It follows from the elliptic nature of the Navier-Stokes equation that an upstream spreading of vorticity actually must occur. Similar remarks apply to the wedge (Example 3), in comparing the solutions in streamline-potential and streamline-parabolic coordinates. Inside the boundary-layer region no improvement in the values of the vorticity may be guaranteed by the use of optimal coordinates. This will be commented on later.

Next consider the potential part of the flow. Outside the boundary layer proper the patched flow field is, by construction, simply the potential part of the optimal solution. In considering the flow inside the boundary-layer region it should be remembered that any boundary layer solution contains part of the external flow and flow due to displacement thickness. In the terminology of Section 4, the relevant comparison is thus between $\psi_e + \varepsilon \psi'_e$ and $\psi'_{\zeta_e} + \varepsilon \psi'_{\zeta_e}$, the former being the correct value (to the order ε). In particular it is of interest to compare the corresponding first derivatives since these represent the

velocity fields. ψ_{z_e} and its first derivatives have the correct values at the wall, but their normal derivatives of higher order are different. Hence, within the boundary-layer region (of thickness $\sqrt{\nu}$) u_{z_e} may show a mistake of order $1/\sqrt{\nu}$. Similarly, only the values of ψ'_{z_e} are correct at the wall, while the normal derivatives are not generally correct. Thus, another error of order $1/\sqrt{\nu}$ generally appears in u'_{z_e} . These errors cause difficulty in connection with the patching at the edge of the boundary layer.

It should be remembered, however, that the criterion of optimality adopted here is still somewhat arbitrary. A more systematic approach would be to use boundary-layer theory as a basis for finding the beginning of an expansion of the form

$$\psi \sim \psi_0(P, \nu) + \varepsilon \psi_1(P, \nu) + \dots \quad (43)$$

where each ψ_n is of order unity uniformly in the complete flow field. (Certain singular points, like the leading edge, would require special consideration.) To the author's knowledge, the first systematic discussion of an asymptotic expansion of the type (43) for the case of singular perturbation problems was given by G. E. LATTI in [3]. Considering the optimal solution in this light, we see that it is valid uniformly up to and including terms of order ε in any region which does not include the boundary, since here only the external terms $\psi_0 + \varepsilon \psi'_e$ are involved. On the other hand, if the region includes the boundary, the optimal solution is not necessarily accurate enough to include terms of order ε since terms of order ε are in general omitted from the boundary-layer equations. Actually, the improvement of the boundary-layer solution discussed in this paper was based mainly on a consideration of the potential part of the flow field, even if some incidental improvement of the viscous shear waves resulted. To investigate the matter further it then seems natural to treat the viscous shear waves and the potential part of the flow field separately.

These terms, used previously in a somewhat vague fashion, may be defined as follows. The potential part is the part obtained by a repeated application of the first limit process, namely

$$\psi_e + \varepsilon \psi'_e + \varepsilon^2 \psi''_e + \dots, \quad \text{where} \quad \psi''_e = \lim_1 \left[\frac{1}{\varepsilon^2} (\psi - \psi_e - \varepsilon \psi'_e) \right], \quad \text{etc.}$$

The viscous shear waves would be the remainder, namely the difference between (43) and its potential part¹⁾. Approximations to the potential part may be found by successively solving LAPLACE'S equation with appropriate boundary con-

¹⁾ The series representing the potential part may be divergent. In this case, the procedure would only amount to a splitting of the asymptotic expansion (43), term by term, into potential and viscous parts. On the other hand, it may be possible to define the potential part exactly, by considering the behavior at ν fixed and $r(\sqrt{x^2 + y^2})$ large, that is, by subtracting from ψ harmonic terms of all finite orders in (r^{-1}) as $r \rightarrow \infty$.

ditions (which for the higher terms are related to the shear waves). Boundary-layer theory may then be applied for the purpose of finding an approximation to the viscous shear waves. This procedure, in a sense, represents patching at the wall, rather than at some edge of the boundary layer. An equivalent procedure is actually used in [3]. If this method is followed the choice of coordinates should be guided by a study of the shear waves alone. In general different coordinates may then appear optimal. It should be noted, however, that for Example 2 and certain special cases of Example 3, LATTI was led to the introduction of parabolic and streamline-parabolic coordinates from a consideration of a series expansion of the form (43). Thus in these special cases different methods yield the same results. A closer integration of the methods of [3] and the methods used in this paper would undoubtedly prove very fruitful.

Finally, a brief comment will be added about the case when separation occurs at the body. The use of boundary-layer theory in this case is hampered by the fundamental difficulty that the relevant external flow ψ_e is different from the potential unseparated flow past the body. Then it is actually not correct to determine the point of separation from the pressure distribution corresponding to the latter flow. In principle, however, if ψ_e is known or assumed, boundary-layer solution may still be regarded as a singular perturbation of ψ_e for $\nu > 0$. A semi-optimal solution, containing at least ψ_e , may then be found by choosing suitable η -coordinates [cf. (26)].

A similar problem arises in connection with ψ'_e when the flow separates at the body. The external disturbance is now influenced by the behavior of the separated region. It is not even clear, *a priori*, if the first external perturbation would be of order ε . However, if the disturbance is of this order, it may still be included, in principle, in the optimal boundary-layer solution by a suitable choice of ξ -coordinates.

Furthermore, it is believed that a complicated singularity may occur at the point of separation, at which the v -velocity becomes infinite [13]. It may be possible that this infinity can be removed by an adequate choice of the ξ -coordinates, in analogy with the removal of the infinity along $x = 0$ in Example 2. This possibility, however, has not been investigated.

REFERENCES

- [1] H. WEYL, *On the Differential Equations of the Simplest Boundary Layer Problems*, Ann. Math. 43, No. 2, 381-407 (April 1942).
- [2] R. VON MISES and K. O. FRIEDRICH, *Fluid Dynamics*, Chapter IV (Brown University [Notes], Summer, 1941).
- [3] G. E. LATTI, *Singular Perturbation Problems*, Thesis, Calif. Inst. of Technol. (1951).
- [4] M. D. VAN DYKE, Private communication.
- [5] P. A. LAGERSTROM, Private communication.

P. A. LAGERSTROM and S. KAPLUN, *The Role of the Coordinate System in Boundary Layer Theory*. VIII International Congress for Theoretical and Applied Mechanics (Istanbul, 1952).

L. BRILLOUIN, *Les Tenseurs* (Dover Publ., New York, 1946).

S. GOLDSTEIN, ed., *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Vol. I (Oxford, 1938).

J. A. LEWIS and G. F. CARRIER, *Some Remarks on the Flat Plate Boundary Layer*, Quart. appl. Math. 7 (1949).

Akademia Nauk S.S.S.R., N. E. KOCHIN, *Sobranie Sochinenii*, Vol. II, Collected Works (published by U. S. S. R. Academy of Sciences, Moscow and Leningrad, 1949).

H. L. ALDEN, *Second Approximation to the Laminar Boundary Layer Flow Over a Flat Plate*, J. Math. Phys. 27, No. 2 (1948).

G. F. CARRIER, and C. C. LIN, *On the Nature of the Boundary Layer Near the Leading Edge of a Flat Plate*, Quart. appl. Math. 6 (1948).

S. GOLDSTEIN, *On Laminar Boundary Layer Flow Near a Position of Separation*, Quart. J. Mech. appl. Math. 1, Part I (March 1948).

Zusammenfassung

Die Grenzschnitnherung zu einem gegebenen Strömungsproblem ist nicht invariant, das heisst, sie hängt von dem Koordinatensystem ab, in dem der herungsprozess durchgeführt wird. Zwar ist die von der Flüssigkeit ausgeübte berungskraft von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig, aber das Strömungsfeld selbst hängt im allgemeinen vom Koordinatensystem ab. Theorem 1 besagt, dass die Grenzschnitlsung eines Koordinatensystems durch eine einfache Substitution in die Lösung irgendeines anderen Systems übergeführt werden kann. Nur wenn die zwei Koordinatensysteme durch eine ganz spezielle Beziehung verbunden sind, bleibt das entsprechende Strömungsfeld dabei unverändert. Diese Abhängigkeit des Strömungsfeldes von der Wahl des Koordinatensystems wird benutzt, um Theorem 2 zu beweisen, das besagt, dass Koordinatensysteme gefunden werden können, die in dem folgenden Sinne optimal sind: Die entsprechende Grenzschnitlsung ist im ganzen Raum, auch ausserhalb der eigentlichen Grenzschnit, als Näherung gültig. Sie enthält die äussere Potentialströmung und auch die Strömung, die von der Verdrängungswirkung der Grenzschnit herrührt. Durch dieses Theorem wird das Problem hinfällig, wie man die äussere Potentiallösung und die innere Grenzschnitlsung an irgendeinem Rande der Grenzschnit zusammenfügt. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf Strömungen ohne Ablösung, weil die Grenzschnittheorie im Ablsungsfalle mit prinzipiellen Schwierigkeiten behaftet ist. Es wird ausserdem vorausgesetzt, dass die Strömung zweidimensional, stationär und inkompressibel ist. Die letzteren Beschränkungen sind weniger wesentlich und werden in einer demnächst erscheinenden Arbeit diskutiert.

(received: June 7, 1953.)

Contribution à l'étude des compresseurs axiaux supersoniques

Par PIERRE SCHWAAR, Zurich¹⁾

I. Introduction

Définitions et généralités

Dans un compresseur axial ordinaire, les transformations énergétiques subies par le fluide véhiculé dans l'ailetage s'effectuent en régime d'écoulement subsonique. En particulier, l'énergie de pression est engendrée par ralentissement continu de l'écoulement relatif dans les aubages. Au sens actuel du terme, un compresseur axial est dit «supersonique» lorsque son ailetage est le siège d'ondes de choc au moyen desquelles l'énergie cinétique communiquée au fluide par les aubages moteurs est partiellement ou entièrement transformée en énergie de pression. Considérons un étage de compresseur axial supersonique: les ondes de choc, frontales ou obliques, peuvent se produire dans l'aubage moteur, dans l'aubage directeur ou dans les deux simultanément. Quand elles sont frontales, l'écoulement relatif aval est subsonique; quand elles sont obliques, cet écoulement peut être subsonique ou supersonique. Un aubage est dit «transsonique» lorsque l'écoulement relatif du fluide y passe du régime supersonique au régime subsonique par l'entremise d'une ou de plusieurs ondes de choc²⁾. Un aubage où cette transition s'effectue par ralentissement continu de l'écoulement ne présente actuellement aucun intérêt pratique. Enfin, un aubage est dit «subsonique», respectivement «supersonique» lorsque l'écoulement relatif du fluide y est entièrement subsonique, respectivement supersonique³⁾.

On distingue ainsi toute une gamme de compresseurs axiaux supersoniques dont trois du type à ondes de choc frontales semblent retenir plus spécialement l'attention des turbomécaniciens:

- a) Aubage directeur subsonique, aubage moteur transsonique;
- b) aubage directeur transsonique, aubage moteur subsonique;
- c) aubage directeur transsonique, aubage moteur supersonique.

L'étude des compresseurs axiaux supersoniques se justifie par le rendement élevé de la compression par ondes de choc (figure 1). Mais la réalisation d'une telle machine pose quelques problèmes ardu. Celui que nous traiterons dans

¹⁾ Société Ardag S.A., Développement et Recherches appliquées.

²⁾ Cette définition ne s'applique qu'à un aubage de compresseur. L'aubage directeur d'une turbine de LAVAL est un aubage transsonique.

³⁾ Les définitions de cet alinéa n'ont évidemment rien d'absolu. Elles correspondent à l'état actuel de la technique.

te note est le premier à résoudre: c'est le problème fondamental de l'écoulement du fluide dans l'ailetage. Nous limiterons notre étude au cas de la compression par ondes de choc stationnaires frontales.

Le problème aéro-thermodynamique que nous allons aborder diffère de celui qu'on rencontre dans le dessin d'aubage du compresseur axial subsonique en ce que la présence d'ondes de choc dans l'ailetage introduit un mécanisme

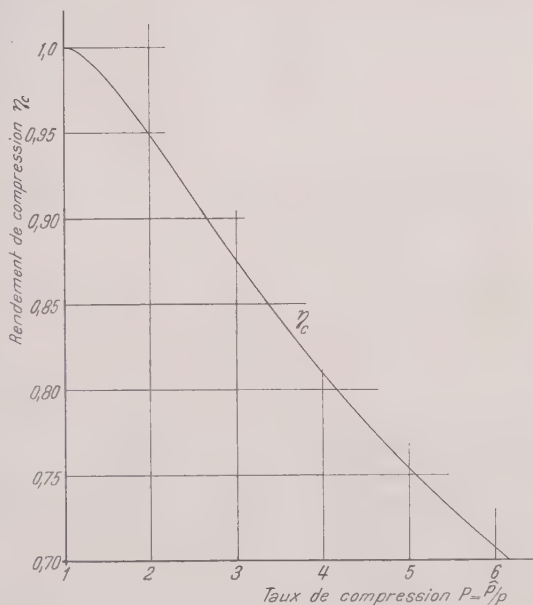


Figure 1

Rendement de la compression par onde de choc ($k = 1,4$).

particulier qui impose à l'écoulement de révolution des conditions cinématiques et dynamiques bien déterminées et très restrictives.

Il s'agit tout d'abord de réaliser l'onde de choc frontale. Nous supposons cet effet que la veine fluide est limitée par des parois cylindriques coaxiales et que l'écoulement giratoire qui aborde l'onde de choc se trouve en équilibre radial, c'est-à-dire qu'il s'effectue sur des cylindres coaxiaux à l'amont immédiat de l'onde de choc, ce qui n'introduit pratiquement aucune restriction importante. On voit alors que chaque surface de choc frontale, limitée par les intrados et l'extrados de deux ailettes adjacentes et par les parois cylindriques intérieure et extérieure, est une portion d'hélicoïde radiale à pas constant. En effet, considérons un rayon traversant l'écoulement à l'endroit du choc. Dans

l'hypothèse que nous venons d'admettre, chaque vecteur vitesse qui le coupe lui est perpendiculaire. La surface de choc frontale devra donc contenir un rayon. Mais l'écoulement giratoire présentant une symétrie de révolution¹⁾, la surface de choc est une hélicoïde radiale à pas constant. Réciproquement, il est évident que c'est la seule surface dont les normales définissent un champ de directions qui coïncident avec celles des vecteurs vitesses d'un écoulement à révolution en équilibre radial, écoulement dont la fonction de gauchissement est ainsi déterminée d'avance. En fait, l'équation de l'hélicoïde radiale en coordonnées cylindriques étant :

$$z = m \varphi \quad \text{avec} \quad m = \frac{h}{2\pi},$$

où h est le pas, la pente principale de l'hélicoïde est donnée par

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{dz}{r d\varphi} = \frac{m}{r}.$$

La fonction de gauchissement de l'écoulement giratoire est donc définie à un signe près par

$$\operatorname{tg} \alpha(\beta) - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha'} = \frac{r}{m} = C' r. \quad (1)$$

On retrouve ainsi la distribution radiale des angles des écoulements giratoires classiques du type à potentiel ($c_u r = \text{const}$, $c_m = \text{const}$). C'est une restriction importante.

Considérons alors les conditions dynamiques qui régissent l'évolution transsonique envisagée: tout écoulement vérifiant la relation (1) et la condition d'équilibre radial en amont de l'onde de choc (en particulier l'écoulement irrotationnel), ne sera pas en équilibre radial à son aval. Il se produira donc généralement un brusque déséquilibre à la traversée de l'onde de choc, avec décollement éventuel de la veine et toutes les conséquences que cela comporte. Dans le cas de l'aubage moteur transsonique, c'est non seulement la transformation énergétique par choc qui s'en trouvera affectée, mais l'énergie elle-même communiquée au fluide par l'aubage.

La réalisation d'un compresseur axial supersonique à ondes de choc frontales et rendement élevé dépend ainsi des conditions suivantes:

Existe-t-il un écoulement giratoire supersonique qui vérifie la relation (1) et la condition d'équilibre radial des deux côtés de l'onde de choc? Cas échéant, le nombre de MACH local de cet écoulement variera suivant une loi bien déterminée le long du rayon avant (et après) le choc. A quelle distribution radiale d'énergie d'arrêt cette loi correspond-elle? Peut-on réaliser cette distribution d'énergie par l'entremise d'un ou de plusieurs aubages moteurs (nécessairement

¹⁾ C'est une hypothèse fréquente et difficile à éviter.

soniques ou supersoniques au sens défini plus haut) qui effectueraient sur fluide un travail adéquat fonction du rayon? Enfin, la condition d'équilibre radial n'impliquant pas la stabilité radiale, les divers écoulements envisagés remplissent-ils cette dernière condition? Remarquons encore qu'au cas où le choc se produit dans l'aubage moteur, c'est au moins un étage préparatoire qui précédera les étages transsoniques.

La compression transsonique par ondes de choc frontales pose encore, pour les types d'aubages utilisables à cette fin, un problème particulier sur lequel nous reviendrons dans la conclusion de cette note: le problème essentiel est la stabilisation de l'onde de choc dans l'aubage.

Passant à l'étude analytique des questions que nous venons de formuler, on pourrait se proposer de traiter simultanément les cas de l'aubage moteur et de l'aubage directeur transsoniques. On passerait du premier au second en annulant la vitesse de rotation et en remplaçant les symboles des grandeurs relatives par ceux des grandeurs absolues qui caractérisent l'écoulement. Malheureusement, la géométrie des triangles de vitesses fait intervenir des relations peu maniables dans l'expression de la condition d'équilibre radial, de sorte que le cas de l'aubage moteur transsonique ne donne pas lieu à une solution explicite.

Nous étudierons donc premièrement le cas où l'onde de choc se produit dans l'aubage directeur. Sans nous prononcer ici sur les avantages et inconvénients probables des différents types de compresseurs [1], [2]¹⁾, disons seulement que c'est le type c) à aubage moteur supersonique que nous avons plus particulièrement en vue. Nous reviendrons plus tard sur le cas de l'aubage moteur transsonique.

Les équations et le rendement du choc frontal

Nous rappellerons tout d'abord brièvement les équations qui rendent compte du phénomène du choc frontal. Ce sont: l'équation de continuité:

$$\rho c = \hat{\rho} \hat{c}^2, \tag{2}$$

l'équation des quantités de mouvement:

$$p + \rho c^2 = \hat{p} + \hat{\rho} \hat{c}^2 \tag{3}$$

l'équation de l'énergie:

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}} + \frac{\hat{c}^2}{2}. \tag{4}$$

¹⁾ Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, page 150.

²⁾ La signification des symboles est claire ou est indiquée dans le texte. Les lettres qui désignent des grandeurs d'état thermodynamiques derrière l'onde de choc sont pourvues d'un accent circonflexe.

En éliminant alternativement deux des six variables $p, q, c, \hat{p}, \hat{q}, \hat{c}$, on obtient une série d'équations du deuxième degré à deux groupes de solutions: les unes sont triviales:

$$p = \hat{p}, \quad q = \hat{q}, \quad c = \hat{c} \quad (\text{il n'y a pas de choc});$$

les autres constituent les équations du choc frontal. Nous les écrirons sous forme sans dimension, en introduisant à cet effet les nombres de MACH locaux:

$$M = \frac{c}{\sqrt{k} \frac{p}{q}}, \quad \hat{M} = \frac{\hat{c}}{\sqrt{k} \frac{\hat{p}}{\hat{q}}}, \quad (1)$$

où $k = c_p/c_v$ est l'exposant adiabatique, que nous admettrons évidemment constant. On obtient ainsi [3], [4]:

$$\frac{\hat{p}}{p} - \frac{\hat{q}}{q} = \frac{k-1}{2} \left[1 + \frac{\hat{p}}{p} \right] \left[\frac{\hat{q}}{q} - 1 \right], \quad (\text{HUGONIOT}) \quad (2)$$

$$P = \frac{\hat{p}}{p} = 1 + \frac{2k}{k+1} (M^2 - 1), \quad (3)$$

$$\frac{q}{\hat{q}} = \frac{2}{(k+1) M^2} + \frac{k-1}{k+1}. \quad (4)$$

En outre:

$$\frac{\hat{T}}{T} = \frac{[2 + (k-1) M^2] [2k M^2 - (k-1)]}{(k+1)^2 M^2}, \quad (5)$$

$$\hat{M}^2 = \frac{2 + (k-1) M^2}{2k M^2 - (k-1)}. \quad (6)$$

On définit enfin le rendement adiabatique de la compression par onde de choc:

$$\eta_c = \frac{\text{travail de compression adiabatique de } p \text{ à } \hat{p}}{\text{différence d'énergie cinétique avant et après le choc}}.$$

Les relations de DE SAINT-VENANT et d'HUGONIOT permettent d'écrire [5]:

$$\eta_c = \frac{[P^{(k-1)/k} - 1] \left[\frac{k+1}{k-1} P + 1 \right]}{P^2 - 1}. \quad (7)$$

La figure 1 donne à titre de rappel le graphique de η_c en fonction du taux de compression statique $P = \hat{p}/p$ pour $k = 1,4$.

II. L'écoulement transsonique dans l'aubage directeur

La condition d'équilibre radial s'exprime par:

$$\frac{dp}{dr} = -q \frac{c_a^2}{r}, \quad (8)$$

ous transformerons cette relation en introduisant l'angle α de l'écoulement avec la direction périphérique et les variables sans dimension M et $y = r/r_i$, où r_i désigne un rayon d'aubage de référence que nous prendrons égal au rayon antérieur. Un calcul élémentaire donne:

$$\frac{d}{dy} \log p = k M^2 \frac{\cos^2 \alpha}{y}. \quad (12a)$$

Logarithmons et dérivons (7) par rapport à y et introduisons la condition d'équilibre radial (12a) devant et derrière l'onde de choc¹:

$$k \hat{M}^2 \frac{\cos^2 \alpha}{y} = k M^2 \frac{\cos^2 \alpha}{y} + \frac{2k}{k+1+2k(M^2-1)} \cdot \frac{dM^2}{dy}.$$

Remplaçons dans cette relation \hat{M}^2 par sa valeur (10). On obtient, toutes réductions faites, l'équation différentielle:

$$k \cos^2 \alpha \frac{dy}{y} = \frac{dM^2}{(1/k + M^2)(1 - M^2)}. \quad (13)$$

Portons enfin dans (13) la condition (1):

$$\operatorname{tg} \alpha = C y, \text{ c'est-à-dire } \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + C^2 y^2}. \quad (1a)$$

Après décomposition en éléments simples, l'équation différentielle prend la forme:

$$\frac{dy}{y} - \frac{C^2 y dy}{1 + C^2 y^2} + \frac{1}{k+1} \left[\frac{dM^2}{M^2-1} - \frac{dM^2}{M^2+1/k} \right] = 0 \quad (14)$$

Dont l'intégration est élémentaire:

$$(k+1) \log \frac{y}{\sqrt{(1+C^2 y^2)/(1+C^2)}} = \log \left[\frac{M_i^2-1}{M_i^2+1/k} \cdot \frac{M^2+1/k}{M^2-1} \right], \quad (15)$$

c'est-à-dire

$$M^2(y) = 1 + \frac{k-1}{k} \frac{M_i^2+1/k}{M_i^2-1} \left[\frac{y}{\sqrt{(1+C^2 y^2)/(1+C^2)}} \right]^{k+1} - 1. \quad (16)$$

C'est la fonction $M^2(y)$ cherchée qui détermine avec la relation (1a) l'écoulement giratoire supersonique qui assure une onde de choc frontale et satisfait aux conditions d'équilibre radial prescrites. Pour $y \rightarrow \infty$, M^2 tend vers une limite bien définie $M_{i \rightarrow \infty}^2 \geq 1$ fonction de $M_i^2 \geq 1$ et de C . L'écoulement est

¹ Le problème de l'équilibre radial derrière l'onde de choc a été mentionné par W. A. LOEB [1]. A notre connaissance, aucune étude analytique des influences radiales n'a été publiée jusqu'à ce jour.

donc supersonique dans tout l'espace annulaire $1 \leq \gamma \leq \infty$. Fait très important, car il montre, contrairement à certaines prévisions [1], qu'il n'existe en principe aucune limite aéro-thermodynamique à la valeur du rapport caractéristique $\nu = \nu_i/\nu_e$ d'un aubage directeur transsonique. La hauteur relative des ailettes et, par conséquent, le débit spécifique¹⁾ de l'étage seront cependant limités par les contraintes mécaniques de l'aubage moteur²⁾.

Nous comparerons la distribution $M^2(\gamma)$ donnée par (16) à celle d'un écoulement giratoire irrotationnel possédant la même constante de gauchissement C et le même nombre de MACH local M_i au rayon intérieur. En combinant les relations (1a) et (12a) avec les équations fondamentales:

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \quad (17)$$

et

$$p T^{-k/(k-1)} = p^* T^{*-k/(k-1)} \quad (18)$$

on obtient la relation correspondant à (16):

$$M^2(\gamma) = \frac{M_i^2}{\frac{\gamma^2 - 1}{1 + C^2 \gamma^2} + \frac{k-1}{2} M_i^2 + \frac{(1 + C^2) \gamma^2}{1 + C^2 \gamma^2}} \quad (19)$$

La figure 2 reproduit les graphiques des fonctions de MACH définies par les équations (16) (écoulement supersonique devant l'onde de choc), (10) et (16) (écoulement subsonique derrière l'onde de choc) et (19) (écoulement irrotationnel) pour $\alpha_i = 30^\circ$ et $M_i = 1,363$, ce qui correspond à $P_i = 2$ avec $k = 1,4$ ³⁾. Bien que cette comparaison permette d'ores et déjà d'affirmer que l'écoulement transsonique vérifie la condition de stabilité radiale des deux côtés de l'onde de choc, nous n'établirons définitivement cette propriété qu'après avoir étudié la distribution radiale d'énergie correspondant à (16).

A cet effet, nous supposerons que l'écoulement giratoire défini par (16) et (1a) est engendré depuis le repos [état d'arrêt initial uniforme (p_0^* , T_0^*)] par un ou plusieurs étages préparatoires qui effectuent sur le fluide un travail bien déterminé et fonction du rayon, que nous allons calculer. L'état d'arrêt initial et l'état d'arrêt (p^* , T^*) du fluide devant l'onde de choc sont liés par l'équation de l'énergie:

$$T^* = T_0^* + \frac{A}{c_p} H(\gamma), \quad (20)$$

¹⁾ Débit rapporté à l'unité de section frontale de l'étage.

²⁾ Nous verrons plus loin qu'il y a lieu d'envisager encore d'autres limites au rapport caractéristique ν .

³⁾ Cet exemple numérique ne représente pas nécessairement un cas d'application pratique. Il mettra surtout en relief l'importance des influences radiales étudiées ici.

en $H(y)$ est le travail effectif ($\text{kgm} \cdot \text{kg}$) en question. L'évolution thermodynamique du fluide peut être décrite par la relation polytropique:

$$p^* T^{*-m/(m-1)} = p_0^* T_0^{*-m/(m-1)} \quad (21)$$

qui lie les états d'arrêt initial et devant l'onde de choc. De plus:

$$\frac{m}{m-1} = \eta_p \frac{k}{k-1}. \quad (22)$$

Il est indiqué d'admettre pour k une valeur moyenne constante pour tout écoulement, il est nécessaire de tenir compte de la variation du rendement

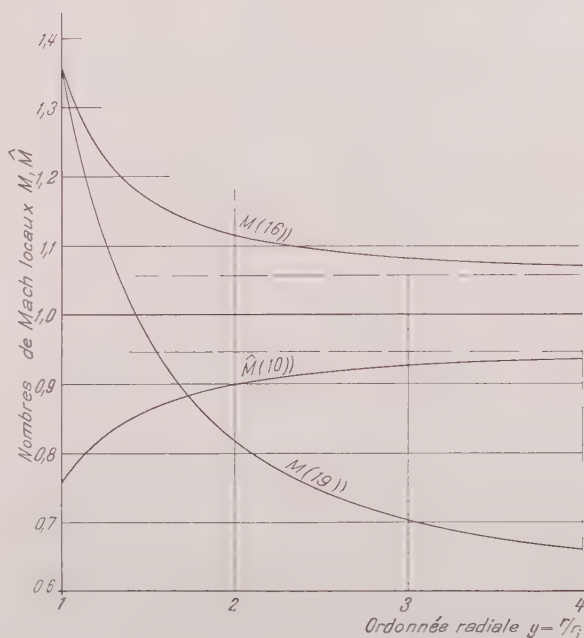


Figure 2

Nombres de MACH locaux des écoulements (16), (10) et (19).

polytropique η_p sur le rayon. Nous avons montré ailleurs l'importance de ce fait pour les compresseurs axiaux subsoniques [6]. Dans le cas qui nous occupe, le calcul de $H(y)$ avec η_p constant conduirait à une détérioration inadmissible de l'onde de choc, consécutive à celle du profil des vitesses à son amont. Nous errons d'ailleurs que l'admission d'une fonction $\eta_p(y)$ ne complique nullement le calcul. Les états statique et d'arrêt du fluide devant l'onde de choc sont liés

par les relations (17) et (18), qui permettent d'écrire:

$$\frac{p^*}{p} = \left[1 - \frac{k-1}{2} M^2 \right]^{k/(k-1)},$$

de sorte que (21) peut se mettre sous la forme

$$p \left[1 - \frac{k-1}{2} M^2 \right]^{k/(k-1)} = p_0^* \left[1 - \frac{H}{H^*} \right]^{m/(m-1)}, \quad (21a)$$

où nous avons posé:

$$H_0^* = \frac{c_p T_0^*}{A}.$$

Revenons puis à l'équation (21) par rapport à y et introduisons la condition d'équilibre radial (12a) devant l'onde de choc:

$$\left. \begin{aligned} k M^2 \frac{\cos^2 x}{y} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{d}{dy} \left[\log \left(1 - \frac{k-1}{2} M^2 \right) \right] \\ = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{d}{dy} \left[\eta_r \log \left(1 - \frac{H}{H^*} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Le membre de gauche de cette équation différentielle est une fonction connue de y , donnée par (16) et (18). Les variables étant séparées (23) s'intègre par simple quadrature. On obtient ainsi:

$$\left. \begin{aligned} \eta_r \log \left[1 - \frac{H(y)}{H^*} \right] - \eta_{r0} \log \left[1 - \frac{H_0}{H^*} \right] \\ - \log \left[\frac{1 - \frac{k-1}{2} M^2(y)}{1 - \frac{k-1}{2} M_0^2} \right] = (k-1) \int_0^y \frac{M^2(\xi) \cos^2 x(\xi)}{\xi} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

et, finalement:

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{H(y)}{H^*} = \left[1 - \frac{H_0}{H^*} \right]^{\eta_{r0}/\eta_r} \left[\frac{1 - \frac{k-1}{2} M^2(y)}{1 - \frac{k-1}{2} M_0^2} \right]^{1/\eta_r} \\ \exp \left[\frac{k-1}{\eta_r} \int_0^y \frac{M^2(\xi) \cos^2 x(\xi)}{\xi} d\xi \right], \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

où nous avons introduit la fonction η_r et la simplicité avec laquelle elle s'introduit dans le calcul. Il est à peine besoin de remarquer que la formule (25) est générale et qu'elle s'applique à tout écoulement gazeux compressible. Nous donnons sous forme de tableau quelques détails numériques du calcul

du rapport $H(y)/H_0^*$ pour l'exemple considéré plus haut, que nous spécialisons cet effet pour $y_e = 2$ ($\nu = 0,5$), $T_0^* = 288^\circ \text{K}$, $c_p = 0,240$, c'est-à-dire $H_0^* = 29530 \text{ m}$ et $H_i = 6000 \text{ m}$.

y	1	1,25	1,5	1,75	2
$M^2 \frac{\cos^2 \alpha}{1}$	1,391	0,793	0,519	0,364	0,266
\dot{r}	0	0,259	0,413	0,527	0,598
$\eta_p(y)$	0,800	0,895	0,900	0,885	0,710
$\left[1 + \frac{H_i}{H_0^*}\right]^{\eta_p/\eta_p(y)}$	1,2032	1,1798	1,1787	1,1820	1,2316
$\left[1 + \frac{k-1}{2} M^2(y) \frac{1}{1 + \frac{k-1}{2} M_i^2}\right]^{1/\eta_p(y)}$	1	$\frac{1}{1,0605}$	$\frac{1}{1,0870}$	$\frac{1}{1,1033}$	$\frac{1}{1,1417}$
$\frac{H(y)}{H_0^*}$	0,203	0,249	0,303	0,359	0,511

Cet exemple numérique montre bien l'importance des influences radiales. Nous en tirons deux conclusions:

a) L'écoulement giratoire transsonique est stable. En effet, le travail $H(y)$ croissant avec le rayon, il en est de même de la température d'arrêt au droit de l'onde de choc. Mais le nombre de MACH local ne diminuant pas du rayon intérieur au rayon extérieur dans la même mesure que pour l'écoulement irrotationnel, le drall de l'écoulement supersonique (16) augmentera avec le rayon: cet écoulement est donc stable. À plus forte raison, l'écoulement subsonique en aval de l'onde de choc est stable, car son nombre de MACH local croît avec le rayon.

b) Supposons que la distribution radiale $H(y)$ du travail préparatoire soit réalisée par un seul aubage moteur. Si H était constant, l'écoulement en amont de cet aubage serait irrotationnel, en vertu de son énergie d'arrêt constante et de la fonction de gauchissement potentielle (1a) à la sortie de l'aubage. H n'étant pas constant, le drall en amont de l'aubage moteur préparatoire ne le sera pas non plus. Mais il ne pourra décroître du rayon intérieur au rayon extérieur, car l'écoulement giratoire correspondant serait instable. Dès lors, il est facile de voir que le drall en question doit être dirigé en sens inverse de la rotation de la machine, en vertu de la relation fondamentale d'EULER

$$H = \frac{\omega \Delta \vartheta}{g}$$

et de la fonction croissante $H(y)$. Dans ces conditions, seul un aubage moteur préparatoire supersonique entre pratiquement en considération pour engendrer l'écoulement supersonique envisagé, d'une part à cause du contre-drall et de la vitesse périphérique élevée de l'aubage moteur, d'autre part à cause de la variation considérable du travail $H(y)$ sur le rayon, qui engendrerait dans un aubage moteur subsonique une distribution radiale inadmissible des charges aérodynamiques.

Dans l'exemple que nous venons de calculer, le travail de l'aubage moteur préparatoire est 2,5 fois plus grand au rayon extérieur qu'au rayon intérieur. C'est évidemment une difficulté qui se manifesterait dans le dessin de l'aubage et qui fera apparaître une limite aérodynamique au rapport caractéristique ν . Il y a deux moyens efficaces de réduire la différence $H_e - H_i$:

1° Réduire la hauteur relative des ailettes de l'aubage directeur transsonique, ce qui diminuera sa section annulaire et son débit spécifique, mais pas nécessairement celui du compresseur, qui dépend avant tout du rapport ν du premier aubage et de la vitesse d'entrée du fluide.

2° Augmenter l'angle α_i à l'entrée de l'aubage directeur transsonique, ce qui réduira le drall moyen devant l'onde de choc et l'importance des influences radiales, mais également le travail de l'aubage moteur préparatoire et le taux de la compression transsonique.

Dans la plupart des cas, il s'agira donc de chercher une solution de compromis. Nous situerons la question en traitant un deuxième cas limite: celui où l'écoulement supersonique qui aborde l'onde de choc frontale est purement axial. Les influences radiales disparaissent et l'on voit immédiatement qu'il n'existe aucune raison d'engendrer une distribution radiale non uniforme d'énergie mécanique. L'écoulement supersonique en amont de l'onde de choc est donc irrotationnel, abstraction faite de l'influence de la répartition $\eta_p(y)$, et il ne peut être engendré que par un aubage moteur supersonique qui redresse l'écoulement à contre-drall produit à son amont par le premier aubage directeur de la machine. En principe, l'aubage moteur préparatoire est du type à action; pratiquement, il sera avantageux de prévoir une légère réaction, qu'on réalisera en adaptant en conséquence la hauteur des ailettes à la sortie de l'aubage moteur. On réalisera ainsi un étage transsonique à degré de réaction négatif, dont les possibilités sont rapidement évaluées:

Admettons

$$\nu_1 = 0,5 \quad \text{et} \quad c_{1_i} = 0,9 a_{1_i} = 290 \text{ m/s.}$$

Choisissons

$$\alpha_{1_i} = 30^\circ, \quad \text{c'est-à-dire} \quad c_{u_{1_i}} = 251 \quad \text{et} \quad c_{m_{1_i}} = 145,$$

partant

$$\alpha_{1_a} = 49,1^\circ, \quad \text{c'est-à-dire} \quad c_{u_{1_a}} = 125,5 \quad \text{et} \quad c_{m_{1_a}} = 145.$$

choisissons encore

$$u_i = 200, \text{ ce qui donne } \beta_{1_i} = 17,8^\circ,$$

$$u_a = 400, \text{ ce qui donne } \beta_{1_a} = 15,4^\circ.$$

es valeurs de β_{1_i} et β_{1_a} peuvent être pratiquement considérées comme limites inférieures. On obtient ainsi

$$w_{1_i} = 475 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad w_{1_a} = 546 \text{ m/s}.$$

écoulement relatif dans l'aubage moteur est supersonique. Le travail moteur est :

$$H = \frac{u \Delta c_u}{g} = \frac{200 \cdot 251}{9,81} = 5120 \text{ m},$$

est-à-dire

$$H = 12 \text{ kcal/kg} \quad \text{donc} \quad \Delta T(H) = 50^\circ \text{C}.$$

uant à la vitesse de l'écoulement qui aborde l'onde de choc, elle serait approximativement de 560 m/s. On aurait donc $M \cong 1,8$ et, d'après (7) :

$$P \cong 1 \quad \frac{2,8}{2,4} \cdot 2,24 = 3,6,$$

qui correspondrait à un rendement de compression $\eta_c \cong 0,835$. En admettant un rendement adiabatique total de l'étage de 0,75, le taux de compression total serait

$$\Delta T(H)_{ad} = 37,5^\circ \text{C}, \quad P^* = 1,535 \quad (\text{CINA } 0).$$

On voit le désavantage du procédé: Le travail moteur est limité par la condition d'entrée axiale dans l'aubage directeur transsonique et par les angles d'entrée relatifs dans l'aubage moteur. L'expansion nécessaire à la production de l'écoulement supersonique axial est compensée par un choc intense de rendement médiocre. Il n'en résulte qu'un taux de compression relativement faible pour l'étage entier. On pourrait se contenter d'engendrer un écoulement relatif sonique ou légèrement supersonique devant l'aubage moteur. Mais, pour un débit donné, cela reviendrait à réduire le travail moteur réalisable et par conséquent, le taux de compression de l'étage.

Il est donc nécessaire d'utiliser un écoulement transsonique giratoire pour réaliser dans des conditions favorables un taux de compression P^* voisin de 2, valeur qui, à notre avis, correspond à ce qu'on devrait attendre d'un étage de compression par onde de choc frontale.

Nous pensons que les deux exemples esquissés situent bien la question de compression transsonique dans l'aubage directeur et montrent suffisamment l'importance des formules (16) et (25).

Remarques

Dans le calcul de la distribution radiale $H(y)$, nous avons admis que l'équation polytropique (21) lie les états d'arrêt initial et devant l'onde de choc. Il en est résulté des calculs simples. Mais il va de soi qu'on aurait tout aussi bien pu détailler l'évolution thermodynamique du fluide en admettant un rendement polytropique η_{pe} pour l'expansion dans le premier aubage directeur et un rendement polytropique η_{pc} pour la compression (états d'arrêt!) dans l'aubage moteur. Sans être inextricables, les calculs en seraient cependant devenus fastidieux, raison pour laquelle nous n'avons pas jugé opportun de les reproduire ici. Remarquons seulement que notre rendement polytropique est ainsi fonction des rendements η_{pe} et η_{pc} et qu'il est évident que son admission devra si possible être étayée par l'expérience.

Dès le début des calculs, nous avons introduit des variables sans dimension en particulier des nombres de MACH locaux. Ici également, ce choix a été dicté par les simplifications qui en résultent dans le développement des formules plutôt que par souci d'esthétique. On reviendra aisément aux grandeurs dimensionnelles à l'aide de la formule (20a) et des relations fondamentales. Nous n'écrirons ici que les expressions de la vitesse locale du son en amont et en aval de l'onde de choc :

$$a = \sqrt{\frac{(k-1)gH}{1 + \frac{k-1}{2}M^2}} \quad a_0^*$$

et

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{\hat{T}}{T}} \quad a = \sqrt{\left[1 + \frac{(k-1)gH}{a_0^{*2}}\right] \frac{kM^2 - \frac{k-1}{2}}{\left[\frac{k+1}{2}\right]^2 M^2}} \quad a_0^*.$$

où a_0^* est la vitesse locale du son à la température d'arrêt initiale T_0^* .

Enfin, nous n'avons donné aucune indication sur le calcul de la distribution radiale des vitesses devant l'aubage moteur. Leurs composantes périphériques sont déterminées par la condition (1) et la fonction $H(y)$ en vertu de l'équation fondamentale d'EULER, mais il y aurait lieu de tenir compte des déplacements radiaux des lignes de courant à la traversée de l'aubage moteur, qui risquent d'être considérables à cause de la distribution radiale non uniforme de l'écoulement.

du fluide devant l'onde de choc. Nous avons abordé ce problème dans l'étude [1] déjà citée. Nous n'y reviendrons donc plus.

III. Conclusions

Dans le cadre d'un exposé destiné à établir quelques principes généraux, nous n'avons discuté que des problèmes directement accessibles à l'étude analytique. Les conditions d'écoulement étudiées sont nécessaires à la réalisation d'un compresseur axial supersonique à ondes de choc frontales possédant un rendement de compression élevé. Elles ne sont nullement suffisantes, car elles assurent pas la stabilité des ondes de choc. Cette condition importante n'est satisfaite que si chaque élément de flux annulaire évolue, en aval du choc, vers une section de sortie de l'aubage bien déterminée, fonction des conditions d'écoulement au droit de l'onde de choc, partant du rayon. C'est un problème dont la solution devra être recherchée pour chaque cas particulier et qui sera d'autant plus facile à résoudre que les paramètres de l'écoulement varieront moins avec le rayon d'aubage, c'est-à-dire que l'intensité de rotation du fluide sera plus faible. De toute façon, il en résultera une servitude supplémentaire dans le dessin d'aubage et, cas échéant, une nouvelle limite aéro-thermodynamique au rapport caractéristique $r = r_e/r_i$, qui dépendra, entre autres facteurs, des coefficients de charge aérodynamique admissibles de l'aubage. Il conviendrait également de comparer les possibilités du compresseur à ondes de choc frontales dans l'aubage directeur et celles des autres types de compresseurs axiaux supersoniques. On trouvera quelques prévisions à ce sujet dans les études [1] et [2]. Nous nous bornerons à rappeler ici une difficulté inhérente à la compression transsonique dans l'aubage directeur, à savoir les accroissements élevés du fluide dans l'aubage moteur, dus à l'utilisation d'un écoulement relatif supersonique.

On a insisté récemment sur les difficultés rencontrées dans la stabilisation de l'onde de choc dans l'aubage moteur [7]. Ces difficultés auraient même motivé l'abandon de ce mode de compression au profit de celui étudié ici. Il est malheureusement difficile de savoir si l'on a réalisé dans ce cas les conditions nécessaires à l'existence d'un écoulement relatif transsonique stable: dans maints pays, l'étude des compresseurs axiaux supersoniques a un côté «Défense nationale». On en est ainsi réduit à des conjectures.

On a également insisté sur l'épaississement des couches limites à la traversée de l'onde de choc et sur les difficultés qui en résultent. La succion ou le soufflage éventuels de ces couches limites est évidemment plus facile à réaliser dans l'aubage directeur que dans l'aubage moteur. Sans minimiser l'importance de ce problème, nous pensons toutefois qu'en tenant compte de la distribution radiale non uniforme du rendement η_p dans le dessin d'aubage, on réduira

dans une large mesure une difficulté qui semble aujourd'hui prohibitive. Qu'il en soit, l'abandon de la compression transsonique dans l'aubage ne peut se justifier que par l'impossibilité de réaliser des conditions d'écoulement adéquates, c'est-à-dire analogues à celles que nous venons d'étudier pour le cas de l'aubage directeur transsonique. Comme nous l'avons dit plus haut, c'est une question sur laquelle nous nous proposons de revenir plus tard.

Je tiens à remercier Monsieur F. ROTH, Directeur de la Société Ardag SA pour son autorisation de publier cette étude. Qu'il me soit également permis d'exprimer mes remerciements à Monsieur le professeur J. ACKERET, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W.A. LOEB, *A Study of the Supersonic Axial-Flow Compressor*, J. appl. Mech. **16**, 19 (1949).
- [2] J. E. B. PERKINS, *The Supersonic Axial Compressor*, Shell Aviation News **20** (1952).
- [3] R. SAUER, *Einführung in die theoretische Gasdynamik* (Springer-Verlag, Berlin, 1951).
- [4] F. SCHUBERT, *Zur Theorie des stationären Verdichtungsstosses*, ZAMM. **23**, (1943).
- [5] B. CHAIX, *Le rendement de la compression par ondes de choc stationnaires d'un gaz animé d'une vitesse supersonique*, Schweiz. Arch. **14**, 39 et 161 (1951).
- [6] P. SCHWAAR, *Quelques remarques sur le calcul aéro-thermodynamique de l'aubage des turbomachines axiales*, Bull. tech. Suisse romande **78**, 245 (1952).
- [7] H. DICKMANN, *Bericht über die Diskussionstagung des VDI.-Fachausschusses für Strömungsforschung am 6. und 7. Februar 1952 in Berlin* (A. WEISE, Berlin, von Überschall-Axialverdichtern), ZVDI. **94** (1952).

Summary

In an attempt to study the three-dimensional flow in a supersonic axial compressor, the normal-shock-in-stator case has been considered. It is shown that the kinematic and dynamic conditions which are necessary to produce a normal shock wave and a radially stable transsonic flow are very restrictive:

- (i) The radial distribution of the flow angles in front of the shock wave is found to be that of the classical irrotational rotational flows.
- (ii) The radial equilibrium condition of the flow on both sides of the shock wave requires a well determined radial distribution of the MACH numbers of the velocities approaching the shock, which results in a non-uniform radial equilibrium distribution of the transsonic flow.

Furthermore, it is necessary to take in account the radial variations of the polytropic stage efficiency η_p in order to induce the prescribed energy distribution through one or several shock-free rotor-blade rows. A numerical example shows the importance of the radial effects. Finally, some critical comments are made on the shock-in-rotor case.

(Reçu: le 6 mai 1953.)

Note on the Boundary Layer on a Rotating Sphere

By SWAMI DAYAL NIGAM, Kharagpur, India¹⁾

1. Introduction

HOWARTH²⁾ has investigated the problem of the flow engendered by a sphere rotating uniformly about a diameter in otherwise undisturbed fluid. He considers the sphere to be made up of two hemispheres joined smoothly at the equator. The flow being symmetrical about the equatorial plane, the boundary layers originate at the poles and develop towards the equator where they impinge on each other. He has obtained a solution of the boundary-layer equations in the form of power series and has shown that the flow at the poles approximates to the rotating disk solution of VON KÁRMÁN (1921). Due to lack of rapid convergence this solution cannot be used in the vicinity of the equator. Even the approximate solution of the same problem by the Kármán-Momentum Integral Method does not give satisfactory results near the equator, because some of the assumptions involved break down. The solutions are defective in so far as they do not give any indication of outflow of the liquid near the equator. HOWARTH attributes the cause of the failure of his solutions near the equator to the boundary-layer equations, which, he says, must fail to represent the region of interaction between the two impinging layers on account of the parabolic character of the equations. We, however, do not agree with this explanation, because the assumptions of the boundary-layer theory do not break down at the equator, and think that the equations are quite sufficient to describe the interaction at the equator.

In this note we have shown that it is possible to construct a solution in power series form which fulfils all the physical requirements of the problem. It is difficult to say anything definite about the convergence of the solutions near the equator. But the solutions have a definite advantage over those of HOWARTH, because apart from the inflow at the poles they give a clear indication of the outflow near the equator.

2. The Boundary-Layer Equations

In the following treatment r , θ and φ represent the spherical polar coordinates with r measured radially outwards from the centre of the sphere, θ measured from the axis of rotation and φ the azimuth. w , u , v represent the velocities in the directions of r , θ and φ increasing respectively. The equations of motion in spherical polar coordinates with terms of azimuthal variation omitted, are

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{u}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{u^2 + v^2}{r} \\ & = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\nabla^2 w - \frac{2w}{r^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{2u \cot \theta}{r^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

¹⁾ Department of Applied Mathematics, Indian Institute of Technology.

²⁾ L. HOWARTH, Phil. Mag [7] 42, 1308–15 (1951).

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial u}{\partial t} + w \frac{\partial u}{\partial \gamma} + \frac{u}{\gamma} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{u w}{\gamma} - \frac{v^2}{\gamma} \cot \theta \\
 & = - \frac{1}{\varrho \gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\nabla^2 u - \frac{2}{\gamma^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{u}{\gamma^2 \sin^2 \theta} \right] \\
 & \frac{\partial v}{\partial t} + w \frac{\partial v}{\partial \gamma} + \frac{u}{\gamma} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{v w}{\gamma} + \frac{u v}{\gamma} \cot \theta = \nu \left[\nabla^2 v - \frac{u}{\gamma^2 \sin^2 \theta} \right] \\
 & \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} (\gamma^2 w) + \frac{1}{\gamma \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (u \sin \theta) = 0 .
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

To obtain the boundary-layer equations, we take $w \sim 0(\delta)$, $u \sim 0(1)$, $v \sim 0(1)$ and $(\partial/\partial\gamma) \sim 0(\delta^{-1})$. The boundary-layer equations for a sphere of large radius are

$$\frac{u}{a} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial \gamma} - \frac{v^2}{a} \cot \theta = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2}, \quad (2)$$

$$\frac{u}{a} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial \gamma} + \frac{u v}{a} \cot \theta = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial \gamma^2}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \gamma} + \frac{u}{a} \cot \theta = 0. \quad (4)$$

It is clear that the assumptions of the boundary-layer theory do not break down at the equator.

As remarked earlier that the flow near the poles approximates to that due to a rotating disc, it is interesting to note that the flow near the equator approximates to the flow due to a cylinder rotating about its axis and the liquid streaming along the axis from both sides. In the boundary-layer equations, if we neglect the terms containing $\cot \theta$ ($\cot \theta \rightarrow 0$ as $\theta \rightarrow \pi/2$), we get

$$\frac{u}{a} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial \gamma} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2}, \quad (5)$$

$$\frac{u}{a} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \frac{\partial v}{\partial \gamma} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial \gamma^2}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \gamma} = 0. \quad (7)$$

These equations are identical with the equations derived by HOWARTH in the paper cited in the introduction. The solutions of these equations involve an outflow of the liquid. Hence the equations (1), (2), and (3) seem to be quite sufficient to describe the flow near the equator.

For the problem of the rotating sphere we take

$$u = a \Omega \cos \theta [\sin \theta F_1 + \sin^3 \theta F_3 + \sin^5 \theta F_5 + \dots], \quad (8)$$

$$v = a \Omega [\sin \theta G_1 + \sin^3 \theta G_3 + \sin^5 \theta G_5 + \dots], \quad (9)$$

$$w = \left(\frac{\nu \Omega}{4} \right)^{1/2} (3 \cos^2 \theta - 1) [H_1 + \sin^2 \theta H_3 + \sin^4 \theta H_5 + \dots], \quad (10)$$

$$Z = (\gamma - a) \left(\frac{\Omega}{\nu} \right)^{1/2}, \quad (11)$$

1) L. HOWARTH, Phil. Mag [7] 42, 1308-15 (1951).

where a is the radius of the sphere and Ω the angular velocity. We get the following equations for the first nine functions:

$$F_1^2 - G_1^2 + F_1' H_1 = F_1'', \quad (11)$$

$$2 F_1 G_1 + H_1 G_1' = G_1'', \quad (12)$$

$$2 F_1 + H_1' = 0, \quad (13)$$

$$4 F_1 F_3 + F_1' H_3 + H_1 F_3' - 2 G_1 G_3 - 2 F_1'' - \frac{3}{2} H_1 F_1' = F_3'', \quad (14)$$

$$2 F_3 G_1 + 4 F_1 G_3 + H_3 G_1' + H_1 G_3' - 2 F_1 G_1 - \frac{3}{2} H_1 G_1' = G_3'', \quad (15)$$

$$4 F_3 + H_3' = 0, \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} 6 F_1 F_5 - 6 F_1 F_3 + 3 F_3^2 + H_1 F_5' + F_3' H_3 + F_1' H_5 \\ - \frac{3}{2} (H_1 F_3' + F_1' H_3) - G_3^2 - 2 G_1 G_5 = F_5'', \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} 6 G_5 F_1 + 2 G_1 F_5 + 4 G_3 F_3 - 4 G_3 F_1 - 2 G_1 F_3 + H_1 G_5' \\ - \frac{3}{2} (H_1 G_3' + G_1' H_3) + G_3' H_3 + G_1' H_5 = G_5'', \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$6 F_5 + F_3 + H_5' = 0. \quad (19)$$

The boundary conditions are

$$F_1 = F_3 = F_5 = 0; \quad G_1 = 1, \quad G_3 = G_5 = 0; \quad H_1 = H_3 = H_5 = 0 \text{ at } Z = 0.$$

$$F_1 \rightarrow 0, \quad F_3 \rightarrow 0, \quad F_5 \rightarrow 0; \quad G_1 \rightarrow 0, \quad G_3 \rightarrow 0, \quad G_5 \rightarrow 0 \text{ as } Z \rightarrow \infty.$$

The equations (11) to (19) have been solved approximately by the method of POHLHAUSEN. The functions F and G have been taken as polynomials in s where $Z = s \delta$ and the functions H have been calculated from the equation of continuity.

We take

$$F_1 = a s (1-s)^2 (1+2s) - \frac{1}{2} s^2 (1-s)^2, \quad G_1 = \frac{1}{2} (2+s) (1-s)^2,$$

$$F_3 = b s (1-s)^2 (1+2s) - \frac{1}{2} s^2 (1-s)^2, \quad G_3 = c s (1-s)^2,$$

$$F_5 = d s (1-s)^2 (1-2s) - \frac{1}{2} s^2 (1-s)^2, \quad G_5 = e s (1-s)^2.$$

The functions have been chosen to satisfy the following conditions:

$$F_1 = F_3 = F_5 = 0; \quad G_1 = 1, \quad G_3 = G_5 = 0; \quad H_1 = H_3 = H_5 = 0 \text{ on } s = 0 \text{ or } Z = 0.$$

$$F_1 = F_3 = F_5 = 0; \quad G_1 = G_3 = G_5 = 0 \text{ on } s = 1 \text{ or } Z = \delta,$$

being the thickness of the boundary layer. In order that the flow be continuous and smooth on the outer edge of the boundary layer, we should have,

$$F_1'(1) = F_3'(1) = F_5'(1) = 0 \quad \text{and} \quad G_1'(1) = G_3'(1) = G_5'(1) = 0,$$

where a dash denotes differentiation with respect to s .

Integrating (11) and (12) between the limits 0 and δ using (13) we obtain

$$3 \int_0^1 F_1^2 ds - \int_0^1 G_1^2 ds = -a \delta^{-2}, \quad 4 \int_0^1 F_1 G_1 ds = \frac{3}{2} \delta^{-2}.$$

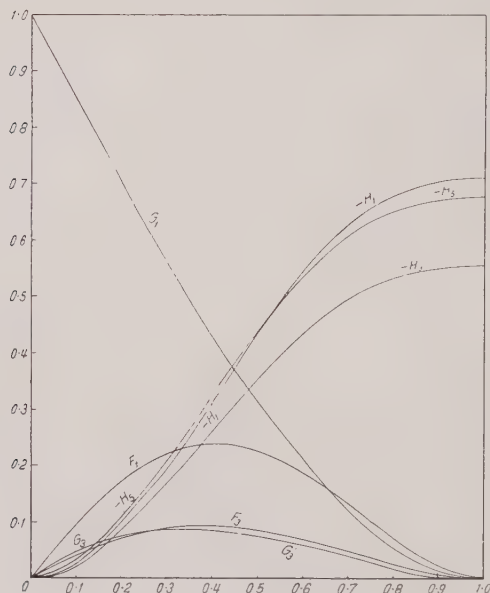


Figure 1

The flow functions F , G , and H .

Whence, after substituting the values of F_1 and G_1 , we get $a = 1.037$ and $\delta = 2.5587$. The equation of continuity (13) gives

$$H_1 = -5.1174 \left[1.037 (0.5 s^2 - 0.75 s^4 + 0.4 s^5) - \frac{1}{6} s^3 + \frac{s^4}{4} - \frac{s^5}{10} \right].$$

Similarly, for the remaining equations we find

$$b = 0.4715; c = 0.5997; d = 0.3440; e = 0.3478,$$

$$H_3 = -10.2348 \left[0.4715 (0.5 s^2 - 0.75 s^4 + 0.4 s^5) - \frac{s^3}{6} + \frac{s^4}{4} - \frac{s^5}{10} \right],$$

$$H_5 = -15.3522 \left[0.3440 (0.5 s^2 - 0.75 s^4 + 0.4 s^5) - \frac{s^3}{6} + \frac{s^4}{4} - \frac{s^5}{10} \right] + \frac{1}{4} H_3$$

The numerical values of the functions are tabulated below:

Table 1

θ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
F_1	0.0976	0.1730	0.2218	0.2400	0.2280	0.1902	0.1347	0.0735	0.0220	0
G_1	0.8505	0.7040	0.5635	0.4320	0.3125	0.2080	0.1215	0.0560	0.0145	0
H_1	0.0225	0.1010	0.1974	0.3173	0.4383	0.5461	0.6299	0.6802	0.7063	0.7108
F_3	0.0417	0.0717	0.0888	0.0934	0.0866	0.0708	0.0492	0.0264	0.0078	0
G_3	0.0486	0.0768	0.0882	0.0864	0.0750	0.0576	0.0378	0.0192	0.0054	0
H_3	0.0226	0.0868	0.1645	0.2590	0.3523	0.4329	0.4951	0.5337	0.5496	0.5537
F_5	0.0293	0.0488	0.0588	0.0604	0.0547	0.0493	0.0299	0.0158	0.0046	0
G_5	0.0282	0.0445	0.0511	0.0501	0.0483	0.0334	0.0219	0.0111	0.0031	0
H_5	0.0300	0.1130	0.2098	0.3260	0.4392	0.5347	0.6080	0.6523	0.6700	0.6750

3. Discussion of the Results

The expressions (7), (8), and (9) satisfy all the conditions on the surface of the sphere. Both u and v tend to zero on the outer edge of the boundary layer; w vanishes on the equatorial plane $\theta = \pi/2$ inside the boundary layer; w is negative so long as $3 \cos^2 \theta - 1 > 0$, it vanishes for $3 \cos^2 \theta - 1 = 0$, i.e. $\theta = 54^\circ 45'$ in the upper hemisphere and $\theta = 125^\circ 15'$ in the lower hemisphere, and is positive when $3 \cos^2 \theta - 1 < 0$. This shows that there is a radial inflow in the upper hemisphere for $0 \leq \theta < 54^\circ 45'$; this inflow disappears on the cone $3 \cos^2 \theta - 1 = 0$ and changes into an outflow for $54^\circ 45' < \theta \leq \pi/2$. Similar conclusions can be drawn for flow in the boundary layer on the lower hemisphere also. Nothing definite can be said about the convergence of the series solutions near the equator.

Zusammenfassung

Die gleichmässige Strömung in der Grenzschicht bei einer gleichmässig rotierenden Kugel wird behandelt. Die Grenzschicht entsteht an den Polen und entwickelt sich in beiden Hemisphären nach dem Äquator zu. An den Polen verhält sich die Kugel wie eine rotierende Scheibe, und Flüssigkeit strömt hier ein. Am Äquator verhält sich die Kugel wie ein rotierender Zylinder, und die Flüssigkeit strömt in dessen Bereich aus.

(Received: May 13, 1953.)

Boundary Layer on Rotating Spheroids

By BHASKAR SADASHIV FADNIS, Kharagpur, India¹⁾

1. Introduction

HOWARTH²⁾ has attempted the solution of the boundary-layer equations of the flow engendered by a sphere rotating uniformly about a diameter in otherwise undisturbed fluid in the form of an infinite series. He finds that boundary layer originates at the poles and develops towards the equator. His solution approximates to the rotating-disc solution of VON KÁRMÁN³⁾ at the poles but does not give an outflow near the equatorial region. HOWARTH attributes the cause of the failure of his solution near the equator to the boundary-layer equations, which according to him must fail to represent the interaction between the two impinging layers at the equator on account of their parabolic nature.

NIGAM⁴⁾ has shown that it is possible to construct a solution in power-series form, which fulfils all the physical requirements of the problem. He thinks that the boundary-layer equations are quite sufficient to depict the interaction between the two impinging layers because the assumptions of the boundary-layer theory do not break down at the equator. Nothing definite, however, can be said about the convergence of these series' solutions near the equator.

In the present paper the flow generated within the boundary layer by the rotation of prolate and oblate spheroids have been separately considered and the results compared with that of a sphere having the same equatorial circle.

2. Boundary-Layer Equations

In what follows α, β, γ represent the orthogonal curvilinear coordinates, u, v, w , are the components of velocity in the direction of α, β, γ respectively. The equations of motion in orthogonal curvilinear coordinates with terms of azimuthal variation β omitted are

$$\begin{aligned} & \frac{w}{h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_1 u) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_3 w) \right\} - \frac{v}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_2 v) \right\} = - \frac{1}{\rho h_1} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha} \\ & \frac{v}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{h_2 h_1}{h_3} \cdot \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right) \right] - \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2} \right) \\ & \left. \begin{aligned} & \frac{w}{h_2 h_3} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_2 v) + \frac{u}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_2 v) \\ & = \frac{v}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial v}{\partial \gamma} \right) \right], \end{aligned} \right\} \\ & \frac{u}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \gamma} (h_1 u) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_3 w) \right] + \frac{v}{h_2 h_3} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_2 v) = - \frac{1}{\rho h_3} \cdot \frac{\partial p}{\partial \gamma} \\ & \frac{v}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \cdot \frac{\partial w}{\partial \gamma} \right) \right] + \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{w^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

¹⁾ Department of Mathematics, Indian Institute of Technology.

²⁾ L. HOWARTH, *Note on the Boundary Layer on a Rotating Sphere*, Phil. Mag. [7], 42, 1308-1310 (1951).

³⁾ T. VON KÁRMÁN, ZAMM. I, 241-47 (1921).

⁴⁾ S. D. NIGAM, *Note on the Boundary Layer on a Rotating Sphere*, ZAMP 5, 151 (1954).

and the equation of continuity is

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_2 h_3 u) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_2 h_1 w) \right\} = 0, \quad (2.4)$$

where h_1, h_2, h_3 are the length elements in the directions α, β, γ . Following RANDIL's argument, we take $u \sim 0(\delta)$, $v \sim 0(1)$, $w \sim 0(1)$, $\partial/\partial \alpha \sim 0(\delta^{-1})$, and assuming¹⁾ that h_2, h_3 , and their derivatives are of $\sim 0(1)$ the equations (2.1), (2.2), (2.3), and (2.4) reduce to

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial \alpha} \sim 0(1) \quad \text{or} \quad p \sim 0(\delta), \quad (2.5)$$

$$\frac{w}{h_3} \cdot \frac{\partial v}{\partial \gamma} + \frac{u}{h_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{w v}{h_2 h_3} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial \gamma} = \frac{v}{h_1^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}, \quad (2.6)$$

$$\frac{u}{h_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{w}{h_3} \cdot \frac{\partial w}{\partial \gamma} - \frac{v^2}{h_2 h_3} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial \gamma} = \frac{v}{h_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial w}{\partial \gamma} + \frac{w}{h_1 h_2 h_3} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_1 h_2) = 0. \quad (2.8)$$

3. Prolate Spheroid

For a prolate spheroid we introduce a system of coordinates defined as follows:

$$Z + i r = k \cosh(\alpha + i \gamma), \quad \varphi = \beta, \quad (3.1)$$

where r, z, φ are the cylindrical coordinates and α, γ are the elliptic coordinates in the meridian plane, and β is the azimuth. After substituting

$$h_1 = h_3 = k \sqrt{\cosh^2 \alpha - \cos^2 \gamma}, \quad h_2 = k \sinh \alpha \sin \gamma$$

and writing $\alpha = \alpha_0$ for large spheroids, equations (2.6), (2.7), and (2.8) become

$$u \frac{\partial v}{\partial \alpha} + w \frac{\partial v}{\partial \gamma} + w v \cot \gamma = - \frac{v}{k \sqrt{\cosh^2 \alpha_0 - \cos^2 \gamma}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}, \quad (3.2)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial \alpha} + w \frac{\partial w}{\partial \gamma} - v^2 \cot \gamma = \frac{v}{k \sqrt{\cosh^2 \alpha_0 - \cos^2 \gamma}} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \gamma} + w \left[\cot \gamma + \frac{\cos \gamma \sin \gamma}{\cosh^2 \alpha_0 - \cos^2 \gamma} \right] = 0. \quad (3.4)$$

For the components of velocity²⁾ we take

$$u = \left(\frac{v \Omega}{4} \right)^{1/2} (3 \cos^2 \gamma - 1) [H_1 + \sin^2 \gamma H_3 + \dots], \quad (3.5)$$

$$v = k \Omega \sinh \alpha_0 \sin \gamma [G_1 + \sin^2 \gamma G_3 + \dots], \quad (3.6)$$

$$w = k \Omega \sinh \alpha_0 \cos \gamma \sin \gamma [F_1 + \sin^2 \gamma F_3 + \dots], \quad (3.7)$$

$$z = \left(\frac{\Omega}{v} \right)^{1/2} k \sinh \alpha_0 (\alpha - \alpha_0). \quad (3.8)$$

1) L. HOWARTH, Phil. Mag. [7], 42, 239–43 (1951).

2) S. D. NIGAM, Note on the Boundary Layer on a Rotating Sphere, ZAMP 5, 151 (1954).

For the first six functions we get the following six equations

$$F_1^2 - G_1^2 + F_1' H = F_1'' , \quad (3.9)$$

$$2 F_1 G_1 + H_1 G_1' = G_1'' , \quad (3.10)$$

$$2 F_1 + H_1' = 0 , \quad (3.11)$$

$$4 F_1 F_3 + F_1' H_3 + H_1 F_3' - 2 G_1 G_3 - 2 F_1^2 - \frac{3}{2} H_1 F_1' = F_3'' - \frac{1}{2} \cdot \frac{F_1''}{\sinh^2 \alpha_0} , \quad (3.12)$$

$$2 F_3 G_1 + 4 F_1 G_3 + H_3 G_1' + H_1 G_3' - 2 F_1 G_1 - \frac{3}{2} H_1 G_1' = G_3'' - \frac{1}{2} \cdot \frac{G_1''}{\sinh^2 \alpha_0} , \quad (3.13)$$

$$4 F_3 + H_3' + \frac{F_1}{\sinh^2 \alpha_0} = 0 . \quad (3.14)$$

The boundary conditions for these functions are

$$F_1 = F_3 = 0, \quad G_1 = 1, \quad G_3 = 0; \quad H_1 = H_3 = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad F_1 \rightarrow 0, \quad F_3 \rightarrow 0$$

$$G_1 \rightarrow 0, \quad G_3 \rightarrow 0 \quad \text{at } z \rightarrow \infty.$$

The equations (3.9) to (3.14) have been integrated numerically by the method POHLHAUSEN. The functions F and G have been taken as polynomials in s with $z = s \delta$, δ being the thickness of the boundary layer. The functions H have been calculated from the equations of continuity.

$$F_1 = a s (1-s)^2 (1+2s) - \frac{1}{2} s^2 (1-s)^2 , \quad (3.15)$$

$$G_1 = \frac{1}{2} (2+s) (1-s)^2 , \quad (3.16)$$

$$F_3 = b s (1-s)^2 (1+2s) - \frac{1}{2} s^2 (1-s)^2 , \quad (3.17)$$

$$G_3 = c s (1-s)^2 . \quad (3.18)$$

These have been chosen to satisfy the boundary conditions

$$F_1 = F_3 = 0, \quad G_1 = 1, \quad G_3 = 0, \quad H_1 = H_3 = 0$$

on s equal to 0 or $z = 0$

$$G_1 = G_3 = 0, \quad F_1 = F_3 = 0 \quad \text{on } s = 1 \quad \text{or } z = \delta .$$

In order that flow be continuous and smooth on the outer edge of the boundary layer we should have

$$F_1'(1) = F_3'(1) = 0 \quad \text{and} \quad G_1'(1) = G_3'(1) = 0 ,$$

where a dash denotes differentiation with respect to s . Integrating (3.10) and (3.10) between the limits 0 to δ and using (3.11), we obtain

$$3 \int_0^1 F_1^2 ds - \int_0^1 G_1^2 ds = -a \delta^{-2} , \quad 4 \int_0^1 F_1 G_1 ds = \frac{3}{2} \delta^{-2} ,$$

where after substituting the values of F_1, G_1 we get $a = 1.037$, and $\delta = 2.55$.

equation of continuity (3.11) then gives

$$H_1 = -5.1174 \left[1.037 (0.5 s^2 - 0.75 s^4 + 0.4 s^6) - \frac{1}{6} s^3 + \frac{s^4}{4} - \frac{s^5}{10} \right].$$

Using $\sinh^2 \alpha_0 = 10$ we similarly obtain from the equations (3.12), (3.14), (3.17), (3.18) $b = 0.4730$, $c = 0.5299$, and

$$= -10.2348 \left[0.4730 (0.5 s^2 - 0.75 s^4 + 0.4 s^6) - \frac{s^3}{6} + \frac{s^4}{4} - \frac{s^5}{10} \right] + 0.127935 H_1.$$

It is interesting to note that the equations (3.9), (3.10), and (3.11) are the same as in the rotating-disc problem of VON KÁRMÁN.

4. Oblate Spheroid

For the oblate spheroid we introduce a system of coordinates defined by

$$z + i r = k \sinh(\alpha + i \gamma), \quad \varphi = \beta, \quad (4.1)$$

where again r, z, φ are the cylindrical coordinates of a point; α and γ are the elliptic coordinates in the meridian plane. After substituting in the equations (2.7), and (2.8),

$$h_1 = h_3 = k \sqrt{\cosh^2 \alpha - \sin^2 \gamma}, \quad h_2 = k \cosh \alpha \sin \gamma$$

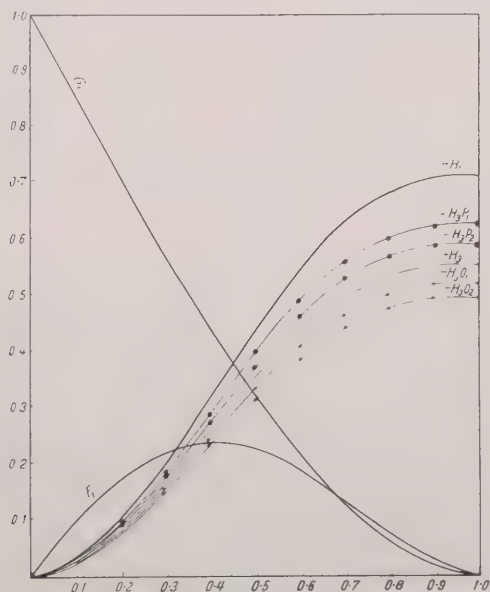


Figure 1

The flow functions F , G , and H .

— Prolate spheroid; --- sphere; -•- oblate spheroid.
 $P_1: \alpha_0 = 1.5445$; $P_2: \alpha_0 = 1.8686$; $O_1: \alpha_0 = 1.8686$; $O_2: \alpha_0 = 1.5445$.

and writing $\alpha = \alpha_0$ for a large spheroid, we have

$$\begin{aligned} u \frac{\partial v}{\partial \alpha} + w \frac{\partial v}{\partial \gamma} + w v \cot \gamma &= \frac{\nu}{k \sqrt{\cosh^2 \alpha_0 - \sin^2 \gamma}} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}, \\ u \frac{\partial w}{\partial \alpha} + w \frac{\partial w}{\partial \gamma} - v^2 \cot \gamma &= \frac{\nu}{k \sqrt{\cosh^2 \alpha_0 - \sin^2 \gamma}} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \gamma} + w \left[\cot \gamma - \frac{\cos \gamma \sin \gamma}{\cosh^2 \alpha_0 - \sin^2 \gamma} \right] &= 0. \end{aligned}$$

For velocity components¹⁾ we take

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{\nu \Omega}{4} \right)^{1/2} (3 \cos^2 \gamma - 1) [H_1 + \sin^2 \gamma H_3 + \dots], \\ v &= k \Omega \cosh \alpha_0 \sin \gamma [G_1 + \sin^2 \gamma G_3 + \dots], \\ w &= k \Omega \cosh \alpha_0 \cos \gamma \sin \gamma [F_1 + \sin^2 \gamma F_3 + \dots], \\ z &= \left(\frac{\Omega}{\nu} \right)^{1/2} k \cosh \alpha_0 (\alpha - \alpha_0). \end{aligned}$$

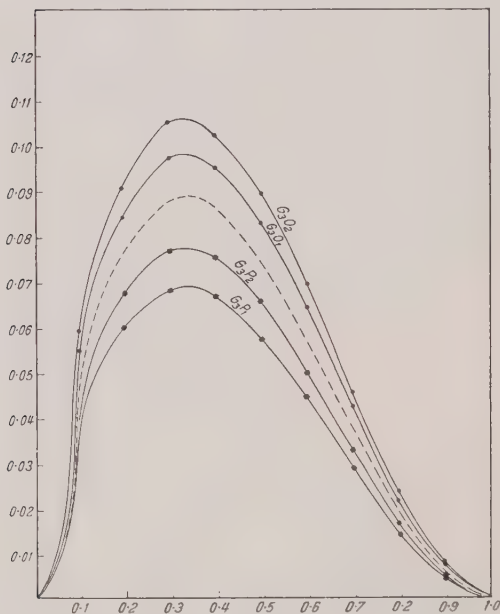


Figure 2

The function G_3 .

—■— Prolate spheroid; — — — sphere; —●— oblate spheroid.
 $P_1 = \alpha_0 (1.5445)$; $P_2 = \alpha_0 (1.8686)$; $O_1 = \alpha_0 (1.8686)$; $O_2 = \alpha_0 (1.5445)$.

¹⁾ S. D. NIGAM, *Note on the Boundary Layer on a Rotating Sphere*, ZAMP 5, 151 (1954).

the equations for F_1, G_1, H_1 are the same as (3.9), (3.10), and (3.11). For the next three functions we get

$$F_1 F_3 + F_1' H_3 + H_1 F_3' - 2 G_1 G_3 - 2 F_1^2 - \frac{3}{2} H_1 F_1' = F_3'' + \frac{1}{2} \cdot \frac{F_1'}{\cosh^2 \alpha_0}, \tag{4.9}$$

$$F_3 G_1 + 4 F_1 G_3 + H_3 G_1' + H_1 G_3' - 2 F_1 G_1 - \frac{3}{2} H_1 G_1' = G_3'' + \frac{1}{2} \cdot \frac{G_1''}{\cosh^2 \alpha_0}, \tag{4.10}$$

$$4 F_3 + H_3' - \frac{F_1}{\cosh^2 \alpha_0} = 0. \tag{4.11}$$

the boundary conditions for these functions being the same as in the previous case we have assumed for F_1, G_1, F_3, G_3 polynomial expressions similar to those used in the case of prolate spheroid. The results of the numerical integration are tabulated below.

Table 1

s	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
F_1	0.0967	0.1730	0.2218	0.2400	0.2280	0.1902	0.1347	0.0735	0.0220	0
G_1	0.8505	0.7040	0.5635	0.4320	0.3125	0.2080	0.1215	0.0560	0.0145	0
H_1	0.0255	0.1010	0.1974	0.3173	0.4383	0.5461	0.6299	0.6802	0.7063	0.7108
Prolate spheroid: $\alpha_0 = 1.8686, \quad b = 0.4730, \quad c = 0.5299$										
F_3	0.0414	0.0720	0.0891	0.0938	0.0869	0.0711	0.0494	0.0266	0.0078	0
G_3	0.0429	0.0678	0.0779	0.0763	0.0662	0.0509	0.0334	0.0170	0.0048	0
H_3	0.0240	0.0921	0.1748	0.2758	0.3755	0.4619	0.5287	0.5699	0.5872	0.5912
Prolate spheroid: $\alpha_0 = 1.5445, \quad b = 0.4735, \quad c = 0.4636$										
F_3	0.0415	0.0721	0.0893	0.0939	0.0871	0.0712	0.0495	0.0266	0.0078	0
G_3	0.0375	0.0593	0.0681	0.0668	0.0579	0.0445	0.0292	0.0148	0.0042	0
H_3	0.0253	0.0973	0.1849	0.2920	0.3980	0.4899	0.5611	0.6047	0.6233	0.6276
Oblate spheroid: $\alpha_0 = 1.8686, \quad b = 0.4727, \quad c = 0.6637$										
F_3	0.0414	0.0719	0.0891	0.0937	0.0869	0.0710	0.0494	0.0265	0.0078	0
G_3	0.0538	0.0850	0.0976	0.0956	0.0830	0.0637	0.0418	0.0212	0.0060	0
H_3	0.0261	0.0826	0.1558	0.2453	0.3335	0.4095	0.4683	0.5046	0.5194	0.5237
Oblate spheroid: $\alpha_0 = 1.5445, \quad b = 0.4726, \quad c = 0.7175$										
F_3	0.0414	0.0719	0.0891	0.0937	0.0868	0.0710	0.0494	0.0265	0.0078	0
G_3	0.0581	0.0918	0.1055	0.1033	0.0897	0.0689	0.0452	0.0230	0.0065	0
H_3	0.0206	0.0783	0.1483	0.2332	0.3168	0.3888	0.4442	0.4786	0.4924	0.4957

5. Thickness of the Boundary Layer

Taking air as the fluid, we take

$$v = 0.14 \text{ cm}^2/\text{s}; \quad \Omega = 600 \text{ r/m}; \quad \alpha_0 = 1.8686, \quad e = \frac{1}{\sqrt{11}}, \quad a = 3 \text{ cm}$$

since

$$z(2.5587) = \left(\frac{\Omega}{\gamma}\right)^{1/2} h \sinh \alpha_0 (\alpha - \alpha_0),$$

thickness of the boundary layer being equal to the distance $\alpha - \alpha_0$ along the normal at any point = 0.00534 cm.

6. Discussion of the Results

The expressions for velocities satisfy all the boundary conditions on the surface of the spheroids. Both u and v tend to zero on the outer edge of the boundary layer, w vanishes on the equatorial plane $\gamma = \pi/2$ inside the boundary layer. u is negative so long as $3 \cos^2 \gamma - 1 > 0$, it vanishes for $3 \cos^2 \gamma = 1$ or $\gamma = 54^\circ 45'$ in the upper half of the spheroid and for $\gamma = 125^\circ 15'$ in the lower half of the spheroid. This shows that there is normal inflow in the upper half for $0 \leq \gamma \leq 54^\circ 45'$. This inflow disappears on the cone $3 \cos^2 \gamma = 1$ and changes into an outflow for $54^\circ 45' < \gamma \leq \pi/2$. Nothing definite, however, can be said about the convergence of the series solutions near the equator.

In the paper cited in the introduction, NIGAM has shown that the equations for the flow in the boundary layer of a cylinder rotating about its axis and the liquid streaming past it from both sides can be deduced as a limiting case from the boundary-layer equations for the sphere. It is interesting to note that these equations can also be deduced as a limiting case from the boundary-layer equations for the rotating spheroids. Because the solutions for the cylinder involve an outflow in the central plane it may be concluded that the boundary-layer equations for the sphere adequately describe the interaction at the equator, and it is quite apparent that similar argument also holds in case of rotating spheroids. We can in general say that there will be an outflow of liquid in the equatorial plane of the rotating sphere and spheroids because near the equator these bodies behave like a cylinder rotating about its axis and the liquid streaming in the direction of the axis from both sides towards the central plane. The present investigation further indicates that the outflow of the liquid near the equatorial region depends upon the cylindrical nature of the rotating body near the equatorial plane.

In the case of spheroids and sphere rotating with the same angular velocity and having equal equatorial radii, we find that the value of H_3 decreases as the ratio r/h increases, r and h having meaning as shown in Figure 3. In Table 2 values of H_3 are shown against those of r/h .

Table 2

	Prolate spheroids		Sphere	Oblate spheroids	
α_0	1.5445	1.8686		1.8686	1.5445
r/h	0.9129	0.9535	1	1.0506	1.0972
$-H_3$	0.6276	0.5912	0.5537	0.5237	0.4957

the cylindrical surface as shown in Figure 3 is greatest for the prolate spheroid for which the ratio r/h is least. For r/h equal to unity we get the sphere and for r/h greater than one we get the oblate spheroid. Therefore the outflow in the equatorial plane is greatest for the prolate spheroid and least for the oblate spheroid while that of the sphere lies between these two extreme values. In the case of two prolate spheroids defined by

$$\alpha_0 = 1.5445, \quad k = 1.3488, \quad \frac{r}{h} = 0.9129, \quad \alpha_0 = 1.8686, \quad k = 1.0501, \quad \frac{r}{h} = 0.9535$$

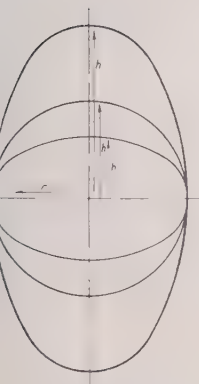


Figure 3

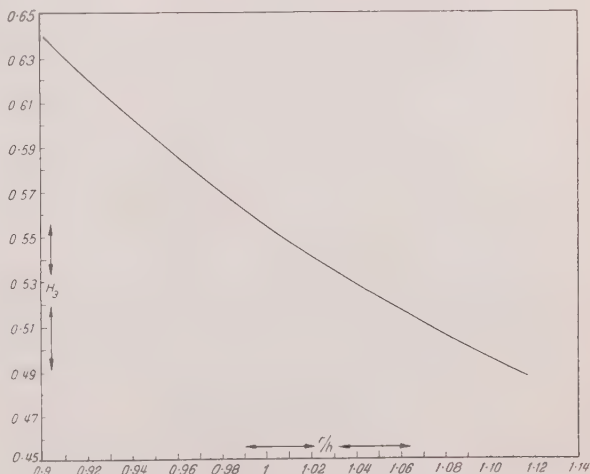


Figure 4.—Graph of H_3 against r/h .

we find that the outflow in the equatorial region is greater for the former. This supports the view that the ratio r/h influences the outflow in the equatorial plane. Similar conclusions can be drawn for the oblate spheroid also.

It is of interest to note that azimuthal velocity (Figure 2) at the corresponding points in the boundary layer increases as r/h increases. Hence, when two bodies of revolution having equal equatorial radii, rotate with equal angular velocities, the flatter amongst the two imparts a greater rotational velocity to the fluid particles within the boundary layer.

In conclusion I express my deep sense of gratitude to Dr. S. D. NIGAM for his kind and unsparing help in the preparation of this paper.

Zusammenfassung

Die Grenschichtgleichungen für dreidimensionale Strömung an der Aussen-eite eines rotierenden Sphäroids werden in konfokalen Koordinaten abgeleitet und numerisch mittels der Methode von POHLHAUSEN für verlängerte und verkürzte Sphäroide gelöst. Die Lösungen zeigen einen Zustrom an den Polen und einen Abfluss an den Äquator. Der Ausfluss hängt vom Verhältnis r/h ab, wobei r der Radius des Äquators und h die Höhe des Körpers in der Rotationsachse ist.

Received: May 13, 1953.)

Radantrieb und Raketenantrieb

Von EUGEN SÄNGER, Paris¹⁾

Man begegnet noch vielfach der Ansicht, der Radantrieb sei dem Raketenantrieb hinsichtlich des äusseren mechanischen Wirkungsgrades des Antriebsvorganges allgemein überlegen.

Die folgenden, elementaren mechanischen Überlegungen zeigen, dass dies nur für den Bereich der uns geläufigen geringen Fahrgeschwindigkeiten richtig ist für die hohen Geschwindigkeiten der Raumfahrt aber keineswegs mehr zutrifft; dass dort vielmehr der Raketenantrieb mechanisch wesentlich überlegen ist.

Wir bezeichnen mit m_1 die Fahrzeugmasse in einem beliebigen Augenblick in dem das Fahrzeug die Geschwindigkeit v gegenüber dem erdfesten Beobachter hat, und mit dm_2 die in diesem Augenblick dt verbrauchte kleine Treibstoffmasse des Heizwertes H , welcher letzterer sich der Einfachheit halber hundertprozentig in Energie umsetzen möge, das heisst, der rein maschinelle, innere Wirkungsgrad wird zu Eins angenommen.

Im Falle des radangetriebenen Fahrzeuges werde die Masse dm_2 ohne Relativgeschwindigkeit zum Fahrzeug von Bord gegeben, im Falle des raketenangetriebenen Fahrzeuges jedoch mit der entgegengesetzt zur Fahrtrichtung weisenden Relativgeschwindigkeit $w = \sqrt{2 g H}$.

Die Fahrzeugmasse zu Anfang des Antriebsvorganges sei m_a , am Ende des Antriebes m_e , der Treibstoffvorrat also $m_a - m_e$.

Dann gilt für beide Fälle:

1. Radantrieb

(Widerstands- und schwerefreie Beschleunigung)

a) Erhaltung der Masse:

$$dm_2 = -dm_1;$$

die abgegebene Masse dm_2 muss natürlich gleich der Massenabnahme $-dm_1$ des Wagens sein.

b) Erhaltung der Energie:

$$d\left(\frac{m_1 v^2}{2}\right) = -dm_2 \frac{v^2}{2} + dm_2 \frac{w^2}{2};$$

die Änderung der kinetischen Energie $d(m_1 v^2/2)$ des Wagens muss gleich sein dem Energieverlust infolge der Abgabe der nach der Abtrennung noch mit der kinetischen Energie $(dm_2 v^2/2)$ ausgestatteten kleinen Masse dm_2 und dem Energiezuwachs $(dm_2 w^2/2)$ des ganzen Systems infolge der in diesem Augenblick freigesetzten Heizwertenergie $(dm_2 g H)$ der verbrauchten Masse dm_2 .

Durch Eliminieren von dm_2 aus beiden Gleichungen erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{dm_1}{m_1} = -\frac{2 v dv}{w^2}, \quad (1a)$$

¹⁾ Arsenal de l'Aéronautique, Châtillon-sous-Bagneux (France).

ren Integration die Grundgleichung des Radantriebes liefert:

$$\frac{m_e}{m_a} = e^{-v^2/2gH} = e^{-v^2/w^2}. \quad (1)$$

Der mechanische Antrieb $P dt$ selbst folgt aus dem Impulssatz und Gleichung a) zu:

$$P = m_1 \frac{dv}{dt} = \frac{dm_2}{dt} \cdot \frac{w^2}{2v} = \frac{gH}{v} \cdot \frac{dm_2}{dt}, \quad (2)$$

Es heisst, der Schub P an den Rädern nimmt mit wachsender Fahrtgeschwindigkeit hyperbolisch ab, die Antriebsleistung Pv ist konstant und unabhängig von der Fahrtgeschwindigkeit und bekanntlich nur durch Heizwert und sekundären Treibstoffverbrauch bestimmt.

Der äussere Antriebswirkungsgrad ist in jedem Augenblick:

$$\eta = \frac{Pv}{\frac{dm_2}{dt} \cdot \frac{v^2}{2} + \frac{dm_2}{dt} \cdot \frac{w^2}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{v^2}{w^2}}, \quad (3)$$

Es heisst, der äussere Antriebswirkungsgrad des Radantriebes wird nur dann gleich Eins, wenn $v^2/2gH$ gegen Null geht, was für unsere bekannten Radfahrzeuge allerdings recht gut zutrifft. Dieser Antriebswirkungsgrad gilt auch für stationäre Fahrt, also gleichbleibende Fahrgeschwindigkeit, unter Überwindung des Fahrwiderstandes oder eines Schwerefeldes.

2. Raketenantrieb

(Widerstands- und schwerefreie Beschleunigung)

a) Erhaltung der Masse:

$$dm_2 = -dm_1.$$

b) Erhaltung der Energie:

$$d\left(\frac{m_1 v^2}{2}\right) = -dm_2 \frac{v_2^2}{2} + dm_2 \frac{w^2}{2}.$$

Darin ist $v_2 = w - v$ die Geschwindigkeit der abgestossenen Masse dm_2 nach der Abstossung relativ zum erdfesten Beobachter.

Die Änderung der kinetischen Energie $d(m_1 v^2/2)$ des Raketenfahrzeuges muss gleich sein dem Energieverlust infolge Abgabe der nach der Abstossung noch in der kinetischen Energie $(dm_2 v_2^2/2)$ ausgestatteten kleinen Masse dm_2 und dem Energiezuwachs $(dm_2 w^2/2)$ des ganzen Systems infolge der in diesem Augenblick frei gemachten Heizwertenergie $(dm_2 gH)$ der verbrauchten Masse dm_2 .

Durch Eliminieren von dm_2 und v_2 erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{dm_1}{m_1} = -\frac{dv}{w}, \quad (4a)$$

ren Integration die bekannte klassische Raketengrundgleichung

$$\frac{m_e}{m_a} = e^{-v/\sqrt{2gH}} = e^{-v/w} \quad (4)$$

fert.

Die Grundgleichung des Raketenantriebes wird gewöhnlich an Stelle des Energiesatzes aus dem anschaulicheren Impulssatz $d(m_1 v) = dm_2 v_2$ abgeleitet. Da der Impuls bekanntlich die Ableitung der kinetischen Energie nach der Geschwindigkeit ist, kommt man damit hier zum selben Resultat.

Bemerkenswert ist bei diesen Ableitungen der Grundgleichungen, dass das totale Energiedifferential

$$d\left(m_1 \frac{v^2}{2}\right) = m_1 v dv + dm_1 \frac{v^2}{2}$$

im zweiten Glied den Energieverlust des Fahrzeuges infolge Abtrennung der mit der kinetischen Energie $dm_2 v^2/2$ ausgestatteten Treibstoffmasse $dm_2 = -dm_1$ enthält, und ferner, dass die absolute Grösse und der Verlauf der angewendeten Beschleunigungen ohne Einfluss auf das Ergebnis sind.

Die Gegenüberstellung der Gleichungen (1) und (4) in Figur 1 zeigt sofort, dass unter sonst gleichen Bedingungen zur Beschleunigung auf dieselbe Endgeschwindigkeit v beim Radantrieb wesentlich höhere relative Treibstoffverbrauch $(m_a - m_e)/m_a$ nötig sind als beim Raketenantrieb, sobald $v/w > 1$ wird. Bei geringeren Endgeschwindigkeiten ist dagegen der Radantrieb günstiger. Bei Werten von v/w , die gross gegen Eins sind, wird

$$\frac{(m_e/m_a)_{\text{Rad}}}{(m_e/m_a)_{\text{Rak}}} \sim e^{-v^2/w^2}$$

das heisst, die Überlegenheit des Raketenantriebes wächst rasch über alle Grenzen.

Der mechanische Antrieb $P dt$ beim Raketenantrieb folgt aus dem schon erwähnten Impulssatz und Gleichung (4a) zu

$$P = m_1 \frac{dv}{dt} = \frac{dm_2}{dt} w = \frac{dm_2}{dt} \} 2 g H. \quad (5)$$

das heisst, der Schub P der Rakete ist von der Fahrgeschwindigkeit unabhängig, die Antriebsleistung Pv nimmt proportional der Fahrgeschwindigkeit zu und kann grösser werden als $g H dm_2/dt$, da als zusätzliche Energie noch die kinetische Energie der an Bord mitgeführten Treibstoffmassen zur Verfügung steht.

Der äussere Antriebswirkungsgrad ist in jedem Augenblick bekanntlich:

$$\eta = \frac{Pv}{\frac{dm_2}{dt} \cdot \frac{v^2}{2} + \frac{dm_2}{dt} \cdot \frac{w^2}{2}} = \frac{2 v/w}{1 + \frac{v^2}{w^2}}. \quad (6)$$

Die zahlenmässige Gegenüberstellung der äusseren Wirkungsgrade nach den Gleichungen (3) und (6) des Radantriebes und des Raketenantriebes in Figur 1 zeigt deren wesentliche Unterschiede, die auf die jeweils zweiten Glieder in den zitierten Energiesätzen zurückgehen:

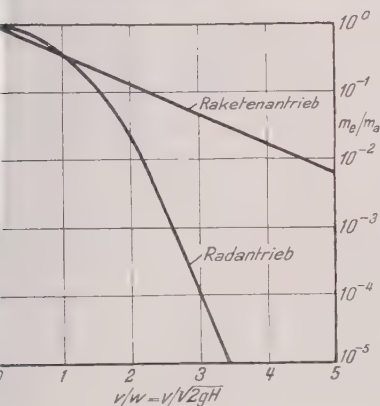
Der Energiezuwachs der Raketenfahrzeuge ist jeweils um

$$\frac{dm_2}{2} (v^2 - v_2^2) = dm_2 \frac{w^2}{2} \left(\frac{2v}{w} - 1 \right)$$

grösser als jener der Radfahrzeuge, das heisst, beide Vorgänge sind gleichwertig bei $v/w = 1/2$; bei kleineren Fahrgeschwindigkeiten v ist der Raketenantrieb ungünstiger als der Radantrieb, weil die kinetische Energie ihrer ausgestossenen Massen (relativ zum erdfesten Beobachter, Geschwindigkeitsrichtung entgegen der Fahrrichtung) grösser ist als jene des Radfahrzeuges.

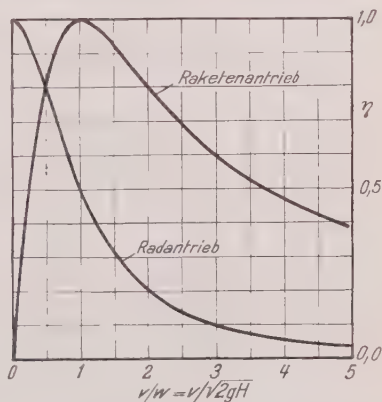
Bei $v/w = 1/2$ werden diese kinetischen Energien der Abgase beider Fahrzeuge gerade gleich, wenn auch ihre Geschwindigkeitsrichtungen entgegengesetzt sind. Bei grösseren Fahrgeschwindigkeiten ist die Rakete aus denselben Gründen günstiger und wird es für immer höhere v/w immer mehr, da die Wirkungsgrade des Raketen- und des Radantriebes sich wie $2 v/w$ verhalten.

Dies deshalb, weil mit $v/w \rightarrow \infty$ bei unter sich gleich werdender kinetischer Energie der Abgase beider Antriebe die Schubleistung des Raketenantriebes



Figur 1

Grundgleichungen des Radantriebes und des Raketenantriebes.



Figur 2

Äussere Wirkungsgrade des Radantriebes und des Raketenantriebes.

$v/w \cdot dm_2/dt$ immer weiter wächst, jene $w^2/2 \cdot dm_2/dt$ des Radantriebes aber konstant bleibt.

Selbst wenn Schienen durch den Weltraum führten, wäre es demnach meist wirtschaftlicher, dort nicht mit radangetriebenen, sondern mit raketenangetriebenen Fahrzeugen zu verkehren.

Summary

It is a general believing that propulsive efficiency of wheel-propulsion for vehicles is always unity, and thus superior to propulsive efficiency of rocket-propulsion. By some elementary mechanical considerations can be shown that this is only true for slow drive velocities.

With growing velocities, propulsive thrust of wheel-propulsion decreases, while it remains constant for rocket-propulsion; propulsive performance remains constant for wheel-propulsion, whilst it grows for rocket-propulsion with increasing velocity.

As a consequence thereof, propulsive efficiency of wheel-propulsion decreases much faster than that of rocket-propulsion with growing velocity, so that efficiency of rocket-propulsion is far higher at high velocities.

Eingegangen: 8. Oktober 1953.)

An Arithmetic Unit for Automatic Digital Computers

By JOHN R. STOCK, Zürich¹⁾

A number of moderate-speed, automatic digital computers using a magnetic drum for storage have been built or designed²⁾. In this communication, certain general requirements on the arithmetic unit of such a computer are presented, as have been stipulated for the new computer at the Swiss Federal Institute of Technology³⁾. Then, to fulfill these requirements, a suitable set of arithmetic operations is proposed and a design of the arithmetic unit is sketched.

Some scheme should be employed in the computer to permit the representation of a broader range of numbers than is feasible with a fixed decimal point. When a wide variety of practical problems is likely to be encountered, this is a matter of great convenience for the mathematician using the machine. The floating decimal point is very suitable; it has the particular advantage of being thoroughly familiar. Other schemes, such as the use of fixed decimal point numbers $|x| < 1$ together with their reciprocals, either complicate the arithmetic operations excessively or require similar shifting operations to those which characterize computation with a floating decimal point.

Computation should be done in the decimal system in preference to the binary. With a floating point, automatic conversion to and from the binary system is somewhat difficult, and the equipment used for this purpose might just as well be used for computation directly in a coded decimal system. The decimal system also facilitates the mathematical investigation of errors.

It must be possible to calculate with double or multiple precision. This feature is perhaps more a matter of principle than of absolute necessity, but lack of it would be deemed a definite deficiency. Certain problems arise, however, in combining double precision with a floating decimal point, since the former requires the retention of information which tends to be dropped by the latter. Besides operation with double precision, the arithmetic unit must be able to carry out calculations upon commands. In particular, this implies being able to separate a given command into its component parts (operation and address), to transform these by addition or substitution, and to reassemble a new command.

In any automatic computer, the overall speed of calculation is limited by the average access time to storage, which for a magnetic drum is of the order of 5 to 10 milliseconds. There is little to be won by building an arithmetic unit which is much faster than this, unless the mathematician is willing to do minimum access programing. On the other hand, little is lost if less frequent operations, such as multiplication and division, require several times the access time. This fact speaks in favor of a floating decimal point, since the floating decimal point tends particularly to slow down the operation of addition, which normally is disproportionately fast. Thus the machine accomplishes more without serious loss of overall speed. A programed floating decimal point, however, is much slower and would hardly be permissible in a moderate-speed machine. Again, computation directly in the decimal system is preferable to programed conversion to the binary system.

¹⁾ Institut für angewandte Mathematik der ETH.

²⁾ Papers describing several of these are listed in the Bibliography, page 171.

³⁾ A. P. SPISER, *Projekt einer elektronischen Rechenmaschine am Institut für angewandte Mathematik der ETH*, ZAMP 4, 317 (1953).

by a similar line of thought, all routine modification of the address of a command should be accomplished in the sequence unit under the control of some of the digits of the operation part of the command. Computation in the arithmetic unit upon commands should be restricted to special cases¹).

Last but not least, the operations which the machine can perform should be in such a form that they can be readily understood and learned by any engineer or mathematician who may have an opportunity to use the machine.

To realize these requirements, it is proposed that three types of 'words' be utilized, each consisting of 15 decimal digits plus one digit reserved for checking purposes. The three types are

- 1) A number with floating decimal point, $a \times 10^b$. Range of exponent b : ± 99 . Range of mantissa a : ± 0.99999999999 .
- 2) A number with fixed decimal point. Range of mantissa: ± 0.99999999999999 .
- 3) Two one-address commands, each with three-digit operation and four-digit address.

In general, an arithmetic operation combines two words, one of which is taken from a register MR in the arithmetic unit and the other from storage. The result of the operation is usually only one word, which remains in two registers, MR and AC. Occasionally the result may be two words, in which case one remains in MR and the other in AC. In the following list of the more essential arithmetic operations, the letter n indicates that the address of the command is utilized, and n represents the number in storage position n .

Operations defined for both numbers with fixed and floating decimal points:
 $A n$: Clear MR and AC, and insert (n) into them.

$S n$: Store the number in MR into position n , and then interchange the numbers in MR and AC. This interchange makes the number in AC available for the next operation should MR and AC contain different numbers.

-1 : Multiply the number in MR by -1 ; insert the result as usual into MR and AC.

$|x|$: Take absolute value of number in MR.

Operations defined only for numbers with a floating decimal point:

N : Normalize the number in MR; that is, shift mantissa left with corresponding change of exponent until most significant digit is not zero.

$+ n$: Add (n) to number in MR with round-off.

$- n$: Subtract with round-off.

$\times n$: Multiply with round-off.

$: n$: Divide with round-off.

Operations defined only for numbers with a fixed decimal point:

$+ + n$: Add; stop if sum greater than 1.

$- - n$: Subtract.

$\times \times n$: Multiply. Of the double length product, the more significant half remains in MR; the less significant, in AC.

$: : n$: Divide. Stop if divisor is less than dividend. Quotient remains in MR; remainder in AC.

$L n$: Left shift of the 14 significant digits by n places; that is, multiply by 10^n and drop any overflow ≥ 1 .

$R n$: Corresponding right shift.

¹ H. RUTISHAUSER, *Automatische Rechenplanentranslation bei programmgesteuerten Rechenmaschinen*, Mitteilungen aus dem Institut für angewandte Mathematik der ETH, Nr. 3 (Birkhäuser, Basel, 1952).

The various special cases, such as overflow of an exponent, normalization to zero, and division by zero, will not be discussed here. The arithmetic unit must also supply certain information to the sequence unit for conditional calls. Useful are the algebraic signs, mantissa identical to zero, and threatening overflow, that is, exponent ≥ 50 or mantissa ≥ 0.5 for floating and fixed decimal point numbers respectively.

The inclusion of operations on fixed decimal point numbers makes possible computation with multiple precision and computation with commands. In particular, the left and right shift operations allow the extraction of any digit or group of digits in a word. There is the interesting possibility of using the left

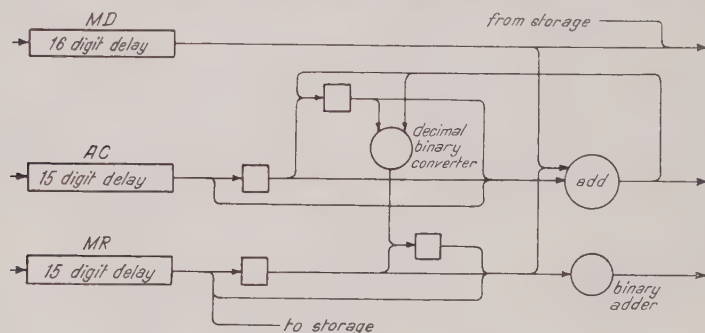


Figure 1
Block Diagram of Arithmetic Unit

shift to clear the exponent out of a number, leaving only the mantissa as a 14-digit number with a fixed decimal point. This is useful in the computation of the elementary functions.

The proposed arithmetic unit to carry out these operations is basically of conventional design. It contains three circulating registers, known as the multiplier, the multiplicand, the accumulator, and the multiplier, each holding one word of normal length. Numbers coming from storage enter the MD register, and those being stored are taken from MR. The coded decimal digits are treated in parallel, but the 16 digits in a word are in serial order. The more important logical circuits are the main adder (adds two decimal digits plus carry), the decimal-binary converter (recodes a two-digit decimal number into a hexadecimal digit, setting numbers larger than 15 equal to 15), and the small binary adder (subtracts a unit from a hexadecimal digit.) In the block diagram shown, the contents of the three registers flow from left to right, closing the loop over the edge of the figure. Circles represent logical circuits; squares, unit delays.

The arithmetic unit differs from conventional designs, though, in several ways. The exponents are not handled in separate registers from the mantissas, but in the same ones at different times. This represents a saving of material and permits the use of the exponent places for mantissa digits in numbers with a fixed decimal point. It has been found not necessary to include empty digits in the numbers for computational purposes, since sufficient space is available in the decimal digit used to represent the algebraic sign. To control the number

of repeated additions required by a multiplier digit during multiplication, no counter is employed, but instead the MR digit itself is reduced by one for each addition. A similar method is used in shifting operations, in that the number of shifts is inserted as a hexadecimal digit into the sign digit of the MR register. For each shift of one place, the hexadecimal digit is reduced by one. This permits shifts up to fifteen places, which is actually more than necessary. Finally, there is no counter to indicate the end of a multiplication according to the number of digits in the multiplier. For this purpose a code combination which does not represent a decimal is inserted into the MR sign digit and is simply shifted with the other digits until it reappears. In this way the same control may be used for the 11-digit multiplication \times and the 14-digit multiplication $\times \times$.

In more detail, the operation $+$ proceeds in the following manner. First AC and MD are cleared and the addend is inserted from storage into MD. The exponents are subtracted in the AC register, the absolute value of the difference being recoded as a hexadecimal and inserted into the MR sign. Depending on the sign of the exponent difference, the proper mantissa is brought into AC and shifted to the right. The addition proper may then take place, followed by rounding off, taking care of any overflow, and inserting the result into MR and AC. Multiplication and division are similar. For the multiplication proper, the simple method of repeated additions is somewhat too slow. A substantial increase in speed is gained by subtracting instead of adding for MR digits > 5 and then adding one extra time for the next digit¹). For example, the multiplier 137 is treated as $1\ 4 - 3$. For this purpose the multiplier is recoded by allowing it to circulate once through a special circuit. Division is done by repeated subtraction using a small circuit to indicate when the remainder becomes smaller than the divisor. The quotient is built up in the MR register as straight binary coded decimal digits, which may be readily converted to the 2^* code used otherwise throughout the machine by being allowed to circulate once through the main adder.

Automatic checking is included. Associated with each number is a check digit congruent to the number modulo three. This is the simplest check which has the properties of being dependent upon all the digits of the number and of being arithmetically invariant. The latter property allows the check digit to circulate through the main adder and permits arithmetic operations to be carried out on it.

With the relatively low frequency of 32 kc, the circulation time of a word is 0.5 ms. This gives average computing times of 5 ms for $-$, 20 ms for \times and $\times \times$, 30 ms for \div and $\div \div$, and 1 or 2 ms for the other operations. These times are in good accord with the access time of a magnetic drum.

BIBLIOGRAPHY

1. A. P. SPEISER, *Entwurf eines elektronischen Rechengertes*, Mitteilungen aus dem Institut für angewandte Mathematik der ETH., Nr. 1 (Zürich, 1950).
2. *Review of Electronic Digital Computers*, Joint AIEE-IRE Computer Conference in Philadelphia, December 1951 (American Institute of Electrical Engineers, New York, 1952).
3. H. H. AIKEN, *Description of a Magnetic Drum Calculator*, Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, Vol. 25 (Cambridge, Mass., 1952).

¹) H. H. AIKEN, *Description of a Relay Calculator*, Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, Vol. 24 (Cambridge, Mass., 1949).

- [4] *Commercially Available General-Purpose Electronic Digital Computers*, Department of the Navy, Office of Naval Research (U.S. Dept. of Commerce, Washington D.C., 1952).
- [5] C. A. COOLIDGE, JR., *Design of an Automatic Digital Calculator*, Thesis, Harvard University (Cambridge, Mass., 1953).
- [6] *Vorträge über Rechenanlagen*, held in Göttingen, March 1953 (Max-Planck Institut für Physik, Göttingen, 1953).

Zusammenfassung

Für eine programmgesteuerte Rechenmaschine mit einer magnetischen Trommel als Speicher wird ein für den allgemeinen Gebrauch geeignetes Verzeichnis der arithmetischen Befehle gegeben und der logische Aufbau des Rechenwerkes beschrieben. Vorgesehen ist das Rechnen sowohl mit gleitendem Komma (Zahlen der Form $a \cdot 10^b$) als mit festem Komma, was das automatische Berechnen von Rechenplänen sowie das Rechnen mit verdoppelter Stellenzahl gestattet.

(Received: October 24, 1953.)

Über eine Funktionalgleichung aus der Wärmeleitung

Von HERMANN WUNDT, Freiburg i. Br.¹⁾

Zur Bestimmung der mittleren logarithmischen Temperaturdifferenz für Gleich- und Gegenstrom-Wärmeaustauscher

$$\Delta t_m = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\ln(\Delta t_1/\Delta t_2)}$$

wurde 1951 von W. MEHNER ein Nomogramm entworfen (BWK-Arbeitsblatt 1), das aus drei gleichabständigen parallelen Leitern besteht, die je dieselbe Funktionsskala tragen. Werden auf den äusseren Leitern die Δt_1 - bzw. Δt_2 -Werte eingezeichnet, so findet man Δt_m als Schnitt der mittleren Leiter mit der Verbindungsgeraden von Δt_1 nach Δt_2 .

Es taucht nun die Frage auf, welche Funktion $f(x)$ das Verlangte leistet und demnach auf jeder der drei Leitern aufzutragen ist. Eine einfache geometrische Überlegung zeigt, dass $f(x)$ der Relation

$$f(x_M) \equiv f\left(\frac{x_1 - x_2}{\ln(x_1/x_2)}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}; \quad \left(x_M \equiv \frac{x_1 - x_2}{\ln(x_1/x_2)}\right) \quad (1)$$

zu genügen hat²⁾. Die reellen, stetigen Lösungen dieser Funktionalgleichung sind zu bestimmen.

Vor dem eigentlichen Lösungsgang kann man sich schon die folgenden Eigenschaften der gesuchten Funktion $f(x)$ klarmachen:

a) $f(x)$ ist nur bis auf einen willkürlichen Faktor A festgelegt:

$$A f(x_M) = \frac{A f(x_1) + A f(x_2)}{2}.$$

¹⁾ Mathematisches Institut der Universität, Abteilung Angewandte Mathematik.

²⁾ Die Anregung zur Beschäftigung mit dieser Fragestellung verdanke ich den Herren Dr. STORK und Dr. W. VON BÜLTZINGSLÖWEN.

n einer nichtsingulären Stelle kann daher der Funktionswert noch beliebig vorgeschrieben werden.

b) $f(x)$ ist nur bis auf eine willkürliche additive Konstante B bestimmt:

$$f(x_M) + B = \frac{[f(x_1) + B] + [f(x_2) + B]}{2}.$$

c) Die Gleichung (1) sagt aus, dass der Funktionswert an einer Stelle x_M stets gleich dem arithmetischen Mittel der Funktionswerte an den beiden Stellen x_1 und x_2 ist. Es sei nun etwa $x_1 < x_2$. Man findet, dass stets

$$x_1 \leq x_M \leq x_2$$

gilt, und für endliche $x_1, x_2 \neq 0$ kann man sogar die Gleichheitszeichen weglassen. x_M ist ein echter « Mittelwert » von x_1 und x_2 . Daraus folgt, dass $f(x)$ *monoton* ist. Denn wäre dies nicht so, so existierten zwei Stellen $x_1 \neq x_2$, für die $f(x_1) = f(x_2)$ gilt. Es gibt dann eine Stelle x_M im Inneren von $\langle x_1, x_2 \rangle$, die gleichfalls den Funktionswert

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = f(x_1)$$

hat. Genau so schliesst man für das Intervall $\langle x_1, x_M \rangle$ usw. $f(x)$ kann nur dann *constant* sein, falls man es als *stetig* voraussetzt. Die trivialen Fälle

$$f(x) \equiv B = \text{const}$$

gehören somit zur allgemeinen Lösung, die jetzt in der Form $f(x) = A \varphi(x) + B$ erwartet wird.

Für die nichttrivialen Fälle $\varphi(x) \neq 0$, falls es solche gibt, setzt man nun $x_2 = 0$, $x_1 \neq 0$ und erhält aus (1) $2f(0) = f(0) + f(x_1)$, das heisst für $f(x) \neq f(0) = \text{const}$ den Wert $f(0) = \pm \infty$. Im nichttrivialen Fall ist also $f(x)$ an der Stelle 0 singulär. Da aber $f(x)$ nicht überall singulär sein soll, so folgt, dass die Annahme $f(x)_1 = f(x)_2$ für $x_1 \neq x_2$ zum Widerspruch führt. $f(x)$ ist *monoton* in allen Intervallen, die die Null ausschliessen.

d) Auch die Ableitung $f'(x)$ ist für nichtkonstante Lösungen eigentlich *monoton*. Bei Beschränkung auf reelle Argumente müssen x_1 und x_2 gleiches Vorzeichen haben, da sonst der Logarithmus im Nenner von x_M komplex wird. Es sei nun $x_1 > x_2 > 0$; für x_1 und x_2 negativ gilt analog das Umgekehrte. Man schätzt ab

$$x_M = \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1/x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

für alle endlichen Paare (x_1, x_2) , und

$$\lim_{x_1, x_2 \rightarrow \infty} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

bei endlich bleibender Differenz $x_1 - x_2$. Daher sagt (1) aus, dass das arithmetische Mittel zweier Funktionswerte innerhalb des zwischen diesen Stellen liegenden Intervalls, von links kommend, schon *vor der Intervallmitte* erreicht wird. Daraus folgt, dass für fallendes $f(x)$ und $x > 0$ die die Funktion darstellende Kurve nach unten, für steigendes $f(x)$ dagegen nach oben gekrümmt ist. Für $x < 0$ gilt entsprechend das Umgekehrte.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen kann die Funktionalgleichung nach folgendem allgemeinem Verfahren geschlossen gelöst werden. Man setzt

$$\left. \begin{aligned} F[x_1, x_2, x_M(x_1, x_2)] &\equiv -f_0(x_M) + \frac{f_1(x_1)}{2} + \frac{f_2(x_2)}{2} = 0 \\ (f_i &= f; i = 0, 1, 2), \end{aligned} \right\}$$

wobei x_1 und x_2 als unabhängige Variable aufgefasst werden. Nun bildet man $\partial F/\partial x_1$ und $\partial F/\partial x_2$ (Existenz der benötigten Ableitungen vorausgesetzt):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial f_0} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial x_M} \cdot \frac{\partial x_M}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial f_0} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial x_M} \cdot \frac{\partial x_M}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Dies ergibt im vorliegenden Falle

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial f_0}{\partial x_M} \left(\frac{1}{\ln x_1/x_2} - \frac{x_1 - x_2}{x_1 \ln^2(x_1/x_2)} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{df_1(x_1)}{dx_1} &= 0, \\ \frac{\partial f_0}{\partial x_M} \left(\frac{1}{\ln x_1/x_2} - \frac{x_1 - x_2}{x_2 \ln^2(x_1/x_2)} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{df_2(x_2)}{dx_2} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

x_1 und x_2 treten in diesen Gleichungen ganz symmetrisch auf. Man eliminiert nun $\partial f_0/\partial x_M$, indem man df_1/dx_1 und df_2/dx_2 auf die andere Seite bringt und die erste Gleichung durch die zweite dividiert:

$$\frac{df_1}{dx_1} = \frac{\ln \frac{x_1}{x_2} - 1 + \frac{x_2}{x_1}}{\frac{x_2}{x_1} - \ln \frac{x_1}{x_2} - 1 + \frac{x_1}{x_2}} \cdot \frac{df_2}{dx_2}.$$

Nun berücksichtigt man, dass die Indizes an den f nur formal sind ($f_1 \equiv f$) und zieht die Aussage a) heran, wonach $f(x)$ noch normierbar ist. Wir dürfen also auch die Ableitung zum Beispiel in dem nichtsingulären Punkt 1 vorschreiben. Setzen wir also für $x_2 = 1$, $f'(1) = A$. Dann folgt:

$$f'(x) = A \frac{\ln x + (1/x) - 1}{x - (\ln x + 1)} \quad (6)$$

und daraus durch Quadratur:

$$f(x) = A \int_1^x \frac{\ln \xi + (1/\xi) - 1}{\xi - (\ln \xi + 1)} d\xi + B. \quad (7)$$

Dies ist die allgemeine Lösung, wenn man Stetigkeit verlangt.

Es bleibt noch das Verhalten von $f(x)$ im Unendlichen zu untersuchen, das heisst, ob dort das Integral in (7) konvergiert. Hierzu bildet man

$$\xi = \frac{\ln \xi + (1/\xi) - 1}{\xi - (\ln \xi + 1)}$$

und prüft, ob dies für $\xi \rightarrow \infty$ endlich bleibt. Man rechnet leicht nach, dass dies nicht der Fall ist; das Integral divergiert also. $f'(x)$ geht etwas schwächer als $1/x$ gegen Null, und $f(x)$ geht für $x \rightarrow \infty$ etwas stärker gegen Unendlich als $\ln x$.

Das Integral in (7) kann numerisch ausgewertet werden; durch bereits verarbeitete Funktionen dürfte es sich kaum geschlossen ausdrücken lassen.

Die Lösungsmethode ist auf andere Mittelbildungen $x_M = x_M(x_1, x_2)$ sowie andere lineare Funktionen $F(f_i)$ verallgemeinerungsfähig.

Summary

The functional equation

$$2f\left(\frac{x-y}{\ln x/y}\right) = f(x) + f(y)$$

occurring in a heat conduction problem is solved analytically. The continuous solutions are discussed.

Eingegangen: 8. Oktober 1953.)

Varia – Miscellaneous – Divers

Ludwig Prandtl

Am 15. August 1953 verstarb in Göttingen nach längerer Krankheit im 79. Lebensjahre LUDWIG PRANDTL. Sein Name wird unvergänglich in die Geschichte der technischen Wissenschaften eingehen; es gibt fast kein Gebiet der angewandten Mechanik, in das PRANDTL nicht fundamentale Fortschritte gebracht hätte. Von Hause aus Ingenieur, hat er nie verleugnet, dass das wirklichkeitsnahe, anschauliche Denken ihm wesentlich näherlag als formale Rechnungen. Das ging so weit, dass er sich zum Beispiel nur wenig für Minimalprinzipien, wie etwa das Hamiltonsche, erwärmen konnte; er wollte die wirkenden Kräfte vor sich sehen, und wie Lord KELVIN erblickte er in dx/dt nicht einen Differentialquotienten, sondern eine Geschwindigkeit. Wenn immer möglich machte er kleine Tintenskizzen etwa der zu erwartenden Stromlinien und versuchte dann, die Beschleunigungen und Kräfte daraus näherungsweise zu entnehmen. Diese Skizzen (oft auf alten Briefumschlägen) haben heute bereits eine Art Sammelwert erhalten, findet man doch mehrfach darin Anfänge wichtiger neuer Entdeckungen. Mit solch minutiöser Detailbetrachtung, die immer wieder durch Berücksichtigung von Versuchsergebnissen korrigiert und erweitert wurde, ging eine aussergewöhnliche Kunst im Herausfinden der wesentlichen Züge parallel. PRANDTL verstand es, von den komplizierten Vorgängen gerade so viel wegzulassen, dass der Rest mit verhältnismässig einfachen mathematischen Mitteln noch behandelbar war und trotzdem das entscheidende Merkmal erhalten blieb.

Da ist die berühmte *Grenzschichttheorie*, die aus der Beobachtung von Strömungen in einem sehr bescheidenen Apparat hervorging. (Freilich: dieser Apparat enthielt schon die Eckenumlenkschaufeln, die man heute in Windkanälen, Ventilatoren, Gasturbinen usw. so viel sieht.) Während die gleichzeitige Berücksichtigung von Trägheits- und Reibungskräften im allgemeinen sehr grosse rechnerische Schwierigkeiten bietet, erkannte PRANDTL, dass bei grösseren Reynoldsschen Zahlen und guten Formen das Problem aufgespalten werden kann: die Aussenströmung hat Potentialcharakter, und sie prägt der Reibungs- oder Grenzschicht den Druckverlauf auf, so dass deren Verhalten für sich allein bestimmt werden kann. Damit war es unter anderm auch möglich, die Ablösungen zu erklären und

teilweise vorauszuberechnen. Im Lauf der Zeit entwickelte sich die Grenzschichttheorie ausserordentlich; laminare und turbulente Grenzschichten wurden unterschieden und das Stabilitätsproblem gerade auch von PRANDTL gefördert, ein befriedigendes Lösung entgegengeführt.

Die *Tragflügeltheorie* ist aus einer ähnlichen Vereinfachung entstanden. Gen betrachtet, ist die Umströmung eines endlich breiten Tragflügels ausserordentlich kompliziert. Dadurch, dass man das Problem linearisiert, das heisst das Geschwindigkeitsfeld der abgehenden Wirbel als kleine Störung der Hauptbewegung betrachtet, gelangt man zu einer linearen Integralgleichung, die heute nach sehr praktisch gestalteten Lösungsmethoden in den Flugzeugfabriken routinemässig behandelt wird und eine sehr nützliche Vorausberechnung der Lastverteilung gestattet. Mit dem früh verstorbenen W. BIRNBAUM zusammen hat PRANDTL auch den nichtstationären Fall behandelt und damit die Grundlage für die heute so wichtige *Flatterrechnung* geschaffen. Auch gelang die Übertragung auf Propeller (BETZ).

Zu den Arbeiten der jüngeren Jahre gehören Untersuchungen und Berechnungen über *Gasströmungen* durch Düsen und in freien Strahlen. Eine bei PRANDTL etwas später ausgeführte Dissertation (STEICHEN) blieb lange Jahre wenig beachtet. Sie enthält aber die heute so wichtig gewordene Charakteristikentheorie der ebenen *Überschallströmungen*, die (zusammen mit BUSEMANN) später zu einem sehr praktischen Rechenverfahren gestaltet worden ist.

Die *Turbulenz* hat PRANDTL zeitlebens beschäftigt. Nicht nur wurden in Göttingen fundamentale experimentelle Untersuchungen über Rohrströmungen angestellt (NIKURADSE, SCHILLER), sondern auch wesentliche theoretische Fortschritte erzielt. Es wurde die Austauschlänge eingeführt und die freie Turbulenz behandelt (mit TOLLMEN und andern), die Stabilität der laminaren Schichten (TIETJENS, TOLLMEN, SCHLICHTING) untersucht und zum ersten Male eine rationale Erklärung des Umschlages gefunden.

Schon früh hatte sich PRANDTL für die *dynamische Meteorologie* interessiert. Obwohl etwas weniger bekannt, sind seine Arbeiten auf diesem Gebiet von hoher Bedeutung geworden. Einer seiner letzten Aufsätze gibt eine sehr interessante Erklärung der heute im Vordergrund stehenden Erscheinungen der Jet-streams.

Man könnte noch vom Prandtlschen *Staurohr*, von den *Windkanälen* seiner Bauart, von *Lagertheorie*, von *Wärmeübergang* in Rohren berichten und hätte doch nicht das ganze Wirkungsgebiet PRANDTLs in der Strömungslehre umfasst. Mit vollem Recht hat man ihn als den Vater der neueren Strömungslehre bezeichnet, doch darf man darob seine weitere Wirksamkeit nicht vergessen. Dies ist vor allem die *Elastizität* und *Plastizität*, die ihn oft beschäftigte. Schon seine Dissertation über Biegeknickung von Balken bezog sich darauf. Bekannt sind die Versuche über plastische Deformation von Marmor (mit von KÁRMÁN) und das Torsions-Seifenhaut-Gleichnis. Die Plastizität trat in sehr wichtigen Arbeiten in den zwanziger Jahren in den Vordergrund (mit NÁDAI). Damals trug er auch eine Betrachtung über das Kriechen vor, die die Keime des heute so fundamentalen Begriffes der *Dislokation* enthielt.

Obwohl er sich grosse Mühe für die Vorbereitung seiner Vorlesungen gab, war deren unmittelbarer Erfolg, wie er manchmal mit etwas Wehmut zugab, nicht sehr gross; PRANDTL fehlte nun einmal das rhetorische Element. Ganz anders in Seminarien und bei Diskussionen in kleinem Kreis, da war sein Urteil bis ins hohe Alter von unerhörter Klarheit und Treffsicherheit. In persönlichen und auch in politischen Fragen war er rührend hilflos. Er konnte sich gar nicht vorstellen, dass jemand hinterhältig oder gar bösartig sein konnte.

Mit PRANDTL ist ein Gelehrter von säkularer Bedeutung von uns gegangen. Fast alle seine Arbeiten tragen den Charakter des Definitiven. Man kann sie erweitern und ausbauen, aber man braucht sie nicht zu korrigieren. Es dürfte eine Ehrenpflicht der deutschen Forschung sein, sie in gesammelter Form herauszugeben – enthalten sie doch noch zahlreiche Keime zu weiteren Fortschritten.

J. ACKERET

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Theory of Elasticity and Plasticity. By H. M. WESTERGAARD (John Wiley Sons, Inc., New York, 1952). 176 pp., 19 figs.; \$5.00.

Seit dem Ende des letzten Krieges ist auf dem Gebiete der Mechanik eine ungeheure neue Lehrbücher erschienen. Vor allem in Amerika hat die Produktion von «Texts» eine erstaunliche Breite erreicht, und die zunehmende Tendenz, statt wirklicher Lehrbücher mit klaren Begriffsbestimmungen und präzisen Gedankenfolgen blosse Aufgabensammlungen von ständig wachsendem Umfang zu schreiben, müsste bedenklich stimmen, wenn sie ohne Ausnahmen wäre.

Glücklicherweise hat uns aber gerade Amerika in den letzten Jahren einige der besten Lehrbücher geschenkt, und dazu darf wohl auch das vorliegende Werk gezählt werden, obschon es leider ein Torso geblieben ist. Der Verfasser, der es nach 25jähriger Lehrtätigkeit unternahm, dieses Buch zu schreiben, ist vorzeitig verstorben und hat seine letzte Kraft darauf verwendet, wenigstens die erste Hälfte des geplanten Werkes zu vollenden. So ist zwar keine «Theorie der Elastizität und Plastizität» entstanden, wohl aber eine beispielhafte Einführung in die Theorie der Elastizität und (von einigen Bemerkungen über die Grundlagen der Plastizitätstheorie abgesehen) eine ausgezeichnete Übersicht über die wichtigsten Probleme, Methoden und Lösungen der dreidimensionalen Elastizitätstheorie.

Schon die einleitenden Kapitel, die sich mit dem Ziel und mit der Geschichte des behandelten Gebietes befassen, sind in ihrer knappen und präzisen Darstellung einmalig und würden an sich schon die Anschaffung des Büchleins lohnen. Die beiden folgenden Kapitel über Spannungen, Verzerrungen sowie die Grundgleichungen der Elastizität und Plastizität sind weitgehend geometrisch konzipiert und kommen damit vor allem dem technisch geschulten Leser entgegen, ohne übrigens auf Strenge zu verzichten. In den letzten zwei Kapiteln wird die elastische Feldtheorie entwickelt, wobei die Behandlung mit Hilfe des Spannungspotentials und des Galerkinvektors in den Vordergrund gestellt und an zahlreichen dreidimensionalen Problemen erläutert wird.

H. Ziegler

Vorlesungen über theoretische Physik, Band V: Thermodynamik und Statistik. Von A. SOMMERFELD (Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1952). 374 S., 41 Abb.; geb. DM 24.80, brosch. DM 23.30.

Der vorliegende Band V, *Thermodynamik und Statistik*, beschliesst die sechshändigen Vorlesungen über theoretische Physik von A. SOMMERFELD. Es war dem Verfasser nicht mehr vergönnt, das Werk selber zu Ende zu führen; dieser letzte Band wurde nach weitgehenden Vorarbeiten SOMMERFELDS von zweien seiner ehemaligen Schüler herausgegeben. Ihnen gebührt das Verdienst, die Homogenität des Stoffes gegenüber den übrigen Bänden und die spezifische Darstellungsweise des grossen Didaktikers der Physik gewahrt zu haben.

Der thermodynamische Teil ist von beträchtlicher Eleganz infolge der konsequenten Verwendung der «Methode der Potentiale» statt der üblichen, schwerfälligen Kreisprozesse. Viele Anwendungen und Übungsaufgaben erhellen die Nützlichkeit dieser eigenartigsten Disziplin der Physik, wobei, wie in den übrigen Bänden des Werkes, sowohl neueste Entwicklungen (Thermodynamik irreversibler Vorgänge, um nur ein Beispiel zu nennen) als auch technische Beispiele zu Worte kommen.

In der Gaskinetik und statistischen Mechanik wird man vielleicht bedauern, dass die Diskussion der Grundlagenprobleme etwas summarisch gehalten ist. Dafür wird man auch hier entschädigt durch eine reiche Auswahl an Problemen und Beispielen, die im Text oder als Übungsaufgaben durchgerechnet werden. Als Beispiel sei erwähnt, dass die Berechnung von Wärmeleitfähigkeit und Koeffizient der inneren Reibung in Gasen mit Hilfe der Boltzmannschen Integralgleichung bis zum numerischen Resultat durchgeführt wird!

Das Buch reiht sich würdig neben die übrigen Bände und vervollständigt SOMMERFELDS Lehrbuch zum gegenwärtig unbestritten besten Lehrbuch der klassischen theoretischen Physik, das jeder Physiker besitzen sollte.

M. R. Schafer

Mathematics of Relativity. By G. Y. RAINICH (John Wiley & Sons, New York; Chapman & Hall, London, 1950). III + 173 pp.; \$3.50.

Es handelt sich bei diesem Buche um eine in sich geschlossene Darstellung der Grundbegriffe der Relativitätstheorie, die von einem Minimum an mathematischer Vorkenntnissen ausgeht und den ganzen benötigten mathematischen Apparat in vorbildlich einfacher Weise entwickelt; die physikalische Seite der Begriffe und Diskussionen wird dabei nie aus dem Auge gelassen, sondern parallel mit der mathematischen erörtert. Im einleitenden 1. Kapitel werden im Anschluss an die klassische Physik (Mechanik, Elektromagnetismus) die ersten Elemente der Tensorrechnung eingeführt. Das 2. Kapitel behandelt die Geometrie des vierdimensionalen Minkowskischen Raumes; das 3., daran anknüpfend, die spezielle Relativitätstheorie. Im gleichen Verhältnis stehen die zwei folgenden Kapitel: das 4. gibt eine schöne Einführung in die Riemannsche Geometrie gekrümmter Räume, das 5. schliesslich eine Darstellung der allgemeinen Relativitätstheorie, mit den einfachsten, aber wichtigen Anwendungen der Gravitationsgleichungen auf beobachtbare Effekte (Planetenbewegung, Krümmung der Lichtstrahlen, Rotverschiebung der Spektrallinien). Der Verfasser hat auf Vollständigkeit verzichtet, es aber dafür verstanden, alles Wesentliche streng und in bewundernswerter Klarheit bis zur letzten Einzelheit zu erläutern; das Buch kann als Einführung in die Relativitätstheorie wärmstens empfohlen werden.

B. Eckmann

Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Von P. FINSLER (Verlag Birkhäuser AG., Basel 1951). 160 S.; sFr. 15.40.

Die nachstehenden Zeilen sind keine «Rezension», sondern ein «Hinweis»: das in der Überschrift genannte Buch ist nämlich der unveränderte (photomechanische) Abdruck der Göttinger Dissertation von P. FINSLER aus dem Jahre 1918. Diese Dissertation bedeutete – neben den gleichzeitig entstandenen, durch die allgemeine Relativitätstheorie angeregten grossen Arbeiten von LEVI-CIVITA, WEYL und anderen – einen der wesentlichen Schritte von der klassischen zur «modernen» Differentialgeometrie. Sie knüpfte an Begriffe aus der Variationsrechnung an, wie sie besonders von CARATHÉODORY in den Vorder-

und gestellt wurden: während in der Riemannschen Geometrie das Längendifferential einer Kurve durch $ds = (\sum g_{ik} dx_i dx_k)^{1/2}$ gegeben ist, wobei die g_{ik} Funktionen der Ortskoordinaten x_1, x_2, \dots, x_n sind und die quadratische Form positiv definit ist, setzt FINSLER viel allgemeiner: $ds = F(x_1, \dots, x_n; dx_1, \dots, dx_n)$, wobei die Funktion F positiv homogen vom ersten Grade in den dx_i , im übrigen aber (bis auf Regularitätsannahmen) ganz willkürlich ist. Auf diesem Grundbegriff wird nun ein dem Vorbild der elementaren Differentialgeometrie folgende Geometrie von Kurven und Flächen aufgebaut – übrigens in eindrucksvoller Einfachheit, frei von raffinierten Formalismen. Man weiss, eine wie grosse und immer wachsende Wirkung diese Abhandlung gehabt hat – die Theorie der «Finslerschen Räume» bildet heute ja einen grossen und wichtigen Teil der Geometrie. Die Dissertation, die den Grundstein dieser Theorie bildet und auch heute noch lesens- und studienwert ist, war aber nicht in einer Zeitschrift erschienen und nicht im Buchhandel erhältlich; darum ist die nunmehr vorliegende Neuausgabe aufs wärmste zu begrüssen. – Neu hinzugefügt ist ein (von H. SCHUBERT bearbeitetes) sehr ausführliches Literaturverzeichnis (schätzungsweise über 600 Bücher und Abhandlungen), das sich allerdings nicht nur auf die eigentliche «Finslersche», sondern auf die «allgemeine» Differentialgeometrie im weiteren Sinne bezieht.

H. Hopf

Physikalisches Taschenbuch. Von H. EBERT (Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1951). 522 S., 147 Abb.; DM 14.80.

Wenn man im allgemeinen solch «kleinen Handbüchern» gegenüber eher kritisch gesinnt ist, bedeutet dieses Buch eine wirkliche Bereicherung aller bestehenden Nachschlagewerke, wie sie der Physiker und der Ingenieur im Laboratorium täglich brauchen. In systematischer Folge sind von den Mitarbeitern dieses Taschenbuches die Grundgesetze und ihre Anwendungen in verschiedenen Gebieten der Physik zusammengestellt. Behandelt werden: Mechanik, Akustik, Optik, Wärme, Elektromagnetismus, Atom und Kernphysik, Werkstoffe und die Grundbegriffe der Astrophysik. Besonders hervorzuheben ist das einleitende Kapitel über die mathematischen Hilfsmittel, enthält es doch in guter Darstellung vielgebrauchte Formeln und Sätze der Integral- und Differentialrechnung.

Das «Physikalische Taschenbuch» ist vielleicht gerade deswegen so praktisch und nützlich, weil es neben reinen Zahlenangaben immer einen kurzen und klaren Überblick zu den betreffenden Wissensgebieten vermittelt.

O. Huber

Typical Means. By K. CHANDRASEKHARAN and S. MINAKSHISUNDARAM (Oxford University Press 1952). 139 pp.; 35s.

Seitdem M. RIESZ vor mehr als vierzig Jahren die «Typical Means» oder Riesz'schen Mittel zur Summation divergenter Reihen eingeführt hatte, haben sich diese zu einem kräftigen Hilfsmittel entwickelt. Frühere Darstellungen dieser Summationsmethode finden sich in dem Buche von HARDY und RIESZ *The General Theory of Dirichlet's Series* (Cambridge 1915), und im Heft 51 (1931) der *Mémoires des Sciences mathématiques* von E. KOGBETLIANTZ. Seither hat sich um die «Typical Means» eine ausgedehnte Theorie aufgebaut, zu der namhafte indische Mathematiker Wesentliches beigetragen haben, und es ist sehr zu begrüssen, dass nun eine Gesamtdarstellung erfolgt ist. Die ersten zwei Kapitel behandeln die Summationstheorie divergenter Reihen mit Hilfe der Riesz'schen Mittel, die zwei letzteren Kapitel deren Anwendung auf Dirichlet'sche und Fourier'sche Reihen.

A. Pfluger

Einführung in die Viskosimetrie und Rheometrie. Von H. UMSTÄDT (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1952). 152 S., 106 Abb.; DM 16

Die Lehre von der Flüssigkeitsreibung hat sich im Laufe der letzten Jahre angeregt durch die Bedürfnisse der Praxis, zur sogenannten «Rheologie» entwickelt, die auch Flüssigkeiten umfasst, die nicht dem einfachen Newtonschen Reibungsgesetz folgen.

Im ersten Teil des Buches beschäftigt sich der Verfasser mit der Theorie solcher Körper, die wesentlich auf dem (schon von MAXWELL eingeführten) Begriff der Relaxation beruht. Der elastische Körper und die Newtonsche Flüssigkeit sind Grenzfälle für unendlich lange bzw. sehr kurze Relaxationsdauern.

Im zweiten Teil werden die Strömungsformen ausschliesslich für zähe Newtonsche Flüssigkeiten für verschiedene Konturen und Grenzbedingungen behandelt. Für Zähigkeitsmessungen sind die kleinen Reynolds-Zahlen natürlich besonders wichtig.

Auf dieser Grundlage werden dann im dritten Teil sehr zahlreiche absolute Viskosimeter ausführlich beschrieben und wertvolle Winke für deren Handhabung gegeben. Die Relativinstrumente, die in der Praxis doch häufig verwendet werden und die natürlich einer Eichung bedürfen, werden nicht behandelt. Auch es schade, dass bei den absoluten Instrumenten keinerlei Vergleichsmessungen angeführt werden. – Dass, wie auf Seite 80 steht, «die Ursache der Entstehung der (Prandtl'schen) Grenzschichten bisher trotz grösster Bemühungen nicht aufgeklärt werden konnte», mutet etwas merkwürdig an; unter andern hätte doch eine Zeile vorher zitierte Buch von SCHLICHTING dem Verfasser eine durchsichtige befriedigende Erklärung geben können.

J. Acke

Theory of Perfectly Plastic Solids. By W. PRAGER and P. G. HODGE (John Wiley & Sons, New York; Chapman & Hall, London, 1951). 264 pp., 90 figs.; \$5.

In der von I. S. SOKOLNIKOFF herausgegebenen «Applied Mathematics Series» sind in den letzten Jahren eine Reihe sehr bemerkenswerter Monographien aus dem Gebiete der angewandten Mathematik erschienen. Dazu gehört auch das vorliegende Werk, das aus der in rascher Entwicklung befindlichen Plastizitätstheorie ein erstes, heute einigermaßen abgerundetes Teilgebiet behandelt.

Das Buch ist als Einführung konzipiert und elementar geschrieben. Es verzichtet auf die Exposition der physikalischen Aspekte des Plastizitätsphänomens. Es beschränkt sich, wie der Titel sagt, auf perfekt plastische (Mises- und Prandtl-Reuss-) Körper und entwickelt ihre mathematische Theorie unter Betonung der technisch wichtigen Fragestellungen, wobei aus theoretischen wie praktischen Gründen das ebene Problem im Vordergrund steht. Die einzelnen Abschnitte behandeln einfache Fachwerke und Balken, die Torsion von zylindrischen Körpern, beim ebenen Verzerrungszustand neben axialsymmetrischen und anderen speziellen Problemen die allgemeine Theorie samt Grenzanalyse bei beschränkter plastischer Deformation, und schliesslich die Extremalprinzipien der Plastizitätstheorie. Den Abschnitten sind (teilweise recht anspruchsvolle) Aufgaben beigefügt.

Trotz seines einführenden Charakters stösst das Buch in den letzten Abschnitten bis zu den aktuellsten Problemen vor, an deren Klärung die Verfasser und ihr Mitarbeiterkreis entscheidend beteiligt sind. Es bietet unzählige Anregungen und weist den Weg für die künftige Ausbildung der Ingenieure auf diesem Gebiete.

H. Zieg

The Problem of the Turbulent Boundary Layer

By DONALD COLES, Pasadena, California¹⁾

1. Introduction

Historically, experimental measurements of the magnitude of surface friction have usually preceded the development of adequate methods of prediction, and the writer's study of supersonic boundary layers²⁾ is a case in point. In the present survey the turbulent boundary layer problem is examined in some detail from the experimental point of view, in an effort to identify the features which must eventually appear in any successful analysis of boundary layer flow. If experimental measurements could be compared with an exact solution of the equations of fluid motion for the particular model geometry involved, any discrepancies could be assigned to error in the measurements or to failure of the equations to describe the behavior of the fluid in question. In practice, however, comparison of physical and mathematical models for viscous fluid flow over a flat plate can be achieved only in an asymptotic sense, first because of mathematical approximations which are not uniformly valid in the entire flow field, and second because of physical imperfections which are idealized or ignored in the usual theoretical treatment.

The idea of an asymptotic correspondence between actual and assumed conditions is essential to any definition of the boundary layer problem. For laminar flow this idea, which is explicit in the boundary layer concept of PRANDTL, is requiring an increasingly precise mathematical formulation, and the recent development of methods for improving the theoretical analysis in this respect is a conspicuous sign of current interest in the question [1]³⁾.

On the other hand, the present inadequate state of knowledge of turbulent flows requires the corresponding definition of the turbulent boundary layer problem to be almost completely heuristic, so that the validity of a particular analysis can only be tested in the light of experimental evidence. It is proposed to illustrate this difficulty by a brief discussion of the flat plate turbulent boundary layer, using an analysis which is frankly phenomenological and which is therefore less vulnerable to criticism of concept than an analysis which assumes one or another mechanism for the various turbulent transport processes.

¹⁾ Guggenheim Aeronautical Laboratory, California Institute of Technology.

²⁾ See *Measurements of Turbulent Friction on a Smooth Flat Plate in Supersonic Flow*, to be published separately.

³⁾ Numbers in brackets refer to References, page 201.

While the review given here is designed to provide a point of departure for the study of compressible boundary layers, it should be remembered that the purpose of the discussion is always to facilitate the interpretation of experimental data, rather than to suggest or to support a particular theoretical analysis of the turbulent boundary layer.

2. General Considerations

The remarks of the present paper refer to steady two-dimensional mean flow past a smooth flat plate at sufficiently large Reynolds numbers so that the boundary layer hypothesis may be assumed to apply. It is further assumed that there is no heat transfer between the plate and the fluid, and that the pressure, density, and velocity of the external flow are uniform.

Early experiments, particularly those carried out in towing tanks, were in most cases designed to determine a mean friction coefficient from its definition in terms of the dynamic pressure and of the drag per unit width of one side of a flat surface,

$$D(x) = x q C_D(x) ,$$

while an alternative method makes use of the equivalence of the drag force to the rate of momentum change in the boundary layer or in the wake,

$$D(x) = \int_0^{\delta} \rho u (u_1 - u) dy .$$

Finally, the total drag may be equated to the sum of the downstream components of the integrated tangential and normal forces,

$$D(x) = \int_0^x \tau_w(x) dx + D_0(x) ,$$

where the second term on the right represents the drag of any isolated roughness elements which may be present on the plate surface.

The first two equations above are usually combined in the form

$$C_D(x) = \frac{2}{x} \Theta(x) ,$$

in which the boundary layer momentum thickness Θ is defined by the definite integral

$$\Theta(x) = \int_0^{\delta} \frac{\rho}{\rho_1} \cdot \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1} \right) dy .$$

The first and third equations in turn provide a relationship between drag and local friction,

$$C_D(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\tau_w(x)}{q} dx + \frac{D_0(x)}{q x}, \quad (6)$$

that

$$\frac{\tau_w(x)}{q} = 2 \frac{d\Theta(x)}{dx} - \frac{1}{q} \cdot \frac{dD_0(x)}{dx}. \quad (7)$$

The notation in these expressions is chosen deliberately in order to emphasize that x , τ_w/q , C_D , and Θ are experimentally measured quantities. The essence of most boundary layer research consists of the assumption that there exist corresponding uniquely defined quantities ξ , c_f , c_F , and θ , which may be associated with an ideal boundary layer, and of the attempt to determine the latter quantities by necessarily imperfect experimental techniques. That is, by definition,

$$c_f = c_f(\xi) = \frac{d}{d\xi} \xi c_F(\xi) = 2 \frac{d\theta}{d\xi}; \quad (8)$$

$$c_F = c_F(\xi) = \frac{1}{\xi} \int_0^\xi c_f(\xi) d\xi = 2 \frac{\theta}{\xi}; \quad (9)$$

$$\theta = \theta(\xi) = \frac{1}{2} \xi c_F(\xi) = \frac{1}{2} \int_0^\xi c_f(\xi) d\xi. \quad (10)$$

In order to establish a connection between the experimental and ideal quantities defined above, it is necessary to introduce an additional hypothesis. The assumption usually made is that the effect of conditions near the leading edge on the surface friction far downstream will eventually vanish, in the sense that the function $\Theta(x)$ for a smooth plate is the ideal relationship $\theta(\xi)$ subject to a possible displacement of the streamwise coordinate; in other words, downstream of a particular point $x = s$,

$$\theta(x - x_0) = \Theta(x). \quad (11)$$

Alternatively, a similar but less restrictive assumption may be made in terms of the local surface friction;

$$c_f(x - x_0) = \frac{\tau_w(x)}{q}. \quad (12)$$

In view of equations (4), (6), and (10), it is clear that the hypothesis (11) implies (12), while the converse is not true. Given the hypothesis (12), then

$$\theta(x - x_0) = \Theta(x) - \Theta_0, \quad (13)$$

where

$$\Theta_0 = \frac{D_0}{2q} + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{\tau_w(x)}{q} dx - \frac{1}{2} \int_0^{s-x_0} c_f(\xi) d\xi. \quad (9)$$

The definition (14) assumes that the form drag D_0 is independent of downstream of $x = s$, as will be the case for example if D_0 is associated with finite leading edge curvature or with the presence of boundary layer tripping devices on the surface of the plate. The experimental evidence suggests that this assumption (11) is probably sufficiently general in practice; i.e. that Θ_0 varies slowly with s . The expression (14) thus serves to connect the drag of a tripping device with the position at $x = x_0$ of the apparent origin of the turbulent boundary layer.

Finally, equations (8), (9), and (11) imply

$$c_F(x - x_0) = 2 \frac{\Theta(x)}{x - x_0}; \quad (10)$$

$$c_f(x - x_0) = 2 \frac{d\Theta(x)}{dx} = \frac{\tau_w(x)}{q}. \quad (11)$$

The remarks above apply to both laminar and turbulent boundary layers for arbitrary surface heat transfer and free stream Mach number. The definition of momentum thickness in equation (5) above is not rigorously correct for turbulent flow. However, since the usual experimental methods for measurement of mean velocity involve errors of comparable magnitude, no distinction will be made here.

The analysis leading to the equations (13) to (16) is carried out formally and in detail both because of its generality and because the considerations mentioned are fundamental to any evaluation of experimental data. The presence of the parameter Θ_0 in equation (13) immediately raises the question of uniqueness, especially for the turbulent boundary layer. The term uniqueness in the sense used here, refers to the validity of a comparison of the ideal function $\theta(c_f)$, obtained by eliminating the variable ξ between the functions $\theta(\xi)$ and $c_f(\xi)$ of equations (8) and (10), with its experimental analog $\Theta(\tau_w/q)$. The suggestion that the slope of the experimental curve $\Theta(x)$ may not imply a unique value of the ordinate Θ is precisely equivalent to the introduction of the constant of integration Θ_0 . Since θ increases with ξ , it is apparent that sufficiently far downstream the parameters x_0 and Θ_0 must always become small compared to x and Θ respectively. However, the sense in which an asymptotic correspondence between the real and ideal boundary layers is defined by this property is not the sense in which the concept is most appropriate to the experimental problem, as will be emphasized later.

The matter of uniqueness can be examined more closely for the laminar boundary layer, since the theoretical solution is known within the limitations

the boundary layer approximation, and has been verified experimentally in low-speed flow by DRYDEN [2], LIEPMANN [3], DHAWAN [4], and others. The laminar equations are satisfied by a function of a single independent variable equivalent to $y/\sqrt{\xi}$. The consequent similarity of the various velocity profiles along the plate implies that the boundary layer momentum thickness is inversely proportional to the slope of the velocity profile at the wall, so that the functional relationship $\theta(c_f)$ mentioned above is

$$c_f R_\theta = \text{const} = (0.664)^2, \quad (17)$$

for the laminar boundary layer with constant density, where $R_\theta = u_1 \theta/\nu$.

For the turbulent boundary layer, unfortunately, the question of uniqueness lies under a darker cloud than can be dissipated by theoretical arguments alone. Further consideration of this problem will therefore be deferred until it becomes convenient below to cite experimental evidence in support of an analysis, based on considerations of similarity, of the turbulent boundary layer.

3. Functional Similarity

In the early attempts of PRANDTL, VON KÁRMÁN, and TAYLOR to formulate a theoretical treatment of turbulent shear flows, the molecular transport process of the laminar regime was used as a model for a hypothetical turbulent transport process. These analyses have in common the concept of a characteristic length, somewhat analogous to the mean free path in a gas, whose magnitude is estimated in terms of some physical property of the mean flow.

Not only have these theories made possible a careful extrapolation of empirical knowledge of turbulent shear flows to conditions outside the contemporary range of experiment, but they have provided a framework within which the effects for example of wall roughness [5] could be fitted. However, it is now generally recognized that recent detailed measurements of the structure of turbulent flow are making tenancy of the mixing hypothesis progressively more uncomfortable [6], [7], although the primitive state of experimental research has so far prevented replacing the theory with one more satisfactory.

The mixing analogy for turbulent flow will not be discussed further here, since many detailed summaries are available. Neither will any review be attempted of the current experimental investigations of LAUFER [8], KLEBANOFF [9], TOWNSEND [10], [11], and others, which it is to be hoped will lead first to knowledge of the structure, and finally to an understanding of the mechanism, of turbulent shear flow.

In the absence of an adequate theory describing the turbulent mechanism, the present discussion will attempt to organize, rather than to explain, the experimental evidence which is available for the low-speed turbulent flat plate boundary layer. The general analysis is based on the principle of physical

similarity, using certain demonstrable properties of the boundary layer, and in later made specific by an appeal to experimental data.

The mean velocity distribution $u(y)$ through the turbulent boundary layer may be taken to depend on four local parameters δ , τ_w , ϱ , and μ ; a fifth parameter u_1 is of course implied as the value of u when $y = \delta$. The first two quantities, δ and τ_w , depend on a length coordinate ξ which is not written explicitly, since it will be found that the Reynolds number $R = u_1 \xi / \nu$ for the ideal boundary layer is adequately determined for a given profile by the assumption already made in this and in the preceding section.

The function of six variables

$$g(u, y, \varrho, \mu, \delta, \tau_w) = 0 \quad (18)$$

may be conveniently written without loss of generality as

$$\frac{u}{u_\tau} = G\left(\frac{y u_\tau}{\nu}, \frac{y}{\delta}\right), \quad (19)$$

in terms of a characteristic velocity u_τ and two characteristic lengths δ and ν/u_τ , where

$$\tau_w = \varrho u_\tau^2. \quad (20)$$

Suppose that equation (19) can be specialized for the region near the wall on the ground of a certain similarity observed experimentally. Both the laminar sublayer profile and the adjacent turbulent mean velocity profile near the surface are found to be independent of the boundary layer thickness δ , so that

$$\frac{u}{u_\tau} = f\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right), \quad y \rightarrow 0. \quad (21)$$

Suppose further that in the outer region of the boundary layer similarity is observed with respect to a coordinate system attached to the edge of the layer and moving with the free stream. It is not surprising, if the shearing stress in this region is maintained by a turbulent transport process, that the velocity defect is found to be independent of the viscosity of the fluid. In fact, turbulent shear flows with a free boundary, such as wakes and jets, apparently have in common with the boundary layer the property that near the free boundary the characteristic length, when considering the distribution of mean velocity measured with respect to the outer fluid, is the width δ of the shear layer. This observation is expressed by the velocity defect law, which in the usual form is written

$$\frac{u_1 - u}{u_\tau} = F\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad y \rightarrow \delta. \quad (22)$$

If now it is assumed that there exists a finite region in which both (21) and (22) are valid, it is easily shown ([12]; see also [13], [14]) that (19) in this region

must have the form

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y u_\tau}{\nu} + \varphi\left(\frac{y}{\delta}\right), \quad (23)$$

more specifically, in view of (21),

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y u_\tau}{\nu} + \varphi(0). \quad (24)$$

Note that the existence of equation (23) is a sufficient condition to insure the existence of equation (22) since, if (23) is valid throughout the outer part of the boundary layer,

$$\frac{u_1 - u}{u_\tau} = \varphi(1) - \varphi\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\delta}. \quad (25)$$

That the condition is also necessary is less commonly recognized. The equations (21) and (22), which are plausible on dimensional grounds and are supported by experimental evidence, and MILLIKAN's demonstration of necessity, already cited, are together a less ambiguous basis for equation (24) than derivations involving specific assumptions about the mechanism of turbulent shear flow. In particular, the constant κ is introduced during a separation of variables in a manner which shows clearly that this parameter should not depend on the surface shearing stress or on the boundary layer thickness, though it may depend on the wall geometry.

Evaluation of equation (23) at the point $y = \delta$ yields immediately the action law

$$\frac{u_1}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\delta u_\tau}{\nu} + \varphi(1), \quad (26)$$

which may be applied directly to pipe or channel flow on replacing the boundary layer thickness by the pipe radius or channel half width. For a boundary layer, however, it is more convenient to replace the boundary layer thickness δ in equation (26) by the momentum thickness θ , with the result that

$$\frac{u_1}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{R_\theta}{c_1 - c_2 (u_\tau/u_1)} + \varphi(1). \quad (27)$$

This expression follows immediately from equation (26) and the definitions

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) dy \quad (28)$$

and

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) dy, \quad (29)$$

assuming that equation (22) is valid throughout the boundary layer. The

parameters c_1 and c_2 are then defined by

$$c_1 = \frac{u_1}{u_\tau} \cdot \frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 F\left(\frac{y}{\delta}\right) d\frac{y}{\delta}$$

and

$$c_2 = \left(\frac{u_1}{u_\tau}\right)^2 \left(\frac{\delta^* - \theta}{\delta}\right) = \int_0^1 F^2\left(\frac{y}{\delta}\right) d\frac{y}{\delta},$$

so that the form parameter δ^*/θ is given by

$$\frac{\delta^*}{\theta} = \frac{1}{1 - \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{u_\tau}{u_1}}.$$

Furthermore, in view of the obvious relationship

$$c_f = \frac{\tau_w}{q} = 2 \left(\frac{u_\tau}{u_1}\right)^2,$$

it is clear that equation (27) is the analog of equation (17) in supplying, for the turbulent boundary layer, a connection between local friction coefficient and local momentum thickness Reynolds number which may be taken both as a definition and as a test for uniqueness.

In order to complete the discussion of the ideal turbulent boundary layer, however, it is necessary to adopt a convention for defining a Reynolds number R . The present restricted idea of uniqueness implies a function

$$2 \frac{dR_\theta}{dR} = h(R_\theta)$$

which may be integrated to yield a relationship

$$R = H(R_\theta),$$

on satisfying the initial condition $R = 0$ when $R_\theta = 0$. If the surface shear stress is always positive, then R_θ is a monotonically increasing function of R and the initial condition in question can obviously be satisfied.

However, the integration can be carried out, and a precise definition of R achieved, only if the function h of equation (34) is specified for all possible values of R_θ . But the function in question is defined experimentally, so that the extrapolation to arbitrarily small Reynolds numbers is not itself unique. In fact, it is not certain that the extrapolated function will be finite or even integrable at $R_\theta = 0$. For the present, the dependence of dR_θ/dR on R_θ expressed by equation (34) will simply be identified with equation (27), and a discussion of the necessarily asymptotic correspondence between these expressions will be postponed until the experimental evidence has been reviewed.

The transcendental form of equation (27) makes direct integration difficult. However, in the absence of pressure gradient and roughness, the local friction coefficient and the momentum thickness for the ideal turbulent boundary layer may be taken to be related by the momentum integral equation,

$$c_f - \frac{\tau_w}{q} = 2 \frac{d\theta}{d\xi} = 2 \frac{d}{d\xi} \int_0^\delta \frac{u}{u_1} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) dy, \quad (36)$$

According to equations (8), (29), and (33) above. In the present notation, using (25) and (26) in turn in (36),

$$dR = e^{-\kappa \varphi(1)} e^{\kappa(u_1/u_\tau)} \left[c_2 - \kappa c_2 \frac{u_1}{u_\tau} + \kappa c_1 \left(\frac{u_1}{u_\tau} \right)^2 \right] d \frac{u_1}{u_\tau}. \quad (37)$$

It is obvious from equation (27) that R_θ vanishes, implying $R = 0$, when $u_1 = c_1/c_2$. With this initial condition, the definite integral of equation (37) yields the turbulent flat plate friction law for $c_f(R)$,

$$R = 2 c_1 e^{-\kappa \varphi(1)} e^{\kappa(1/2/c_f)} \left[1 - \left(\frac{2}{\kappa} + \frac{c_2}{c_1} \right) \sqrt{\frac{c_f}{2}} + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{c_2}{c_1} \right) c_f \right] - \frac{2}{\kappa^2} c_1 e^{-\kappa \varphi(1)} e^{\kappa(c_2/c_1)} c_f. \quad (38)$$

As a check on this expression, it is readily verified that equation (9),

$$c_F R = 2 R_\theta = \int_0^R c_f dR,$$

is satisfied by equation (27) as a definite integral when the local friction coefficient is evaluated from (38). Further, it follows that the mean and local friction coefficients are always finite, and are in fact equal in the limit $R = 0$, for the particular friction law implied by functional similarity. Finally, anticipating numerical values to be obtained later, the last term on the right side of equation (38) is of order $40 c_f$ compared to terms of order $c_f R$, and may safely be neglected;

$$c_F R = 2 c_1 e^{-\kappa \varphi(1)} e^{\kappa(u_1/u_\tau)} \left[1 - \frac{u_\tau}{u_1} \left(\frac{2}{\kappa} + \frac{c_2}{c_1} \right) + \frac{2}{\kappa} \left(\frac{u_\tau}{u_1} \right)^2 \left(\frac{1}{\kappa} + \frac{c_2}{c_1} \right) \right]. \quad (39)$$

The corresponding expression for the mean friction coefficient, from equation (27), is

$$c_F R = 2 R_\theta = 2 c_1 e^{-\kappa \varphi(1)} e^{\kappa(u_1/u_\tau)} \left(1 - \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{u_\tau}{u_1} \right). \quad (40)$$

In summary, the two equations (39) and (40) above define the ideal local and mean turbulent friction coefficients for a flat plate in terms of four empirical velocity profile parameters κ , $\varphi(1)$, c_1 , and c_2 . These parameters may sup-

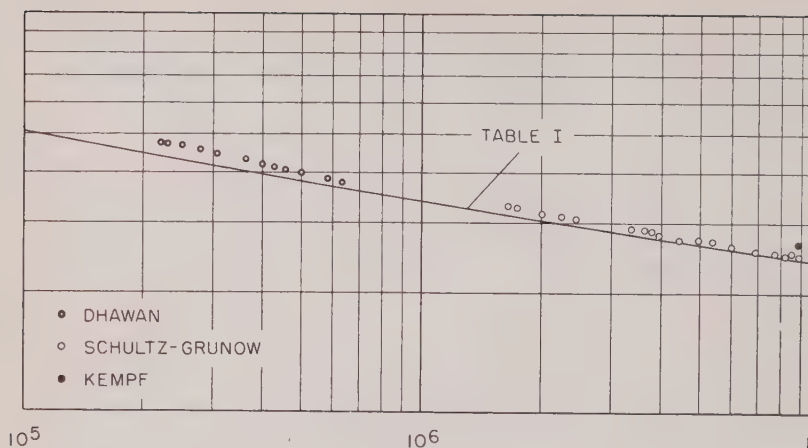


Figure 1

Direct Measurements of Local Turbulent Friction in Low-Speed Flow.

posedly be determined by simultaneous local measurements of velocity profile and surface friction at a single Reynolds number, and extrapolation of the resulting friction formulae to arbitrary Reynolds numbers may then be undertaken with the same degree of confidence which is attached to the hypothesis of similarity underlying equations (21) and (22).

4. Experimental Literature¹⁾

While the turbulent boundary layer on a flat plate has been the subject of a great deal of experimental research, it is not easy to find reliable measurements of mean velocity profile and surface shearing stress made under identical experimental conditions. Before discussing the available measurements, therefore, it is convenient to provide a short catalog of several special techniques which have been used for determining local surface friction.

The derivative $d\theta/dx$ supposedly gives the surface shear directly, provided that the flow is uniform and two-dimensional. Since differentiation of experimental data is necessary, large errors may occur unless careful and complete measurements are made of the various velocity profiles. Alternatively, extrapolation toward the wall of the turbulent shear $-\rho \overline{u'v'}$ or of the sublayer

¹⁾ The writer is indebted to Dr. G. B. SCHUBAUER and Mr. P. S. KLEBANOFF of the National Bureau of Standards, Washington; to Dipl.-Phys. W. TILLMANN of the 'Max-Planck-Institut für Strömungsforschung', Göttingen; and to Dr. F. R. HAMA of the State University of Iowa, Iowa City, for their courtesy in providing numerical data for some of the measurements cited here.

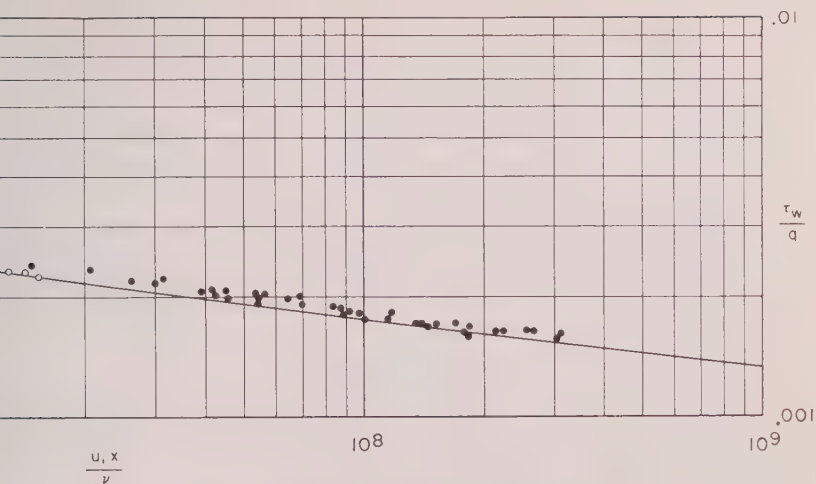


Figure 1 continued

linear shear $\mu \partial u / \partial y$ implies unusual nicety of experimental technique. Direct measurement of the shearing force on an isolated element of the surface, though it requires a considerable effort in the development of special instrumentation, appears to be the most reliable method available at present. Finally, a device based on a relationship between heat transfer and momentum transfer in the sublayer has been used successfully, but must be calibrated by comparison with a primary standard obtained by one of the more conventional methods of wall friction measurement.

The floating element technique is conspicuous among these methods for the consistency of the data obtained. Omitting a discussion of a meteorological application by SHEPPARD [15], three papers describing direct measurements of surface shearing stress on a flat plate in low-speed flow have appeared in the boundary layer literature.

KEMPF [16] in 1929 measured the surface friction at several stations on the flat bottom of a ship model. The presence of a standing wave system on the surface of the towing tank introduced into the friction coefficient data a scatter which is apparently systematic in terms of the Froude number, but random in terms of the Reynolds number; no attempt has been made to remove this scatter in the data considered here for the first four stations. KEMPF's measurements were made at sufficiently large values of x so that the influence of the parameter x_0 should be negligible. A criticism of the data can, however, be based on the possibility of secondary flow in the boundary layer, since the ship hull in question, even though flat-bottomed, was relatively narrow in its

lateral dimension. A further criticism of the measurements at the largest Reynolds numbers has been expressed by FALKNER [17] on the ground that the length of run may have been insufficient to guarantee steady flow near the aft end of the ship model.

SCHULTZ-GRUNOW [18] later used similar methods to measure the friction on the floor of a wind tunnel. Great care was taken to minimize pressure variations along and across the small gap provided for clearance around the floating element. The tunnel boundary layer was removed at an upstream slot, whose downstream lip formed the leading edge of the plate under investigation. Transition to turbulent flow occurred immediately downstream of the curved leading edge; however, there is some doubt about the magnitude of the parameter α_0 , especially since the Reynolds number was apparently varied by changing the velocity at a fixed station along the plate.

More recently, DHAWAN [4] has obtained further data on the turbulent skin friction on a flat plate by means of the floating element technique. DHAWAN was able to induce transition by means of leading edge curvature, and to confirm the existence of turbulent flow over most of the working surface by means of an axial impact pressure traverse near the plate surface.

The experimental data of KEMPF, SCHULTZ-GRUNOW, and DHAWAN are collected in Figure 1. The measurements appear to define a single curve over the range of Reynolds numbers from 2×10^5 to 4×10^8 , with a scatter so small as to be almost unprecedented in boundary layer research. In fact, it may be admitted that the present re-examination of the turbulent boundary layer problem was to a large extent inspired by the remarkable consistency of these local friction data.

The existence of a unique relationship between the ordinate and the slope of the momentum thickness distribution, $\theta(x)$, has already been proposed as a criterion for uniqueness in the turbulent flat plate boundary layer. The immediate question is one of demonstrating that such a relationship exists for the experimental data, without necessarily identifying the resulting function for example with equation (27) above. In view of the wide variations which occur from one experiment to another in various factors which influence boundary layer transition, it is not obvious *a priori* that a state is ever reached in which the dependence of the turbulent boundary layer on its early history is no longer measurable in terms of the local mean properties of the flow.

With the restricted definition of uniqueness considered here, it is sufficient as a beginning to consider the momentum thickness distribution only. The measurements which are most useful for this purpose were made by WIEGHARDT in 1943, as part of an extensive research program carried out since 1939 in a boundary layer tunnel at the 'Institut für Strömungsforschung' at Göttingen. While this program has placed considerable emphasis on the determination of the drag of surface irregularities, including uniform roughness, and

the investigation of turbulent boundary layer flow in a pressure gradient, the case of a flat plate boundary layer has also been investigated in some detail. Continuity in these German experiments is provided by WIEGHARDT's velocity profile measurements in uniform flow, carried out at free stream velocities 17.8 and 33.0 m/s respectively. In addition, SCHULZ-GRUNOW's experiments at 19.4 m/s were made in the same channel. Of these data, WIEGHARDT's mea-

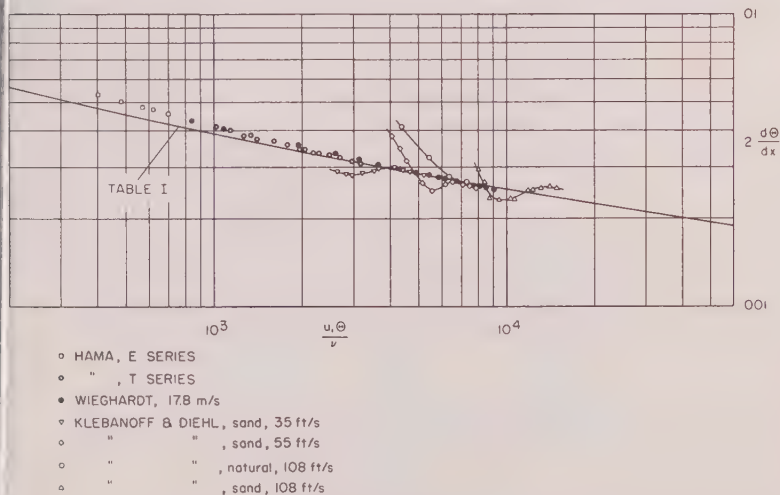


Figure 2
Velocity Profile Friction Measurements in Low-Speed Flow.

measurements at 17.8 m/s, by virtue of early transition and almost immediate coincidence for the actual and apparent origins, are in very good agreement with the properties of the ideal turbulent boundary layer. The local friction coefficients for this series, obtained by differentiating the experimental momentum thickness distribution, are plotted against R_θ in Figure 2.

Some recent measurements in a flat plate boundary layer at the National Bureau of Standards, reported by KLEBANOFF and DIEHL [19], were undertaken in part to test the hypothesis of uniqueness for thick turbulent boundary layers produced for example by initial roughness. Figure 2 shows the relationship between $2 d\theta/dx$ and R_θ observed in experiments with natural transition at a free stream velocity of 108 ft/s, and with initial sand roughness at 35, 55, and 108 ft/s. Except in the last instance, the most downstream data are in good agreement with WIEGHARDT's curve; the agreement is in fact better than might be expected considering the uncertainty in the local friction coefficients. Exam-

ination of the experimental velocity profiles shows that the present criterion for uniqueness is equivalent to the test proposed by KLEBANOFF and DIEHL, of similarity in the velocity distribution, and serves equally well to identify the profiles which should be studied in detail.

Finally, HAMA [20] has published some velocity profile measurements in turbulent boundary layers, and his experimental values for the distribution $\Theta(x)$ have been used to obtain the local friction coefficients plotted in Figure 2.

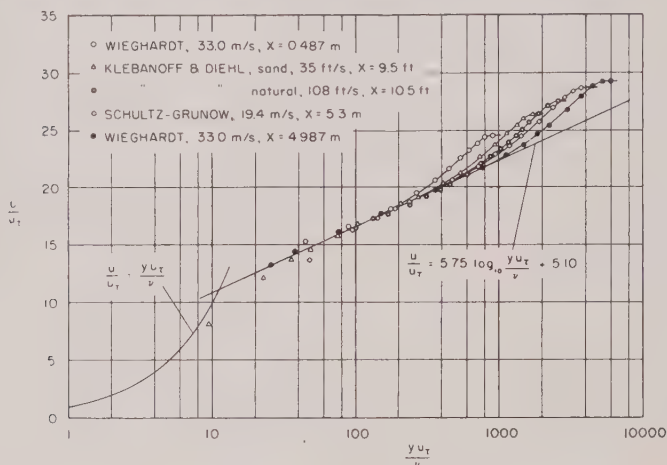


Figure 3
The Law of the Wall.

Several velocity profiles which should be representative of the fully developed turbulent boundary layer are shown in Figure 3, in the coordinate system of equation (21), in order to exhibit the occurrence of a logarithmic relationship in the profile near the surface. According to equation (24), the value of the parameter κ is determined by the slope of the straight line in the figure, and $\varphi(0)$ by the intercept at $y u_\tau / \nu = 1$.

In establishing a value for the boundary layer thickness δ , needed in determining the parameter c_1 from equation (30), it has been found convenient to plot $(1 - u/u_1)^{2/3}$ against y and to fit a straight line to the outer part of the profile in this coordinate system. The thickness δ is defined as the intercept of the y -axis. This convention is neither new nor significant; it is suggested for example by the mixing length theory of PRANDTL when the shearing stress varies linearly with y and the mixing length is constant, but it is justified at present only by its convenience as a well-defined method for specifying the boundary layer thickness.

Figure 4 shows the profiles of Figure 3 in the coordinate system required by the velocity defect law, equation (22). Again fitting a straight line with a slope determined by κ to the logarithmic region, the intercept at $y = \delta = \delta^* u_1/c_1 u_\tau$ $\varphi(1) - \varphi(0)$, according to equations (24), (26), and (30).

This analysis of the turbulent velocity profiles has been carried out for all the data available to the writer, using a value of κ of 0.40 and determining values for $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, c_1 , and c_2 , the latter from equation (31). For WIEGHARDT'S measurements at 33.0 m/s a modified procedure was followed, the local friction

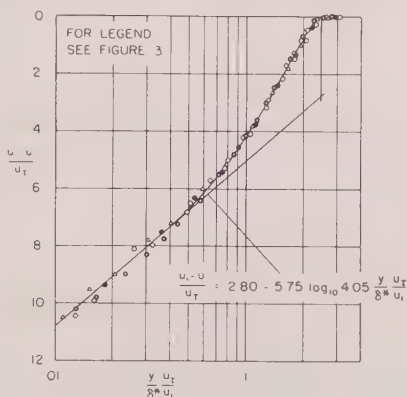


Figure 4
The Velocity Defect Law.

coefficients being obtained from the expression (27) using the measured values of R_θ and preliminary estimates for c_1 , c_2 , and $\varphi(1)$. The collected values for several of the profile parameters are plotted against R_θ in Figure 5, and show a satisfactory degree of consistency.

It is necessary finally to choose particular values for the parameters κ , $\varphi(1)$, $\varphi(0)$, and c_2 , in order to complete the numerical analysis of the turbulent boundary layer. Recognizing the asymptotic nature of the treatment by emphasizing the data at the larger Reynolds numbers, then approximately

$$\kappa = 0.400, \quad \varphi(0) = 5.10, \quad \varphi(1) = 7.90, \quad c_1 = 4.05, \quad c_2 = 29.0.$$

These parameters have been used to evaluate R , R_θ , c_F , and δ^*/θ as functions of c_f from equations (39), (40), and (32), and the resulting data are collected in Table I. The values tabulated in the first and second columns have been plotted in Figure 1, and those from the first and fourth columns in Figure 2. The values tabulated in the fourth and fifth columns are compared with the experimental values of the shape parameter δ^*/θ in Figure 6, the agreement

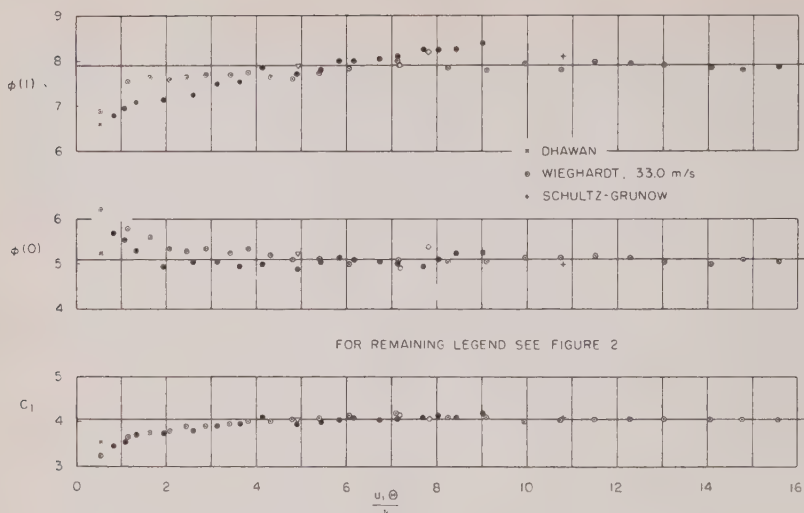


Figure 5
Velocity Profile Parameters.

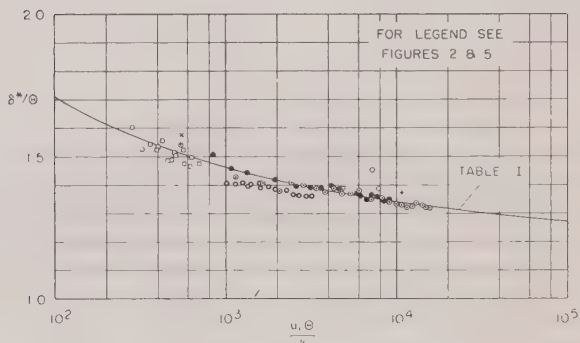


Figure 6
Boundary Layer Shape Parameter.

here of course being expected since these experimental data were used to determine c_2 .

It may be pointed out that the curves in Figures 1 and 2 are in no sense fitted to the measurements in question, since the ideal curves are based on detailed information about the velocity profiles, while the measurements are not. Furthermore, although experimental values for u_z were used to eliminate the

Table I

Suggested Properties of the Ideal Turbulent Boundary Layer in a Fluid of Constant Density

c_f	R	c_F	R_θ	$\frac{\delta^*}{\theta}$	$\frac{u_\tau}{u_1}$
8.0	1.017	1.032	5.25	1.828	0.0632
7.8	1.143	1.005	5.75	1.809	0.0624
7.6	1.291	9.78	6.31	1.790	0.0616
7.4	1.463	9.52	6.96	1.772	0.0608
7.2	1.666	9.25	7.70	1.753	0.0600
7.0	1.906	8.98	8.55	1.735	0.0592
6.8	2.193	8.70	9.54	1.717	0.0583
6.6	2.536	8.43	1.069	1.699	0.0575
6.4	2.950	8.16	1.204	1.681	0.0566
6.2	3.45	7.89	1.362	1.663	0.0557
6.0	4.07	7.62	1.551	1.645	0.0548
5.8	4.84	7.35	1.776	1.628	0.0539
5.6	5.79	7.07	2.047	1.610	0.0529
5.4	7.01	6.80	2.383	1.593	0.0520
5.2	8.49	6.53	2.771	1.575	0.0510
5.0	1.050	6.26	3.29	1.558	0.0500
4.8	1.310	5.99	3.92	1.540	0.0490
4.6	1.653	5.72	4.73	1.523	0.0480
4.4	2.115	5.45	5.77	1.506	0.0469
4.2	2.748	5.19	7.13	1.488	0.0458
4.0	3.64	4.92	8.95	1.471	0.0447
3.8	4.91	4.66	1.143	1.453	0.0436
3.6	6.78	4.39	1.487	1.436	0.0424
3.4	9.72	4.13	2.004	1.419	0.0412
3.2	1.398	3.87	2.700	1.401	0.0400
3.0	2.107	3.60	3.80	1.383	0.0387
2.8	3.30	3.35	5.53	1.366	0.0374
2.6	5.43	3.09	8.38	1.348	0.0361
2.4	9.43	2.835	1.337	1.330	0.0346
2.2	1.755	2.581	2.265	1.311	0.0332
2.0	3.55	2.331	4.14	1.293	0.0316
1.8	8.00	2.083	8.33	1.274	0.0300
1.6	2.068	1.837	1.899	1.254	0.0283
1.4	6.43	1.594	5.13	1.234	0.0265
1.2	2.583×10^9	1.354	1.748	1.213	0.0245
1.0	1.518×10^{10}	1.117	8.48	1.191	0.0224

fluence of Reynolds number in the analysis of the profiles, it was not necessary to know the magnitude of the Reynolds numbers in question. In fact, the discrepancies in Figure 1 are perhaps connected with the assumption that the real and apparent origins coincide for the experimental boundary layers; compare Figure 2, where local quantities only are involved.

Finally, WIEGHARDT's velocity profile data at a free stream velocity of 3.0 m/s are shown in detail in Figure 7 in order to illustrate the consistency of these particular measurements in terms of the law of the wall, equation (21), and the velocity defect law, equation (22).

WALL
LAW

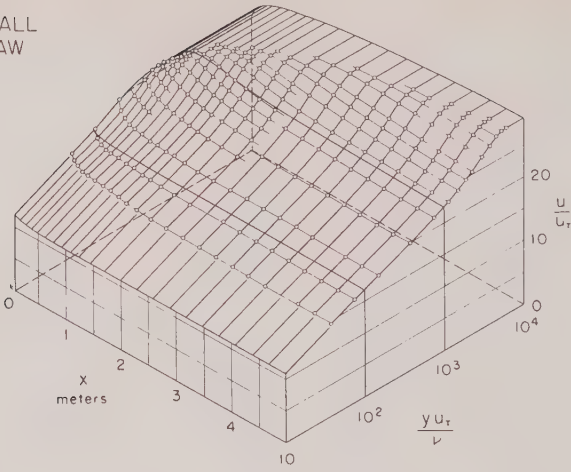


Figure 7a
Göttingen Measurements at 33.0 m/s.

VELOCITY
DEFECT
LAW

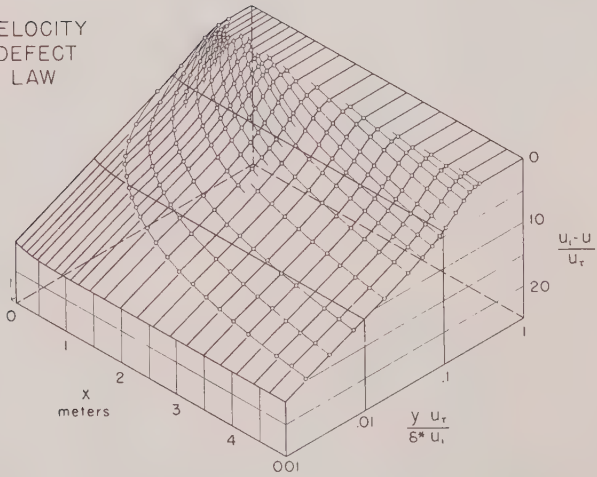


Figure 7b
Göttingen Measurements at 33.0 m/s.

5. Discussion

Most of the ideas which appear in the present study are not new. For example, equation (23) was postulated on empirical grounds, and equation (39) derived as a consequence, by VON KÁRMÁN in 1932 [21], and SCHULTZ-GRUNOW in 1939 carried an analysis of his experimental data almost to the point where the numerical results of the present paper could have been obtained. More recent papers by ROTTA [22], BAINES [23], and LANDWEBER [24] have discussed the representation of the turbulent boundary layer in terms of the law of the wall and the velocity defect law, but have not emphasized the physical interpretation of these formulae. The most important single element in the discussion, and one deserving a place among major contributions to the boundary layer literature, is the demonstration by MILLIKAN [12] that the two similarity laws together imply a logarithmic region in the velocity profile.

In reviewing the asymptotic nature of the turbulent boundary layer problem against the background of the similarity laws, it is obvious that extrapolation of a local friction law based on functional similarity to indefinitely small Reynolds numbers is permissible only in a restricted sense. For example, the parameter c_1 is evaluated from equation (30); however, the integral in the latter expression neglects the dependence of the sublayer flow on Reynolds number, and so cannot be uniformly valid for all the experimental data considered here. The contribution of the sublayer flow to the integral defining the displacement thickness increases with decreasing Reynolds number, and the approximation involved in identifying the measured quantity $u_1 \delta^*/u_\tau \delta$ with c_1 for small values of R_θ is apparent in Figure 5.

Although this fault is easily corrected at the cost of slightly more complicated formulae [24], it is evident that the two similarity laws cited here, and therefore equation (27), must inevitably fail at sufficiently small values of the Reynolds number. The region of common validity is marked by a logarithmic velocity profile, which is known to obtain only for values of $y u_\tau/\nu$ greater than say 50. However, Figure 4 shows that the logarithmic law can describe the fully developed velocity profile only within the inner 20 percent of the boundary layer in any case, so that the smallest value of $\delta u_\tau/\nu$ which satisfies both criteria is about 250; the corresponding value of $u_1 \theta/\nu$ is about 700. Consulting the experiments, the approximate value of the abscissa in Figure 5, below which the parameters $\varphi(0)$ and $\varphi(1)$ appear to be no longer sensibly independent of Reynolds number, is $u_1 \theta/\nu = 1500$.

It is clear, from the evidence considered here, that the velocity defect law is of primary importance in determining the asymptotic properties of the ideal turbulent boundary layer for Reynolds numbers of technical interest. The probable physical significance of this fact may be discussed in terms of the charac-

teristic scales which were introduced early in the present organization of the boundary layer problem.

Turbulent fluid motion as observed experimentally is characterized at one extreme by the presence of large eddies, which are responsible for accepting energy from a prime mover, and at the other extreme by the presence of small eddies, in which viscous dissipation accompanies an approach to isotropy. Intermediate corresponding characteristic scales are distinct provided that the Reynolds number is sufficiently large. Although study of fluctuating phenomena in a turbulent boundary layer in terms of spectra and scale has not yet reached a stage where it is possible always to distinguish cause and effect, it may be supposed that the characteristic lengths δ and ν/u , which appear in the two velocity defect laws, are in fact useful measures of a macroscale and microscale for the turbulent flow.

Measurements of the space correlation across a turbulent channel flow by LAUFER [25], across a free jet by CORRSIN and UBEROI [26], and across a boundary layer by KLEBANOFF [9], together with the observation that a velocity defect law of the kind considered here holds at least approximately for these flows, are convincing evidence that large eddies are important in the general description of turbulent shear flow whether the boundaries are free or solid or both. Since the velocity defect is also the momentum defect for a fluid of constant density, it is to be expected that the defect law and the equations of mean motion together must determine the shearing stress not only at the wall but throughout the fully turbulent shear flow. Furthermore, both the velocity defect and the turbulent shearing stress have as a characteristic length the thickness δ , which represents the large eddy structure and thus in some sense the history of the flow; the same characteristic length is found for the phenomenon of intermittent turbulence at the free edge of the shear flow [9], [11]. These observations perhaps explain some deficiencies in mixing hypotheses patterned after a particular model, since the present assertion is first that the actual transport process is connected with the recent history of the motion as well as with purely boundary conditions, and second that momentum transport is accomplished by the largest eddies in the flow.

The physical significance of the law of the wall is not yet clearly recognized except as a consequence of the constraint applied to the turbulent motion by the condition of vanishing velocity at the fixed boundary¹⁾. The law of the wall appears to be related primarily to local conditions and thus to the small-scale turbulent structure, since the dimensionless velocity profile is found experimentally to be insensitive to variations in ambient pressure distribution or to changes in the nature of the other boundaries of the flow. In this connection it is important to note that, although the law of the wall can be stated only in the presence of a finite shearing stress at the surface, the law is inherently incapable of providing any estimate of magnitude for the shear.

¹⁾ See *The Law of the Wall in Turbulent Shear Flow*, to be published separately.

The present study suggests strongly that the assumptions which lead to the logarithmic velocity distribution are in effect equivalent to the assumption that there is a region in the flow where the mean velocity is dependent on the small eddy structure and thus on the dissipation, while in the same region the momentum defect and shearing stress are dependent on the large eddy structure. Thus a search for a relationship between shear and velocity is in this sense a search for a relationship between the turbulent structures at large and small wave numbers, and so might be undertaken using methods which have been found useful in the analysis of isotropic turbulence.

The widespread current revival of interest in the theoretical and experimental aspects of the boundary layer problem can hardly fail to lead to important discoveries, both in a knowledge of the structure of turbulent shear flows and in the formulation of an adequate theory. In the meantime, the writer hopes that the discussion given here, of the more rudimentary properties of one such flow, may serve to allow the identification of a proper environment for further experimental research, and also may serve to provide a point of departure for study of the effects of pressure gradient, compressibility, and roughness.

REFERENCES

- [1] LAGERSTROM, P., and LIEPMANN, H. W., *Laminar Flow. High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, Vol. IV, Section B (to be published).
- [2] DRYDEN, H. L., *Air Flow in the Boundary Layer Near a Plate*, NACA, TR 562 (1936).
- [3] LIEPMANN, H. W., *Investigations on Laminar Boundary Layer Stability and Transition on Curved Boundaries*, NACA, ACR 3H30 (W-107) (1943).
- [4] LIEPMANN, H. W., and DHAWAN, S., *Direct Measurements of Local Skin Friction in Low-Speed and High-Speed Flow*, Proc. First U. S. nat. Congr. appl. Mech. 869-874 (Chicago, 1951). See also DHAWAN, S., *Direct Measurements of Skin Friction*, GALCIT, Thesis (1951), or NACA, TN 2567 (1952).
- [5] RÖTTA, J., *Das in Wandnähe gültige Geschwindigkeitsgesetz turbulenter Strömungen*, Ing.-Arch. 18, 277-280 (1950).
- [6] LIEPMANN, H. W., and LAUFER, J., *Investigation of Free Turbulent Mixing*, NACA, TN 1257 (1947).
- [7] BATCHELOR, G. K., *Note on Free Turbulent Flows with Special Reference to the Two-Dimensional Wake*, JAS 17, 441-445 (1950).
- [8] LAUFER, J., *The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow*, U. S. Dept. Commerce, Nat. Bureau Standards, Washington, Rep. 1974 (1952) (to be published as NACA TN).
- [9] KLEBANOFF, P. S., *Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient*, U. S. Dept. Commerce, Nat. Bureau Standards, Washington, Rep. 2454 (1953) (to be published as NACA TN).
- [10] TOWNSEND, A. A., *The Eddy Viscosity in Turbulent Shear Flow*, Philos. Mag. [7th Series] 41, 890-906 (1950).
- [11] TOWNSEND, A. A., *The Structure of the Turbulent Boundary Layer*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 47, 375-395 (1951).
- [12] MILLIKAN, C. B., *A Critical Discussion of Turbulent Flows in Channels and Circular Tubes*, Proc. Vth Congr., Cambridge, Mass., 386-392 (1938).

- [13] VON MISES, R., *Some Remarks on the Laws of Turbulent Motion in Tubes*, Applied Mechanics, Theodore von Kármán Anniversary Volume, 317-32 (1941).
- [14] KAMPÉ DE FÉRIET, J., *Sur l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible entre deux plaques parallèles indéfinies*, Houille Blanche 3, 509-517 (1948).
- [15] SHEPPARD, P. A., *The Aerodynamic Drag of the Earth's Surface and the Value of von Kármán's Constant in the Lower Atmosphere*, PRSA 188, 208-216 (1947).
- [16] KEMPF, G., *Neue Ergebnisse der Widerstandsforschung*, Werft, Reederei und Hafen 10, 234-239, 247-253 (1929).
- [17] FALKNER, V. M., *A New Law for Calculating Drag*, Aircraft Eng. 15, 65-66 (1943).
- [18] SCHULTZ-GRUNOW, F., *Neues Reibungswiderstandsgesetz für glatte Platten*, Luftfahrtforschung 17, 239-246 (1940), translated as *New Frictional Resistance Law for Smooth Plates*, NACA, TM 986 (1941).
- [19] KLEBANOFF, P. S., and DIEHL, Z. W., *Some Features of Artificially Thickened Fully Developed Turbulent Boundary Layers with Zero Pressure Gradient*, NACA, TN 2475 (1951).
- [20] HAMA, F. R., *The Turbulent Boundary Layer Along a Flat Plate*, I and II (in Japanese), Rep. Inst. Sci. Technol. Tokyo Imperial University 1, 13-14, 49-50 (1947).
- [21] VON KÁRMÁN, T., *Theorie des Reibungswiderstands. Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs*, 50-73 (Hamburg 1932).
- [22] RÖTTA, J., *Über die Theorie der turbulenten Grenzschichten*, Mitt. Max-Planck-Inst. Strömungsforsch., Göttingen, No. 1 (1950); translated as *On the Theory of the Turbulent Boundary Layer*, NACA, TM 1344 (1953). See also *Beitrag zur Berechnung der turbulenten Grenzschichten*, Ing.-Arch. 19, 31-44 (1951); translated as *Contribution to the Calculation of Turbulent Boundary Layers*, U. S. Navy Dept., David W. Taylor Model Basin, Translation 2475 (1951).
- [23] BAINES, W. D., *A Literature Survey of Boundary Layer Development on Smooth and Rough Surfaces at Zero Pressure Gradient*, State Univ. Iowa, Iowa City, Contract N8onr-500 (1951).
- [24] LANDWEBER, L., *The Frictional Resistance of Flat Plates in Zero Pressure Gradient* (to be published in: Trans. Soc. naval Arch. Marine Eng.).
- [25] LAUFER, J., *Investigation of Turbulent Flow in a Two-Dimensional Channel*, NACA, TN 2123 (1950), TR 1053 (1951).
- [26] CORRSIN, S., and ÜBEROI, M. S., *Spectra and Diffusion in a Round Turbulent Jet*, NACA, TN 2124 (1950), TR 1040 (1951).
- [27] LUDWIG, H., and TILLMANN, W., *Untersuchungen über die Wandschubspannung in turbulenten Reibungsschichten*, Ing.-Arch. 17, 288-299 (1949); translated as *Investigations of the Wall Shearing Stress in Turbulent Boundary Layers*, NACA, TM 1285 (1950).

Summary

Existing measurements of low-speed turbulent surface friction on a flat plate in the absence of pressure gradient and roughness, are shown to be consistent with a simple analysis based on functional similarity in the velocity profile. In particular, the fully developed turbulent boundary layer is found to be unique within the accuracy of the experimental data, with uniqueness defined as the

existence of a definite correspondence between local friction coefficient and momentum thickness Reynolds number. The relationships known as the law of the wall and the velocity defect law are found to describe the turbulent velocity profiles accurately for a considerable range of Reynolds numbers, and an effort is made to clarify the physical significance of these formulae. Finally, the proper definition of a length Reynolds number is discussed in terms of the asymptotic local properties of the ideal boundary layer, and numerical values for ideal mean and local friction coefficients are tabulated against Reynolds numbers based on momentum thickness and on distance from the leading edge.

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, dass vorhandene Messungen der turbulenten Wandschubspannung an der glatten ebenen Platte in inkompressibler Strömung ohne Druckgradient durch eine einfache Berechnung in Übereinstimmung gebracht werden können. Die Rechnung beruht auf einer funktionellen Ähnlichkeit der Geschwindigkeitsverteilung. Es wird im besonderen gefunden, dass die vollentwickelte turbulente Grenzschicht innerhalb der Messgenauigkeit einem eindeutigen Zusammenhang zwischen dem örtlichen Reibungskoeffizienten und der Reynoldsschen Zahl, bezogen auf die Impulsdicke, folgt. Die Beziehungen, die als Wandgesetz und Mittengesetz bekannt sind, beschreiben die Geschwindigkeitsverteilung genau innerhalb eines erheblichen Bereiches Reynoldsscher Zahlen, und es wird versucht, den physikalischen Inhalt dieser Gesetzmässigkeiten zu vertiefen. Abschliessend wird eine zweckmässige Definition der auf Plattenlänge bezogenen Reynoldsschen Zahl diskutiert, die auf dem asymptotischen örtlichen Zustand der idealen Grenzschicht beruht. Rechenwerte der idealen, mittleren und örtlichen Reibungskoeffizienten, bezogen auf beide obigen Definitionen der Reynoldsschen Zahl, werden tabelliert.

(Received: August 17, 1953.)

Untersuchungen über Elektronenströmungen

Von JOHANNES MÜLLER, Berlin

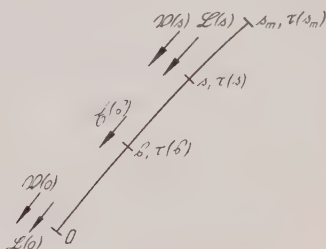
Gewisse Eigenschaften im Verhalten von Elektronenströmungen auf klassischer Grundlage werden aus Matrizendarstellungen gewonnen.

Die Bedingungen, wie sie durch die Erhaltungssätze für Energie und Ladung bei Elektronenströmungen auftreten, werden für den Fall kleiner Abweichungen vom stationären Zustand ermittelt. Die Anordnungen sollen sich also linear verhalten, das heisst, die Wirkung einer Anregung soll ohne gegenseitige Störung mit der Wirkung einer anderen Anregung überlagert werden können. Die Beeinflussung der Elektronen erfolgt nur über das elektromagnetische Feld. Wechselwirkungen zwischen Elektronen, die zu einer erheblichen Änderung ihrer Geschwindigkeit führen – das sind Zusammenstösse im Sinne der kinetischen Gastheorie –, werden vernachlässigt. Die Gesetzmässigkeiten werden für Strömungen mit einer und mehreren Teilchengeschwindigkeiten sowie mit

Geschwindigkeitsspektrum aufgestellt. Für ein Exponentialspektrum, wie bei der Emission der Elektronen von einer Glühkathode entsteht, ergeben sich zwanglos Ausdrücke, wie sie unmittelbar für die Theorie der Schwankungen von Bedeutung sind, was mit dem energetischen Charakter des Rauschens zusammenhängt. Durch ein hohes Magnetfeld wird der räumliche Verlauf des Weges der Elektronen vorgeschrieben. Dadurch ist direkt nur das elektrische Feld in Richtung des Weges für die Bewegungsvorgänge verantwortlich.

Aufstellung einer Leistungsbilanz

Gegeben sei eine Strömung als Strahl mit einer Teilchengeschwindigkeit v an jedem Ort, deren Elektronen die Wegstrecke von O über s , s bis s_m zurücklegen (Figur 1). Die statischen Laufzeiten betragen dabei 0 , $\tau(s)$, $\tau(s)$ und $\tau(s_m)$ der Strahlgleichstrom i . Den statischen elektrischen Feldern ist längs der Wegstrecke ein schwaches elektrisches Wechselfeld überlagert. Wegen des starken magnetischen Führungsfeldes haben Wechselmagnetfelder keinen Einfluss. Nächst werde nur ein Wechselfeld $\mathfrak{E}(s)$ längs der Wegstrecke ds am Ort s angenommen. Dadurch erhalten die Elektronen eine infinitesimale Vorschubgeschwindigkeitsmodulation ($-B$ -Modulation) von $\mathfrak{E}(s) ds \exp j \omega t$ zur Zeit t .



Figur 1

Richtungen der positiven Halbwellen von Wechsel-Feldstärke $\mathfrak{E}(s)$, -Vorgeschwindigkeit \mathfrak{Q} -Konvektionsstrom \mathfrak{Q} sowie die Bezeichnungen der Wegstrecken und Laufzeiten. Bewegungsrichtung der Elektronen von O bis s_m .

an s . Zur Zeit $t + \tau(s) - \tau(s)$ werden diese Elektronen mit dem unveränderten Zuwachs an B -Modulation am Punkt s ankommen (Erhaltung der Energie). Die statischen Laufzeiten sind eine eindeutige Funktion der Anfangsenergie oder der statischen Anfangsvorgeschwindigkeit U_e der Elektronen, wenn zunächst keine Kreisbewegung mit Zyklotron-Frequenz senkrecht zum magnetischen Führungsfeld vorhanden ist. Für die Erhöhung der Laufzeit zur Zeit t an s ankommenden Elektronen ergibt sich dann:

$$\frac{d[\tau(s) - \tau(s)]}{dU_e} \mathfrak{E}(s) ds e^{j\omega t - j\omega[\tau(s) - \tau(s)]}.$$

Mit dem Gleichstrom i multipliziert, ergibt dies den Überschuss der Elektronenraumladung zwischen s und s zur Zeit t . Aus der zeitlichen Änderung dieser Ladung erhält man den infinitesimalen Konvektionswechselstrom an s zur Zeit t (Erhaltung der Ladung). Das Vorzeichen hängt mit den gewählten Richtungen (Figur 1) zusammen.

$$\left. \begin{aligned} d\mathfrak{L}(s) &= -i \frac{d[\tau(s) - \tau(\bar{s})]}{dU_e} \mathfrak{E}(s) ds j \omega e^{j\omega t - j\omega[\tau(s) - \tau(\bar{s})]} \\ i \mathfrak{E}(s) e^{j\omega t} ds \frac{de^{-j\omega[\tau(s) - \tau(\bar{s})]}}{dU_e} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Da es sich im folgenden stets um periodische Vorgänge handelt, wird die Zeitfunktion weggelassen. Wenn auf der gesamten Wegstrecke ein Wechselfeld besteht, so erhält man durch Integration die durch Feldmodulation entstehende Konvektionsstrommodulation (\mathfrak{L} -Modulation), da bei kleinen Abweichungen die Einzelwirkungen sich addieren, aus:

$$\mathfrak{L}'(s) = i \int_0^s \mathfrak{E}(\bar{s}) ds \frac{de^{-j\omega[\tau(s) - \tau(\bar{s})]}}{dU_e} \quad (2)$$

Die Rückwirkungsfelder infolge der Abstrahlung elektromagnetischer Energie durch die veränderlichen Bewegungen der Elektronen in ihrer Gesamtheit (die Strahlung des einzelnen Elektrons wird vernachlässigt) sind in der angenommenen Wechselfeldverteilung $\mathfrak{E}(s)$ mit enthalten. Wird (1) auf die Anfangs- \mathfrak{B} -Modulation angewendet ($\mathfrak{E}(s) ds$ wird durch $\mathfrak{B}(0)$ ersetzt, $\tau(s) = 0$), so ergibt sich dieser Anteil der $\mathfrak{L}(s)$ -Modulation zu:

$$\mathfrak{L}''(s) = i \mathfrak{B}(0) \frac{de^{-j\omega\tau(s)}}{dU_e} \quad (3)$$

Damit erhält man für die gesamte \mathfrak{L} -Modulation an s , wenn noch die Wirkung der Anfangs- \mathfrak{L} -Modulation hinzugenommen wird:

$$\mathfrak{L}(s) = i \int_0^s \mathfrak{E}(\bar{s}) ds \frac{de^{-j\omega[\tau(s) - \tau(\bar{s})]}}{dU_e} + i \mathfrak{B}(0) \frac{de^{-j\omega\tau(s)}}{dU_e} + \mathfrak{L}(0) e^{-j\omega\tau(s)} \quad (4)$$

Wenn die Feldverteilung erzwungen wird, wie bei der Ableitung der Leistungsbilanz, so kann die Differentiation nach U_e vor das Integral gesetzt werden. Aus (4):

$$\mathfrak{L}(s) = i \frac{d}{dU_e} \left[\int_0^s \mathfrak{E}(\bar{s}) ds e^{-j\omega[\tau(s) - \tau(\bar{s})]} - \mathfrak{B}(0) e^{-j\omega\tau(s)} \right] - \mathfrak{L}(0) e^{-j\omega\tau(s)} \quad (5)$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist nichts anderes als die \mathfrak{B} -Modulation an s .

$$\mathfrak{B}(s) = \int_0^s \mathfrak{E}(\xi) d\xi e^{-j\omega[\tau(s)-\tau(\xi)]} + \mathfrak{B}(0) e^{-j\omega\tau(s)}. \quad (6)$$

Wenn das Wechselfeld nicht erzwungen wird, so gilt die folgende Gleichung

$$\mathfrak{Q}(s) = i \frac{d\mathfrak{B}(s)}{dU_e} + \mathfrak{Q}(0) e^{-j\omega\tau(s)} \quad (7)$$

nicht bei endlicher Stromstärke, da eine Rückwirkung auf die Feldverteilung wegen der sich verändernden Raumladungsverteilung beim Übergang zu einer um dU_e erhöhten statischen Anfangsvoltgeschwindigkeit für die gesamte Strömung eintritt. Dieser Einfluss geht gegen Null, wenn der Gleichstrom der Strömung gegen Null geht. Allgemein gilt:

$$\mathfrak{Q}(s) = \Delta i \frac{d\mathfrak{B}(s)}{dU_e} + \mathfrak{Q}(0) e^{-j\omega\tau(s)}. \quad (8)$$

Durch Umformung kann aus (6) nach dem Wechselfeld $\mathfrak{E}(s)$ aufgelöst werden:

$$\mathfrak{E}(s) = e^{-j\omega\tau(s)} \frac{d[\mathfrak{B}(s) e^{j\omega\tau(s)}]}{ds}. \quad (9)$$

Die durch das elektromagnetische Wechselfeld der Strömung zugeführte Leistung beträgt:

$$\mathfrak{N} = \int_0^{s_m} \mathfrak{E}(s) ds \mathfrak{Q}^*(s) \quad (10)$$

$\mathfrak{E}(s)$ aus (9), $\mathfrak{Q}(s)$ aus (7) eingesetzt und partiell integriert, ergibt:

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{B}(s_m) \mathfrak{Q}^*(s_m) - \mathfrak{B}(0) \mathfrak{Q}^*(0) - j\omega \int_0^{s_m} \mathfrak{B}(s) \mathfrak{B}^*(s) i \frac{d^2\tau(s)}{dU_e ds} ds. \quad (11)$$

Diese Gleichung besagt, dass die durch das Wechselfeld zugeführte Wirkleistung [Realteil von \mathfrak{N}] und die am Anfang der Strömung zugeführte Wirkleistung [Realteil von $\mathfrak{B}(0) \mathfrak{Q}^*(0)$] zusammen die abgegebene Wirkleistung am Ende der Strömung [Realteil von $\mathfrak{B}(s_m) \mathfrak{Q}^*(s_m)$] ergibt. Da die Voltgeschwindigkeit stets ein Mass für die Energie der Elektronen ist, gilt die Beziehung auch bei relativistischer Massenänderung. Das dritte Glied auf der rechten Seite von (11) stellt eine reine Blindleistung dar. Werden die Wechselgeschwindigkeiten eingeführt, so ergibt sich nichtrelativistisch dieser Anteil zu:

$$j\omega \int_0^{s_m} m_0 \mathbf{v}(s) \mathbf{v}^*(s) ds.$$

¹⁾ Durch * wird der konjugiert-komplexe Wert bezeichnet.

ies ist die Blindleistung der Energie der Wechselbewegung und entspricht zeichenmässig einer Induktivität. dn sind die Anzahl der Elektronen mit Wechselgeschwindigkeiten $v(s)$ und Ruhemasse m_0 .

Es soll nunmehr der Einfluss einer Bewegung senkrecht zum magnetischen Führungsfeld untersucht werden. Zu diesem Zweck wird das Quadrat der Bewegungsgrösse senkrecht zu dem Führungsfeld

$$p_{\perp}^2 = p^2 - p_{\parallel}^2 = p^2 - (p \cdot e_B)$$

nach der Zeit differenziert. e_B ist der Einheitsvektor in Richtung der magnetischen Induktion. Unter Benutzung des Bewegungsgesetzes

$$\frac{dp}{dt} = -e E - \frac{e [p \cdot B]}{m}$$

(bei Elektronen ist die Elementarladung e positiv einzusetzen) ergibt sich, wenn die ersten räumlichen Ableitungen der Induktion stetig sind:

$$\frac{dp_{\perp}^2}{dt} = -2e(p_{\perp} E_{\perp}) - 2 \frac{p_{\perp}^2}{B} \cdot \frac{dB}{dq_{\perp}} u_{\parallel}.$$

Dabei ist dB/dq_{\perp} die Änderung der Induktion in Richtung des augenblicklich bestehenden Impulses p_{\perp} . Wenn die Intensität des Magnetfeldes gegen ∞ geht, erleidet senkrecht zum Magnetfeld nur eine Kreisbewegung mit Zyklotronfrequenz. Damit wird der zeitliche Mittelwert von $(p_{\perp} E_{\perp})$ Null und von $B dq_{\perp}$, wegen der Quellenfreiheit der Induktion, $-dB/2 ds$. Es folgt:

$$\frac{dp_{\perp}^2}{dt} = \frac{p_{\perp}^2}{B} \cdot \frac{dB}{dt}; \quad \frac{p_{\perp}^2}{B} = \text{const} = \frac{p_0^2}{B_0}.$$

Dies bedeutet, dass die Bewegungsgrösse p_{\perp} keine Modulation durch die Wechselfelder erfährt. p_{\perp}^2/B ist proportional dem Drall der Kreisbewegung, der mit $B \rightarrow \infty$ gegen Null geht. Es kann jetzt angegeben werden, wie die Bildung von τdU_r in (1) bei Vorhandensein einer Querbewegung vorzunehmen ist. Die Bewegungsgrösse senkrecht zum Führungsfeld $p_{0\perp}$ am Anfang wird dabei unverändert gelassen. Wenn die statischen elektrischen und magnetischen Felder in ihrer Richtung nicht zusammenfallen, erfordert eine Realisierung derartiger Strömungen allerdings erhebliche Magnetfeldstärken. Die grundsätzliche Möglichkeit solcher geführter Strömungen ergibt die Berechtigung, das Verhalten von Strömungen mit Steuerungen in Fortschrittingsrichtung in allgemeiner Weise zu behandeln. Die Ergebnisse können sofort auf Fälle angewendet werden, bei denen kein oder nur ein schwaches Magnetfeld besteht, wenn die Wirkungen von Querbewegungen (bedingt durch seitliche thermische Anfangsenergien oder durch Quersteuerung längs der Strömung) vernachlässigt werden können.

Die Wirkleistungsbilanz gilt auch für Elektronenwege mit Umkehrstelle. Während bei Wegen ohne Umkehrstelle die Integrationsgrenzen fest sind, ver-

ändert sich der Integrationsbereich durch die Ortsänderung der Umkehrstelle. Ein Teil des Weges, der die Umkehrstelle enthält, werde für sich betrachtet. Dieser Teil soll einmal so gross sein, dass am Anfang und Ende dieser Teilstrecke die Wechselgrössen klein gegenüber den statischen Werten sind, andererseits so klein sein, dass trotz der zeitlich veränderlichen Vorgänge die Verhältnisse in diesem Gebiet als statisch angesehen werden können, so dass die Wirkleistung am Anfang und Ende dieser kurzen Wegstrecke die gleiche ist. In der Wirkleistungsbilanz wird damit durch derartige Umkehrstellen nicht verändert.

I. Strömungen ohne Anfangssteuerung

Die Wirkleistungsbilanz kann auf beliebig viele Einzelströmungen erweitert werden. In einem elektromagnetischen Hohlraum¹⁾ ohne elektromagnetische Verluste sollen sich m Einzelströmungen befinden, deren Wege an den Begrenzungen des Hohlraums beginnen und enden. Damit wird den Strömungen insgesamt weder elektromagnetische Wirkleistung entnommen noch zugeführt, und die Wirkleistung am Anfang der Wege ist gleich der Wirkleistung am Ende der Wege. Seien \mathfrak{L}_μ und \mathfrak{B}_μ bzw. $\mathfrak{L}^{(\mu)}$ und $\mathfrak{B}^{(\mu)}$ die Wechselkonvektionsströme und die Wechselvoltgeschwindigkeiten am Anfang bzw. am Ende des μ -ten Weges, so gilt bei m Einzelströmungen:

$$\sum_{\mu=1}^m \mathfrak{B}^{(\mu)} \mathfrak{L}^{(\mu)*} - \mathfrak{L}^{(\mu)} \mathfrak{B}^{(\mu)*} = \sum_{\mu=1}^m \mathfrak{B}_\mu \mathfrak{L}_\mu^* + \mathfrak{L}_\mu \mathfrak{B}_\mu^* \quad (1)$$

Auf beiden Seiten steht die doppelte Wirkleistung. Bei kleinen Abweichungen besteht ein linearer Zusammenhang zwischen den End- und Anfangsmodulationen, darstellbar durch $2m$ Gleichungen. Die Anfangsmodulationen sind bei Strömungen ohne Anfangssteuerung voneinander unabhängig. Die Endmodulationen des μ -ten Weges als lineare Funktion von den Anfangsmodulationen sind angeschrieben²⁾:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{L}^{(\mu)} &= \mathfrak{L}_{\mu \mathfrak{L}_1} \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_{\mu \mathfrak{B}_1} \mathfrak{B}_1 + \dots + \mathfrak{L}_{\mu \mathfrak{L}_m} \mathfrak{L}_m + \mathfrak{L}_{\mu \mathfrak{B}_m} \mathfrak{B}_m, \\ \mathfrak{B}^{(\mu)} &= \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{L}_1} \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{B}_1} \mathfrak{B}_1 + \dots + \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{L}_m} \mathfrak{L}_m + \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{B}_m} \mathfrak{B}_m \end{aligned} \right\} \quad (\mu = 1, 2, \dots, m) \quad (13)$$

¹⁾ Der Hohlraum dient dabei nur dazu, den Energieaustausch auf definierte Stellen durch Vermeidung von Abstrahlung zu lokalisieren, und ist bei der Anwendung auf Anordnungen, bei denen dies ohne weiteres berechtigt ist, nicht wesentlich.

²⁾ Derartige Koeffizienten sind bei ebener Strömung von F. B. LLEWELLYN, Bell Syst. Tech. 14, 652 (1935); F. B. LLEWELLYN und L. C. PETERSON, Proc. I. R. E. 32, 144 (1944), und bei ebener Strömungen mit Ionen von W. O. SCHUMANN, Naturwissenschaften 31, 140 (1943), berechnet worden. H. W. KÖNIG, Arch. elektr. Übertr., Nov. 1952, 445, findet bei ebener Strömung mit einer Trägergeschwindigkeit eine einfache Beziehung zwischen den Koeffizienten.

Anmerkung bei der Korrektur: Durch die Verwendung der Voltgeschwindigkeit anstatt der Geschwindigkeit werden die Beziehungen formal vollständig analog denjenigen bei einem verlustfreien System von m Leitungen bzw. einem verlustlosen $(2m)$ -Pol.

der in Matrix-Form:

$$\mathfrak{A} \begin{vmatrix} \mathfrak{Q}_1 \\ \mathfrak{B}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{Q}^{(1)} \\ \mathfrak{B}^{(1)} \end{vmatrix} \quad (14a)$$

$$\begin{vmatrix} \dots \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \dots \end{vmatrix}$$

und transponiert

$$(\mathfrak{Q}^{(1)} \mathfrak{B}^{(1)} \dots) = (\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{B}_1 \dots) \mathfrak{A}' \quad (14b)$$

Die $(2m)$ -reihige quadratische Matrix \mathfrak{A} lautet:

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 & \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{B}_2 & \dots \\ \mathfrak{B}_1 \mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_1 \mathfrak{Q}_2 & \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 & \dots \\ \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{Q}_2 & \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{B}_2 & \dots \\ \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Q}_2 & \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (15)$$

(14b) wird in der folgenden Weise erweitert:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{Q}^{(1)} \mathfrak{B}^{(1)} \dots \\ \mathfrak{Q}^{(1)} \\ \dots \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathfrak{B}^{(1)*} \\ \mathfrak{Q}^{(1)} \\ \dots \end{vmatrix} = (\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{B}_1 \dots) \mathfrak{A}' \begin{vmatrix} \mathfrak{B}^{(1)*} \\ \mathfrak{Q}^{(1)} \\ \dots \end{vmatrix} = (\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{B}_1 \dots) \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_1^* \\ \mathfrak{Q}_1 \\ \dots \end{vmatrix} \quad (16)$$

Auf der linken Seite steht dann die doppelte Wirkleistung der Endmodulationen, die mittels (12) durch die doppelte Wirkleistung der Anfangsmodulationen ersetzt wird. (14a) werde links mit der Vertauschungsmatrix \mathfrak{C} multipliziert. Dadurch wird die 2. mit der 1., die 4. mit der 3. Zeile usf. vertauscht. Multiplikation der \mathfrak{A} -Matrix rechts mit \mathfrak{C} bewirkt die entsprechende Spaltenvertauschung. $\mathfrak{C} \mathfrak{C}$ ergibt keine Vertauschung. Aus (14a) entsteht:

$$\mathfrak{C} \mathfrak{A} \mathfrak{C} \begin{vmatrix} \mathfrak{Q}_1 \\ \mathfrak{B}_1 \\ \dots \end{vmatrix} = \mathfrak{C} \begin{vmatrix} \mathfrak{Q}^{(1)} \\ \mathfrak{B}^{(1)} \\ \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{B}^{(1)} \\ \mathfrak{Q}^{(1)} \\ \dots \end{vmatrix} = \mathfrak{C} \mathfrak{A} \mathfrak{C} \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{Q}_1 \\ \dots \end{vmatrix} = \overline{\mathfrak{A}} \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{Q}_1 \\ \dots \end{vmatrix} \quad (17)$$

Für $\mathfrak{C} \mathfrak{A} \mathfrak{C}$ wird \mathfrak{A} gesetzt. \mathfrak{A} geht aus \mathfrak{A} durch Vertauschung der 2. Zeile und Spalte mit der 1. Zeile und Spalte usf. hervor. Es gilt $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^{-1}$. Die Reihenfolge von Vertauschung und Transponierung bzw. Bildung der inversen Matrix ist gleichgültig. Die Determinanten von \mathfrak{A} und \mathfrak{A} sind gleich. Der konjugiert-komplexe Wert von (17) gebildet und in (16) eingesetzt, ergibt:

$$(\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{B}_1 \dots) \mathfrak{A}' \overline{\mathfrak{A}'} \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_1^* \\ \mathfrak{Q}_1^* \\ \dots \end{vmatrix} = (\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{B}_1 \dots) \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_1^* \\ \mathfrak{Q}_1^* \\ \dots \end{vmatrix} \quad (18)$$

Die Gleichung ist für beliebige Anfangsmodulationen erfüllt, wenn:

$$\mathfrak{A}' \overline{\mathfrak{A}^*} = E \quad \text{und transponiert} \quad \mathfrak{A} \overline{\mathfrak{A}'^*} = E. \quad (1)$$

\mathfrak{A}'^* ist damit die zu \mathfrak{A} inverse Matrix \mathfrak{A}^{-1} , und wenn die Elemente von \mathfrak{A} die Bedingung (19) erfüllen, stellt \mathfrak{A} eine Transformation dar, bei der die Wirkleistung unverändert bleibt. E ist die Einheitsmatrix. Da die Multiplikation (19) vertauschbar ist, ergeben sich sowohl durch Zeilen-Spalten- wie durch Spalten-Multiplikation Beziehungen zwischen den Elementen. Die gleichen Ergebnisse erhält man durch Zeilen-Zeilen- und Spalten-Spalten-Multiplikation von \mathfrak{A} mit \mathfrak{A}'^* . Spalten-Spalten-Multiplikation liefert Gesetzmäßigkeiten, die unmittelbar mit der übertragenen Leistung in Verbindung gebracht werden können. Multiplikation gleicher Zeilen bzw. Spalten muss 1, verschiedene 0 ergeben.

Aus der Spaltenmultiplikation von \mathfrak{A} mit $\overline{\mathfrak{A}'^*}$ folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Spalte } 2\mu - 1 \mathfrak{A} \times \text{Spalte } 2\mu \overline{\mathfrak{A}'^*}: \\ \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{Q}_{\nu \mathfrak{Q}_\mu} \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{Q}_\mu}^* + \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{Q}_\mu} \mathfrak{Q}_{\nu \mathfrak{Q}_\mu}^* = 0 \end{array} \right\} \quad (\mu = 1, 2, \dots, m) \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Spalte } 2\mu \mathfrak{A} \times \text{Spalte } 2\mu - 1 \overline{\mathfrak{A}'^*}: \\ \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{Q}_{\nu \mathfrak{B}_\mu} \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{B}_\mu}^* + \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{B}_\mu} \mathfrak{Q}_{\nu \mathfrak{B}_\mu}^* = 0 \end{array} \right\} \quad (\mu = 1, 2, \dots, m) \quad (2)$$

liefert je m reelle Gleichungen für je m Unbekannte.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Spalte } 2\mu - 1 \mathfrak{A} \times \text{Spalte } 2\sigma \overline{\mathfrak{A}'^*}: \\ \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{Q}_{\nu \mathfrak{Q}_\mu} \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{Q}_\sigma}^* + \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{Q}_\mu} \mathfrak{Q}_{\nu \mathfrak{Q}_\sigma}^* = 0 \end{array} \right\} \quad (\mu, \sigma = 1, 2, \dots, m) \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Spalte } 2\mu \mathfrak{A} \times \text{Spalte } 2\sigma - 1 \overline{\mathfrak{A}'^*}: \\ \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{Q}_{\nu \mathfrak{B}_\mu} \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{B}_\sigma}^* + \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{B}_\mu} \mathfrak{Q}_{\nu \mathfrak{B}_\sigma}^* = 0 \end{array} \right\} \quad (\mu, \sigma = 1, 2, \dots, m) \quad (2)$$

liefert je $(m^2 - m)/2$ verschiedene komplexe Gleichungen für je $m^2 - m$ Unbekannte.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Spalte } 2\mu - 1 \mathfrak{A} \times \text{Spalte } 2\sigma - 1 \overline{\mathfrak{A}'^*}: \\ \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{Q}_{\nu \mathfrak{Q}_\mu} \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{Q}_\sigma}^* + \mathfrak{B}_{\nu \mathfrak{Q}_\mu} \mathfrak{Q}_{\nu \mathfrak{Q}_\sigma}^* = \begin{cases} 1 & (\mu = \sigma) \\ 0 & (\mu \neq \sigma) \end{cases} \end{array} \right\} \quad (\mu, \sigma = 1, 2, \dots, m) \quad (2)$$

liefert m^2 komplexe Gleichungen für $2m^2$ Unbekannte. Es ergeben sich insgesamt $2m^2 - m$ verschiedene Gleichungen für $4m^2$ Unbekannte. Da bei m Strömungen $4m^2$ Koeffizienten mit $8m^2$ Bestimmungsstücken (Betrag, Phase) vorliegen, sind durch die Wirkleistungsbilanz die Hälfte derselben dadurch festgelegt. Es zeigt sich, dass man keineswegs beliebige Bestimmungsstücke vorschreiben und die andere Hälfte daraus ermitteln kann. Multipliziert man (20) bis (24) der Reihe nach mit $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}^*, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*, \mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}^*, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*, \mathfrak{Q}, \mathfrak{B}^*$, so stellen die linken Seiten von (20) und (21) die doppelte Wirkleistung bei reiner \mathfrak{Q} - bzw. \mathfrak{B} -Modulation dar, während der Realteil von (22) bis (24) die wechselseitige Wirkleistung der Endmodulationen ergeben. Nur wenn die \mathfrak{Q} - und \mathfrak{B} -Anfangsmodulationen in der gleichen Strömung wirken, ist die Wirkleistung der Endmodulationen nicht Null. Durch Zeilen-Zeilen-Multiplikation von \mathfrak{A} mit \mathfrak{A}^* ergeben sich weitere Gleichungen, die aber keine neuen Beziehungen für die Elemente liefern, da sämtliche Möglichkeiten der Wirkung beliebiger Anfangsmodulationen durch die obigen Gleichungen bereits erfasst sind. Es handelt sich dabei um Umformungen, die aus den Gleichungen (20) bis (24) durch Vertauschung der gesteuerten mit den steuernden Modulationen hervorgehen. Es gilt für $\mu, \sigma = 1, 2, \dots, m$:

$$\sum_{r=1}^m \mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{Q}_r} \mathfrak{Q}_{\sigma\mathfrak{B}_r}^* + \mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{B}_r} \mathfrak{Q}_{\sigma\mathfrak{Q}_r}^* = 0, \quad (25)$$

$$\sum_{r=1}^m \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Q}_r} \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{B}_r}^* + \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{B}_r} \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{Q}_r}^* = 0, \quad (26)$$

$$\sum_{r=1}^m \mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{Q}_r} \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{B}_r}^* + \mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{B}_r} \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{Q}_r}^* = \begin{cases} 1 & (\mu = \sigma), \\ 0 & (\mu \neq \sigma). \end{cases} \quad (27)$$

Durch Bildung der Determinante von (19) ergibt sich, dass \mathfrak{A} komplex ist und den Betrag 1 hat. Dies bedeutet, dass bei periodischen Vorgängen keine Anfangsmodulationen eingestellt werden können, bei denen die Endmodulationen Null sind.

Bei den bisherigen Ausführungen findet eine Zu- oder Abstrahlung elektromagnetischer Wirkleistung in bezug auf die Gesamtströmung nicht statt. Um das Verhalten der Strömungen gegenüber äusseren anregenden elektromagnetischen Feldern und insbesondere die Vierpoleigenschaften zu gewinnen, werden zwei Klemmenpaare 1 und 2 eingeführt. An diesen Klemmenpaaren werden Hilfsströmungen $m-1$ (an 1) und $m-2$ (an 2) angebracht. Wenn die Anschlüsse punktförmig sind, so ist die Laufzeit dieser Hilfsströmungen Null. Ist dies nicht der Fall, so sollen die Ladungsträger der Hilfsströmungen die grösste Geschwindigkeit, und zwar Lichtgeschwindigkeit c_0 besitzen. Dabei ist die Laufzeit τ . In beiden Fällen sind dadurch viele Koeffizienten der Hilfsströmungen

Null. Sämtliche Koeffizienten, die \mathfrak{B}_{m+1} bzw. \mathfrak{B}_{m+2} als steuernde Modulation aufweisen, sind bis auf

$$\mathfrak{B}_{m+1\mathfrak{B}_{m+1}} = e^{-j\omega\tau_{m+1}}, \quad \mathfrak{B}_{m+2\mathfrak{B}_{m+2}} = e^{-j\omega\tau_{m+2}}$$

Null. Ausserdem sind die Koeffizienten, die \mathfrak{L}_{m+1} bzw. \mathfrak{L}_{m+2} als gesteuerte Modulationen enthalten, bis auf

$$\mathfrak{L}_{m+1\mathfrak{L}_{m+1}} = e^{-j\omega\tau_{m+1}}, \quad \mathfrak{L}_{m+2\mathfrak{L}_{m+2}} = e^{-j\omega\tau_{m+2}}$$

Null. Im folgenden wird mit dem punktförmigen Anschluss ($\tau = 0$) gearbeitet. Um die Verbindung mit dem äusseren System zu erhalten, wird

$$\mathfrak{B}_{m+1} = \mathfrak{U}_1, \quad \mathfrak{B}_{m+2} = \mathfrak{U}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}_{m+1} = -\mathfrak{Z}_1, \quad \mathfrak{L}_{m+2} = -\mathfrak{Z}_2$$

gesetzt. Durch die Wahl der Richtung der Einstromung wird erreicht, dass ein positiver Realteil von $\mathfrak{U}^* \mathfrak{Z}$ Wirkleistung von aussen zugeführt wird. \mathfrak{U} und \mathfrak{Z} werden mit den Koeffizienten der beiden Hilfsströmungen geändert. Multiplikation gleicher Zeilen bzw. Spalten muss 1, verschiedener 0 ergeben. Die Beziehungen für die Koeffizienten der m Strömungen bleiben dabei ungeändert.

	Spalte	$2\nu-1$	2ν		$2m+1$	$2m+2$	$2m+3$	$2m+4$	
	$\left\ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\ $	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	$\left\ \begin{array}{l} \text{Zeile} \\ 2\mu-1 \\ 2\mu \end{array} \right\ $
		$\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{B}_\nu}$	$\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{B}_\nu}$	\dots	$-\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{Z}_1}$	0	$-\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{Z}_2}$	0	
		$\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{B}_\nu}$	$\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{B}_\nu}$	\dots	$-\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Z}_1}$	0	$-\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Z}_2}$	0	
$\mathfrak{U} =$	$\left\ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\ $	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	$\left\ \begin{array}{l} 2m+1 \\ 2m+2 \\ 2m+3 \end{array} \right\ $
		0	0	\dots	1	0	0	0	
		$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}_\nu}$	$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}_\nu}$	\dots	$-\mathfrak{U}_{1\mathfrak{Z}_1}$	1	$-\mathfrak{U}_{1\mathfrak{Z}_2}$	0	
		0	0	\dots	0	0	1	0	
		$\mathfrak{U}_{2\mathfrak{B}_\nu}$	$\mathfrak{U}_{2\mathfrak{B}_\nu}$	\dots	$-\mathfrak{U}_{2\mathfrak{Z}_1}$	0	$-\mathfrak{U}_{2\mathfrak{Z}_2}$	1	$\left\ \begin{array}{l} 2m+4 \end{array} \right\ $
	$\left\ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\ $	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	$\left\ \begin{array}{l} * \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\ $
		$\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{B}_\nu}$	$\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{B}_\nu}$	\dots	0	$-\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Z}_1}$	0	$-\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Z}_2}$	
		$\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{B}_\nu}$	$\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{B}_\nu}$	\dots	0	$-\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{Z}_1}$	0	$-\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{Z}_2}$	
$\mathfrak{U}^* =$	$\left\ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\ $	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	$\left\ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right\ $
		$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}_\nu}$	$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}_\nu}$	\dots	1	$-\mathfrak{U}_{1\mathfrak{Z}_1}$	0	$-\mathfrak{U}_{1\mathfrak{Z}_2}$	
		0	0	\dots	0	1	0	0	
		$\mathfrak{U}_{2\mathfrak{B}_\nu}$	$\mathfrak{U}_{2\mathfrak{B}_\nu}$	\dots	0	$-\mathfrak{U}_{2\mathfrak{Z}_1}$	1	$-\mathfrak{U}_{2\mathfrak{Z}_2}$	
		0	0	\dots	0	0	0	1	

$2m + 2 \mathfrak{A} \times \text{Zeile } 2m + 3 \mathfrak{A}^*$:

$$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{S}_2} + \mathfrak{U}_{2\mathfrak{S}_1}^* = \mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_{21}^* = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{U}_{1\Omega_\nu} \mathfrak{U}_{2\mathfrak{B}_\nu}^* + \mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}_\nu} \mathfrak{U}_{2\Omega_\nu}^*. \quad (30)$$

Ausdruck für die wechselseitigen Impedanzen $\mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_{21}^*$ ist ein Mass für die der Anordnung umgesetzte wechselseitige Wirkleistung. Ist $\mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_{21}^*$ so bedeutet dies, dass die Wirkleistungen, die bei einer Anregung an 1 und 2 allein in der Anordnung auftreten, einfach superponiert werden können mit einer gleichzeitigen Anregung an 1 und 2. Wird Index 2 gleich Index 1 gesetzt, so erhält man aus (30) den doppelten Eingangswirkwiderstand an 1:

$$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{S}_1} + \mathfrak{U}_{1\mathfrak{S}_1}^* = \mathfrak{R}_{11} + \mathfrak{R}_{11}^* = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{U}_{1\Omega_\nu} \mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}_\nu}^* + \mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}_\nu} \mathfrak{U}_{1\Omega_\nu}^* \quad (31)$$

auch aus Zeile $2m + 2 \mathfrak{A} \times \text{Zeile } 2m + 1 \mathfrak{A}^*$.

Zeile $2\mu - 1 \mathfrak{A} \times \text{Zeile } 2m + 1 \mathfrak{A}^*$:

$$\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{S}_1} = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}_\nu}^* \mathfrak{L}_{\mu\Omega_\nu} + \mathfrak{U}_{1\Omega_\nu}^* \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{B}_\nu} \quad (32)$$

$2\mu \mathfrak{A} \times \text{Zeile } 2m + 1 \mathfrak{A}^*$:

$$\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{S}_1} = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}_\nu}^* \mathfrak{B}_{\mu\Omega_\nu} + \mathfrak{U}_{1\Omega_\nu}^* \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{B}_\nu}. \quad (33)$$

Die Koeffizienten der Endmodulationen gegenüber den Einstömungen am Klemmenpaar sind durch die Koeffizienten der m Strömungen und den $2m$ Leerlaufspannungen am Klemmenpaar vollständig bestimmt.

Zeile $2m + 3 \mathfrak{A} \times \text{Spalte } 2m + 2 \mathfrak{A}^*$:

$$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{S}_2} + \mathfrak{U}_{2\mathfrak{S}_1}^* = \mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_{21}^* = \sum_{\mu=1}^m \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{S}_2} \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{S}_1}^* + \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{S}_2} \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{S}_1}^*; \quad (34)$$

Zeile $2\nu - 1 \mathfrak{A} \times \text{Spalte } 2m + 2 \mathfrak{A}^*$:

$$\mathfrak{U}_{1\Omega_\nu} = \sum_{\mu=1}^m \mathfrak{L}_{\mu\Omega_\nu} \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{S}_1}^* + \mathfrak{B}_{\mu\Omega_\nu} \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{S}_1}^*; \quad (35)$$

Zeile $2\nu \mathfrak{A} \times \text{Spalte } 2m + 2 \mathfrak{A}^*$:

$$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}_\nu} = \sum_{\mu=1}^m \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{B}_\nu} \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{S}_1}^* + \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{B}_\nu} \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{S}_1}^*. \quad (36)$$

Die Formeln müssen so beschaffen sein, dass daraus erstens die unabhängige Anordnung der Schaltung bei entkoppelten Einzelströmungen hervorgeht. Zweitens muss

in den Formeln der Fall enthalten sein, dass die Strömungen, wenn sie sich in ihrem Gleichstromanteil unterscheiden, das Verhalten einer einzigen Strömung zeigen. Die erste Forderung wird in den quadratischen Formeln $\Re_{12} + \Re_{21}^*$ dadurch erfüllt, dass keine Glieder auftreten, deren beide Faktoren verschiedenen Strömungen angehören. Bei den Beziehungen (32) bis (36) bei entkoppelten Einzelströmungen alle Koeffizienten für $v \neq \mu$ Null, so dass ein Ausdruck verbleibt, der nur die Koeffizienten einer Strömung enthält. Im zweiten Fall ist die Wirkung einer \mathfrak{L} -Modulation in jeder Teilströmung gleich, und die Wirkung einer \mathfrak{B} -Modulation der einzelnen Teilströmungen unterscheidet sich entsprechend dem Gleichstromanteil, abgesehen von den $\mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{L}_v}$ und $\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_v}$. Hierbei gilt zum Beispiel:

$$\left. \begin{aligned} \text{für } v \neq \mu: \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_v} &= [\mathfrak{L}_{\mathfrak{L}} - e^{-j\omega\tau}] \frac{i_\mu}{i}; \\ \text{für } v = \mu: \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_\mu} &= [\mathfrak{L}_{\mathfrak{L}} - e^{-j\omega\tau}] \frac{i_\mu}{i} + e^{-j\omega\tau}. \end{aligned} \right\}$$

Gleichung (30) geht unter Beachtung, dass $\sum_{v=1}^m i_v/i = 1$, über in:

$$\Re_{12} + \Re_{21}^* = \sum_{v=1}^m \mathfrak{U}_{1\mathfrak{L}} \mathfrak{U}_{2\mathfrak{L}}^* \frac{i_v}{i} + \mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}} \frac{i_v}{i} \mathfrak{U}_{2\mathfrak{B}}^* = \mathfrak{U}_{1\mathfrak{L}} \mathfrak{U}_{2\mathfrak{L}}^* + \mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}} \mathfrak{U}_{2\mathfrak{B}}^*.$$

Aus Gleichung (32) wird mit (37):

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_1} &= \sum_{v=1, v \neq \mu}^m \mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}}^* \frac{i_v}{i} [\mathfrak{L}_{\mathfrak{L}} - e^{-j\omega\tau}] \frac{i_\mu}{i} + \mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}}^* \frac{i_\mu}{i} \left[[\mathfrak{L}_{\mathfrak{L}} - e^{-j\omega\tau}] \frac{i_\mu}{i} + e^{-j\omega\tau} \right] \\ &= \sum_{v=1}^m \mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}}^* \mathfrak{L}_{\mathfrak{L}} \frac{i_\mu i_v}{i^2} \\ &\quad - [\mathfrak{U}_{1\mathfrak{L}}^* \mathfrak{L}_{\mathfrak{L}} - \mathfrak{U}_{1\mathfrak{B}}^* \mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}] \frac{i_\mu}{i}. \end{aligned}$$

In analoger Weise ergeben auch die Gleichungen (33) bis (36) das Verhalten wie bei einer einzigen Strömung.

\mathfrak{L} - und \mathfrak{B} -Modulation sind in bezug auf die Ergebnisse der Wirkleistungsbilanz gleichwertig. Eine Vertauschung von \mathfrak{L} und \mathfrak{B} in (20) bis (27), (32) bis (36) bei den Anfangsmodulationen allein, den Endmodulationen allein und bei Anfangs- und Endmodulationen gleichzeitig führt insgesamt wieder zu denselben Beziehungen. Der Übergang von leer laufenden Klemmenpaaren zu kurzgeschlossenen Klemmenpaaren kann bei Einhaltung der Richtungen \mathfrak{L} und \mathfrak{B} durch Vertauschung von \mathfrak{L} mit \mathfrak{B} in den Formeln vorgenommen werden. Die wechselseitigen Impedanzen werden durch komplexe Steilheiten

widerstände durch Wirkleitwerte ersetzt. Aus (30) bis (33) wird:

$$\mathfrak{I}_{11_2} + \mathfrak{I}_{21_1}^* = \mathfrak{G}_{12} + \mathfrak{G}_{21}^* = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{I}_{1\mathfrak{Q}_\nu} \mathfrak{I}_{2\mathfrak{B}_\nu}^* + \mathfrak{I}_{1\mathfrak{B}_\nu} \mathfrak{I}_{2\mathfrak{Q}_\nu}^*, \quad (40)$$

$$\mathfrak{I}_{11_1} + \mathfrak{I}_{11_1}^* = \mathfrak{G}_{11} + \mathfrak{G}_{11}^* = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{I}_{1\mathfrak{Q}_\nu} \mathfrak{I}_{1\mathfrak{B}_\nu}^* + \mathfrak{I}_{1\mathfrak{B}_\nu} \mathfrak{I}_{1\mathfrak{Q}_\nu}^*, \quad (41)$$

$$\mathfrak{Q}_{\mu 11_1} = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{I}_{1\mathfrak{B}_\nu}^* \mathfrak{Q}_{\mu \mathfrak{Q}_\nu} + \mathfrak{I}_{1\mathfrak{Q}_\nu}^* \mathfrak{Q}_{\mu \mathfrak{B}_\nu}, \quad (42)$$

$$\mathfrak{B}_{\mu 11_1} = \sum_{\nu=1}^m \mathfrak{I}_{1\mathfrak{B}_\nu}^* \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{Q}_\nu} + \mathfrak{I}_{1\mathfrak{Q}_\nu}^* \mathfrak{B}_{\mu \mathfrak{B}_\nu}. \quad (43)$$

weitere Klemmenpaare vorhanden, so treten ϱ und z in \mathfrak{I} , \mathfrak{U} , \mathfrak{S} an Stelle 1 und 2. Liegt Rückwirkungsfreiheit vom z -ten zum ϱ -ten Klemmenpaar so ist $\mathfrak{R}_{\varrho z}$ bzw. $\mathfrak{S}_{\varrho z}$ Null.

Bei nicht rein periodischen zeitlichen Vorgängen können die aus der Leistungsbalanz gewonnenen Beziehungen aus der \mathfrak{U} -Matrix nicht unmittelbar benutzt werden. Wenn die Anfangsmodulationen nach einer rein reellen, zeitlich eigigenden Exponentialfunktion verlaufen, so ist die am Anfang der Strömungengeführte Leistung stets grösser als die Leistung am Ende der Strömungen. Zudem können die für rein periodische Vorgänge erhaltenen Beziehungen nicht rein periodische Zeitfunktionen verwertet werden. Bei einer rein periodischen Zeitfunktion $\exp j \omega t$ sind die Koeffizienten Funktion von $j \omega$. Bei nicht rein periodischen Zeitfunktionen mit komplexer Frequenz wird in den Formeln die reelle Frequenz durch die komplexe Frequenz ersetzt.

Ladung und Masse der Elektronen treten direkt in den Koeffizientenbeziehungen nicht auf. Die Beziehungen gelten deshalb nicht nur für Elektronen, sondern für beliebige Ladungsträger.

Es ist keineswegs erforderlich, dass die einzelnen Strömungen an den Bezugsstellen des Hohlraums beginnen und enden. Anfangs- und Endpunkt können auch innerhalb des Hohlraums liegen. Zur Aufrechterhaltung der Kontinuität des Wechselkonvektionsstromes ist dann an diesen Punkten eine Wechselstromladung entsprechend $-j \omega \mathfrak{Q}$ - \mathfrak{Q} (- Endpunkt, - Anfangspunkt) wirksam, auf die Gültigkeit der Wirkleistungsbilanz keinen Einfluss hat.

Der Weg einer Strömung (Index ν) werde in zwei Teile geteilt. Die Laufzeit längs des ersten Wegstücks sei τ_{ν_1} . Zwischen den Koeffizienten, die durch die Modulation auf dem gesamten Weg und den beiden Teilstücken vorgenommen werden, besteht dann folgende Beziehung:

$$\mathfrak{Q}_{\mathfrak{Q}_\nu} = \mathfrak{Q}_{\mathfrak{Q}_{\nu_1}} + \mathfrak{Q}_{\mathfrak{Q}_{\nu_2}} e^{-j \omega \tau_{\nu_1}}. \quad (44a)$$

Es ist eine gesteuerte Modulation, die der ν -ten Strömung selbst nicht angehört.

\mathfrak{V}_{v_2} gibt zum Beispiel die Wirkung an, wenn eine \mathfrak{V} -Modulation nur längs dem zweiten Teilstückes besteht.

Die Ladungsträger sollen den ν -ten Weg einmal in der einen Richtung \mathfrak{V} -Modulation und in umgekehrter Richtung \mathfrak{V} -Modulation durchlaufen. Sei τ_v die maximale Laufzeit und $\tau_v(s)$ die ortsabhängige Laufzeit, gerechnet vom Anfang der \mathfrak{V} -Modulation, so ist die erzwungene Verteilung des Wechselstromkonvektionsstromes durch die \mathfrak{V} - bzw. \mathfrak{V} -Modulation, $\mathfrak{V} \exp -j\omega \tau_v(s)$ bzw. $\mathfrak{V} \exp -j\omega [\tau_v - \tau_v(s)]$. Angenommen, die Strömungen in dem verlustfreien elektromagnetischen Hohlraum haben alle verschwindende Raumladungsdichten, sind die magnetischen Feldstärken und Ströme in den Begrenzungen des Hohlraumes, herrührend von der Stromstärke eines infinitesimalen Stromelementes mit der Stromstärke desselben in Phase. Sei $h(s)$ der Proportionalitätsfaktor zwischen Stromstärke eines Stromelements und der interessierenden Stromstärke an einer beliebigen Stelle des Hohlraums, so bestimmen sich die Koeffizienten $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{V}}^*$ und $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{V}}$ zu:

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{V}}^* = \int_0^{sm} h(s) e^{-j\omega \tau_v(s)} ds; \quad \mathfrak{Z}_{\mathfrak{V}} = - \int_0^{sm} h(s) e^{-j\omega [\tau_v - \tau_v(s)]} ds.$$

Hieraus folgt für die Beziehung zwischen den Koeffizienten:

$$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{V}} = -\mathfrak{Z}_{\mathfrak{V}}^* e^{-j\omega \tau_v}.$$

Bei den elektrischen Feldern und Spannungen an beliebigen Stellen des Hohlraums gilt:

$$\mathfrak{U}_{\mathfrak{V}} = \mathfrak{U}_{\mathfrak{V}}^* e^{-j\omega \tau_v}.$$

Bei der Ableitung tritt an die Stelle der erzwungenen Verteilung des Wechselstromkonvektionsstromes die der Wechselladung. Derartige Umformungen werden im Abschnitt II bei anfangsgesteuerten Strömungen benötigt.

Für den einfachsten Fall einer Strömung mit einer Trägergeschwindigkeit soll ermittelt werden, welche Bestimmungsstücke der Koeffizienten frei gewählt werden können. Es wird laufend durchnummeriert. Ungerader Index bedeutet \mathfrak{V} -Modulation, gerader Index \mathfrak{B} -Modulation. Es wird gewählt:

$$\mathfrak{Q}_{1\mathfrak{Q}_1} = a_{11} = a_{11} e^{j\varphi_{11}}; \quad \mathfrak{Q}_{1\mathfrak{B}_1} = a_{12} = a_{12} e^{j\varphi_{12}}; \\ \mathfrak{B}_{1\mathfrak{Q}_1} = a_{21} = a_{21} e^{j\varphi_{21}}; \quad \mathfrak{B}_{1\mathfrak{B}_1} = a_{22} = a_{22} e^{j\varphi_{22}}.$$

Zeilenmultiplikation von \mathfrak{A} mit \mathfrak{A}^* ergibt:

$$\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{A}^* = \begin{vmatrix} a_{22}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{11}^* \end{vmatrix}, \\ a_{11} a_{22}^* - a_{12} a_{21}^* = 1; \quad a_{11} a_{12}^* - a_{12} a_{11}^* = 0; \quad a_{21} a_{22}^* - a_{22} a_{21}^* = 0.$$

Durch Umformung aus (45) gewinnt man:

$$\frac{a_{11}}{a_{11}^*} = \frac{a_{22}}{a_{22}^*} = -\frac{a_{12}}{a_{12}^*} = -\frac{a_{21}}{a_{21}^*} \quad (46)$$

Daraus die Phasenbeziehungen:

$$\varphi_{11} = \varphi_{22} = \varphi_{12} + \frac{\pi}{2} = \varphi_{21} + \frac{\pi}{2}. \quad (47)$$

Die Phasen sind um π unbestimmt. Das Vorzeichen wird deshalb zu den ersten genommen, die nicht als die stets positiven Beträge anzusehen sind. Aus der ersten Gleichung von (45) folgt:

$$a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21} = 1. \quad (48)$$

Man kann einen Phasenwert und drei a -Werte freigewählt werden. Drei Phasenwerte und ein a -Wert sind dann festgelegt. Die Beziehung $a_{11}/a_{11}^* = -a_{21}/a_{21}^*$ folgt nicht unmittelbar aus (45), kann aber direkt durch Multiplikation der ersten Zeile von \mathfrak{A} mit Spalte 2 von \mathfrak{A}^* erhalten werden.

Die geringste Anzahl der Koeffizienten bei m Strömungen beträgt $2m$, und es muss mindestens ein Koeffizient in jeder Zeile und Spalte von \mathfrak{A} stehen, damit die Determinante nicht Null werden kann. Die Verteilung der Koeffizienten ist dabei nicht willkürlich, sondern muss so erfolgen, dass bei der Bildung der α -Matrix das gleiche Bild für diesen Spezialfall der kleinsten Koeffizientenzahl entsteht, damit bei der Produktbildung von $\mathfrak{A} \mathfrak{A}^*$ eine Einheitsmatrix zustande kommt. Sei bei $m = 2$ nur a_{13} , a_{24} , a_{32} und a_{41} nicht Null, so lassen sich die Koeffizientenbedingungen zu:

$$a_{13} a_{24}^* = 1; \quad a_{32} a_{41}^* = 1. \quad (49)$$

Man kann hierbei die Koeffizienten nicht willkürlich gewählt werden.

Differentialbeziehungen

Wenn ein Geschwindigkeitsspektrum vorliegt, geht die Gleichstromstärke der v -ten Strömung gegen Null. Damit kann die Gleichung (8) angewendet werden, deren Glied mit Δi erweitert wird zu:

$$\mathfrak{Q}_{v\mathfrak{x}} = \Delta i_v \frac{d\mathfrak{B}_{v\mathfrak{x}}}{dU_v}. \quad (50)$$

Man kann die Wechselvoltgeschwindigkeit und den Wechselkonvektionsstrom an einer beliebigen Stelle der v -ten Strömung, herrührend von einer Modulation, annehmen. Es besteht damit dieser Zusammenhang. Bei \mathfrak{x} kann es sich um die Anfangsmodulationen der anderen Strömungen oder um die Einströmung bzw. erwundene Spannung an den Klemmenpaaren handeln, das heißt um solche primären Modulationen, die eine Beeinflussung der v -ten Strömung nur indirekt

auf dem Umweg über das elektrische Wechselfeld bewirken. U_r (Abkürzung für U_{er}) sei die statische Anfangsvoltgeschwindigkeit der Strömung r . Eine ähnliche Beziehung kann mittels (4) erhalten werden. Zu diesem Zweck wird die durch Feldmodulation der Gesamtströmung mit Geschwindigkeitsspektrum entstehende Konvektionswechselstromdichte $l(s, x, y)$ und der durch \mathfrak{L} - \mathfrak{B} -Modulation in der r -ten Strömung erzwungene Konvektionswechselstrom $\mathfrak{L}_r(s)$ in die Gleichungen für die elektromagnetischen Felder eingeführt:

$$\text{rot } \mathfrak{E} = -j \omega \mu_0 \mathfrak{H}, \quad \text{rot } \mathfrak{H} = j \omega \varepsilon_0 \mathfrak{E} + l(s, x, y) + \mathfrak{L}_r(s).$$

Dabei ist:

$$l(s, x, y) = \frac{dF_0}{dF} \int_{U_{e_{\min}}}^{U_{e_{\max}}} \frac{d\dot{i}}{dU_e} dU_e \int_0^s \mathfrak{E}(\xi, x, y) d\xi \frac{de^{-j\omega[\tau(s, x, y) - \tau(\xi, x, y)]}}{dU_e},$$

$$\mathfrak{L}_r(s) = \dot{A}i_r \mathfrak{B}_r(o) \frac{de^{-j\omega\tau_p(s)}}{dU_r} + \mathfrak{L}_r(o) e^{-j\omega\tau_p(s)}.$$

$d\dot{i}/dU_e$ ist die statische Stromdichte im Voltgeschwindigkeitsintervall U_e und dU_e eine Funktion der Koordinaten x, y auf der emittierenden Oberfläche. Der Faktor dF_0/dF trägt einem nichtparallelen magnetischen Führungsfeld Rechnung. Aus der Gleichung (53) ist ersichtlich, dass die erzwungene Verteilung des Konvektionswechselstromes, herrührend von einer \mathfrak{B} -Modulation der r -ten Strömung aus der erzwungenen Verteilung des Konvektionswechselstromes durch \mathfrak{L} -Modulation in der r -ten Strömung mittels Differentiation nach U_r und Multiplikation mit $\dot{A}i_r$ entsteht. Zwischen den gesteuerten Modulationen $\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}_r}$ und $\mathfrak{L}_{\mathfrak{L}_r}$, ausgelöst durch \mathfrak{B}_r - und \mathfrak{L}_r -Modulation, existiert die Beziehung

$$\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}_r} = \dot{A}i_r \frac{d\mathfrak{L}_{\mathfrak{L}_r}}{dU_r}.$$

Bei \mathfrak{L} handelt es sich um Modulationen, die durch reine Feldmodulationszustände kommen, Wechselvoltgeschwindigkeiten, Wechselkonvektionsströme der anderen Strömungen, Leerlaufspannungen und Kurzschlußströme an Klemmen sowie das elektrische und magnetische Wechselfeld. Die Bildung (54) ist nur dann streng zulässig, wenn U_r in den durch die Konvektionsströme erweiterten elektromagnetischen Gleichungen, abgesehen von den erzwungenen Verteilungen, nicht vorkommt. U_r ist jedoch in $l(s, x, y)$ enthalten, aber mit einer Strömung mit infinitesimalem Gleichstromanteil verknüpft, so dass eine Rückwirkung zu vernachlässigen ist.

Die Koeffizienten, die sich auf die gleiche Strömung beziehen, setzen sich, abgesehen von dem durch reine Feldmodulation entstehenden Koeffizienten $\mathfrak{B}_{r\mathfrak{L}_r}$, aus zwei Teilen zusammen, die sich um eine Grössenordnung unterscheiden:

$$\mathfrak{L}_{\mathfrak{L}_r}, \quad \mathfrak{L}_{r\mathfrak{L}_r}, \quad \mathfrak{L}_{r\mathfrak{L}_r}, \quad \mathfrak{L}_{\mathfrak{L}_r}, \quad \mathfrak{L}_{r\mathfrak{L}_r}, \quad \mathfrak{L}_{r\mathfrak{L}_r}, \quad \mathfrak{B}_{r\mathfrak{L}_r}, \quad \mathfrak{B}_{r\mathfrak{L}_r}, \quad \mathfrak{B}_{\mathfrak{L}_r}, \quad \mathfrak{B}_{\mathfrak{L}_r}.$$

ersten Glieder entstehen durch direkte Modulation. Aus (7) und (6) folgt

$$\check{\mathfrak{L}}_{\nu\mathfrak{B}_\nu} = \Delta i_\nu \frac{de^{-j\omega\tau_\nu}}{dU_\nu}; \quad \check{\mathfrak{L}}_{\nu\mathfrak{Q}_\nu} = \check{\mathfrak{B}}_{\nu\mathfrak{B}_\nu} = e^{-j\omega\tau_\nu}. \quad (56)$$

zweiten Glieder entstehen auf dem Umweg über das elektrische Wechsel- und können aber nicht aus dem Grenzübergang $\mu \rightarrow \nu$ der Koeffizienten $\check{\mathfrak{L}}_{\nu\mathfrak{Q}_\mu}$, $\check{\mathfrak{B}}_{\nu\mathfrak{B}_\mu}$ gewonnen werden. Die letzteren lassen sich mittels der Differentialbeziehungen durch $\mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{Q}_\mu}$ in folgender Weise darstellen:

$$\mathfrak{Q}_{\nu\mathfrak{B}_\mu} = \Delta i_\nu \frac{d\mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{B}_\mu}}{dU_\nu} = \Delta i_\nu \Delta i_\mu \frac{d^2\mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{Q}_\mu}}{dU_\nu dU_\mu}; \quad (57)$$

$$\mathfrak{Q}_{\nu\mathfrak{Q}_\mu} = \Delta i_\nu \frac{d\mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{Q}_\mu}}{dU_\nu}; \quad (58)$$

$$\mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{B}_\mu} = \Delta i_\mu \frac{d\mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{Q}_\mu}}{dU_\mu}. \quad (59)$$

gegenüber muss für $\mu \rightarrow \nu$ auf die Bestimmungsgleichungen (2) und (6) zurückgegangen werden.

$$\Delta i_\nu \int_0^s \mathfrak{E}_{\mathfrak{B}_\nu}(\xi) d\xi \frac{de^{-j\omega[\tau_\nu(s) - \tau_\nu(\xi)]}}{dU_\nu} = \Delta i_\nu^2 \int_0^s \frac{d\mathfrak{E}_{\mathfrak{Q}_\nu}(\xi)}{dU_\nu} d\xi \frac{de^{-j\omega[\tau_\nu(s) - \tau_\nu(\xi)]}}{dU_\nu} \quad (60)$$

$$\check{\mathfrak{L}}_{\nu\mathfrak{Q}_\nu} = \Delta i_\nu \int_0^s \mathfrak{E}_{\mathfrak{Q}_\nu}(\xi) d\xi \frac{de^{-j\omega[\tau_\nu(s) - \tau_\nu(\xi)]}}{dU_\nu} \quad (61)$$

$$\hat{\mathfrak{B}}_{\nu\mathfrak{B}_\nu} = \int_0^s \mathfrak{E}_{\mathfrak{B}_\nu}(\xi) d\xi e^{-j\omega[\tau_\nu(s) - \tau_\nu(\xi)]} = \Delta i_\nu \int_0^s \frac{d\mathfrak{E}_{\mathfrak{Q}_\nu}(\xi)}{dU_\nu} d\xi e^{-j\omega[\tau_\nu(s) - \tau_\nu(\xi)]}. \quad (62)$$

Durch Addition von (61) und (62) folgt:

$$\hat{\mathfrak{Q}}_{\nu\mathfrak{Q}_\nu} + \hat{\mathfrak{B}}_{\nu\mathfrak{B}_\nu} = \Delta i_\nu \frac{d}{dU_\nu} \int_0^s \mathfrak{E}_{\mathfrak{Q}_\nu}(\xi) d\xi e^{-j\omega[\tau_\nu(s) - \tau_\nu(\xi)]} \quad (63)$$

$$= \Delta i_\nu \frac{d\mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{Q}_\nu}}{dU_\nu}. \quad (64)$$

Durch Vergleich von (64) mit (58) und (59) für $\mu \rightarrow \nu$ ist der Unterschied bei dem Index zu erkennen. Sind noch Einzelströmungen mit diskreter Geschwindigkeit und endlicher Gleichstromstärke vorhanden, so ändern sich zwar die Koeffizienten, die Differentialbeziehungen bleiben erhalten, können aber nur auf die Einzelströmungen selbst angewendet werden, wenn die Gleichstromstärke gegen Null geht.

Integralbeziehungen

Unter Benutzung der Differentialbeziehungen werden nunmehr die d. Matrizenmultiplikation gewonnenen Summenausdrücke umgeformt. Summe (22) werde die Umformung vorgenommen, die sich bei den and Summen (20) und (21), (23) bis (27) in ähnlicher Weise wiederholt. Aus Summe (22) werden vier Glieder für $r = \mu$ und $r = \sigma$ herausgenommen, zwei Glieder ihren Wert sprunghaft ändern. Es folgt:

$$0 = \sum_{v=1}^m \mathfrak{L}_{v\mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{B}_{v\mathfrak{L}_\sigma}^* + \mathfrak{B}_{v\mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{L}_{v\mathfrak{L}_\sigma}^* \quad (v \neq \mu, \sigma) \quad \left| \right. \\ \left. + \mathfrak{L}_{\sigma\mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{L}_\sigma}^* + \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{L}_{\sigma\mathfrak{L}_\sigma}^* + \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{L}_\sigma}^* + \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_\sigma}^* \right|$$

Unter Beachtung von (55), (56) und (58) sind die beiden mittleren Einzelgli von erster Ordnung in der Gleichstromstärke klein gegenüber den beiden a ren Einzelgliedern und werden vernachlässigt. Bei Verwendung von (58) in Summe ergibt sich (67). Wenn die Unterteilung des Spektrums in disk Einzelströmungen genügend fein ist, kann mit $r = \mu$ und $r = \sigma$ summiert wer Der wahre Koeffizient $\mathfrak{L}_{\mu\mathfrak{L}_\mu}$ hat zwar seinen Wert gegenüber $\mathfrak{L}_{r\mathfrak{L}_\mu}$ sprung geändert. Der Wert von $\mathfrak{L}_{r\mathfrak{L}_\mu}$ bleibt jedoch beim Übergang zu $r = \mu$ von glei Ordnung, und wegen der in der Grenze infinitesimalen Gleichstromstärke μ -ten und σ -ten Strömung ist der Einfluss der Erweiterung zu vernachlässi Es wird davon erst beim Übergang zur Integraldarstellung Gebrauch gema Die Ergebnisse der Umformungen von (22) bis (27) werden der Reihe n zusammengestellt. Es werden sämtliche Beziehungen (55) bis (64) benö

$$\text{Aus (22) bis (24)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mu \neq \sigma, & \mu = \sigma, \\ A_{\mu,\sigma} = 0, & A_{\mu,\mu} = 0, \\ \Delta i_\mu \Delta i_\sigma \frac{d^2 A_{\mu,\sigma}}{dU_\mu dU_\sigma} = 0, & C = 0, \\ \Delta i_\sigma \frac{dA_{\mu,\sigma}}{dU_\sigma} = 0, & \Delta i_\mu \frac{dA_{\mu,\mu}}{dU_\mu} = 0; \end{array} \right. \\ \text{Aus (25) bis (27)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mu \neq \sigma, & \mu = \sigma, \\ 0 = \Delta i_\mu \Delta i_\sigma \frac{d^2 B_{\mu,\sigma}}{dU_\mu dU_\sigma}, & 0 = D, \\ 0 = B_{\mu,\sigma}, & 0 = B_{\mu,\mu}, \\ 0 = \Delta i_\sigma \frac{dB_{\mu,\sigma}}{dU_\sigma}, & 0 = \Delta i_\mu \frac{dB_{\mu,\mu}}{dU_\mu}. \end{array} \right.$$

Alle Gleichungen werden erfüllt, wenn vier Ausdrücke Null sind:

$$A_{\mu, \sigma} = \sum_{\nu=1}^m \Delta i_{\nu} \frac{d}{dU_{\nu}} \left[\mathfrak{B}_{\nu \varrho_{\mu}} \mathfrak{B}_{\nu \varrho_{\sigma}}^* \right] + \mathfrak{B}_{\mu \varrho_{\sigma}}^* e^{-j \omega \tau_{\mu}} + \mathfrak{B}_{\sigma \varrho_{\mu}}^* e^{j \omega \tau_{\sigma}} \quad (\nu \neq \mu, \sigma), \quad (67)$$

$$B_{\mu} = \sum_{\nu=1}^m \Delta i_{\nu} \frac{d}{dU_{\nu}} \left[\mathfrak{B}_{\nu \varrho_{\mu}} \mathfrak{B}_{\nu \varrho_{\mu}}^* \right] + \mathfrak{B}_{\mu \varrho_{\mu}} e^{j \omega \tau_{\mu}} + \mathfrak{B}_{\mu \varrho_{\mu}}^* e^{-j \omega \tau_{\mu}}, \quad (68)$$

$$C = \sum_{\nu=1}^m \Delta i_{\nu} \frac{d}{dU_{\nu}} \left[\mathfrak{B}_{\nu \varrho_{\mu}} \mathfrak{B}_{\nu \varrho_{\mu}}^* \right] + 2 \operatorname{Re} \Delta i_{\mu}^2 \int_0^{\infty} \frac{d}{dU_{\mu}} \left[\mathfrak{E}_{\mu}(s) \right] ds \frac{d}{dU_{\mu}} e^{j \omega \tau_{\mu}}, \quad (69)$$

$$0 = D = \sum_{\nu=1}^m \Delta i_{\nu} \frac{d}{dU_{\nu}} \left[\varrho_{\mu \varrho_{\nu}} \varrho_{\mu \varrho_{\nu}}^* \right] + 2 \operatorname{Re} \Delta i_{\mu}^2 \int_0^{\infty} \frac{d}{dU_{\mu}} \left[\mathfrak{E}_{\mu}(s) e^{j \omega \tau_{\mu}(s)} \right] ds \frac{d e^{-j \omega [\tau_{\mu}(s_m) - \tau_{\mu}(s)]}}{dU_{\mu}} \quad (70)$$

und (68) sind von nullter Ordnung, (69) und (70) von zweiter Ordnung in Gleichstromstärke.

Es ist sinnvoll, Strömungsimpedanzen einzuführen. In der μ -ten Strömung werde eine ϱ Modulation vorgenommen. Dann ist am Ende dieser Strömung der Konvektionswechselstrom $\varrho_{\mu} \exp(-j \omega \tau_{\mu})$. Die wechselseitige Strömungsimpedanz $r_{\sigma, \mu}$ sei das negative Verhältnis der Wechselvoltgeschwindigkeit am Ende der σ -ten Strömung zum Wechselkonvektionsstrom am Ende der μ -ten Strömung.

$$r_{\sigma, \mu} = -\mathfrak{B}_{\sigma \varrho_{\mu}} e^{j \omega \tau_{\mu}}. \quad (71)$$

Die Strömungsimpedanz der μ -ten Strömung selbst beträgt:

$$r_{\mu, \mu} = -\mathfrak{B}_{\mu \varrho_{\mu}} e^{j \omega \tau_{\mu}}. \quad (72)$$

Durch das negative Vorzeichen wird erreicht, dass die Strömungsimpedanzen direkt in die Impedanzen übergehen, mit denen die Anordnung für äussererregungen wirkt. Seien μ und σ laufzeitlose Strömungen an Klemmenpaaren und ϱ , so wird:

$$r_{\mu, \sigma} = \mathfrak{R}_{\varrho, \mu}; \quad r_{\mu, \mu} = \mathfrak{R}_{\varrho, \varrho}. \quad (73)$$

$r_{\mu, \sigma}$ und $r_{\sigma, \mu}$ in (67) und (68) eingeführt, ergibt:

$$\left. \begin{aligned} r_{\mu, \sigma} + r_{\sigma, \mu}^* &= \sum_{\nu=1}^m \Delta i_{\nu} \frac{d}{dU_{\nu}} \left[\mathfrak{B}_{\nu \varrho_{\mu}}^* e^{-j \omega \tau_{\mu}} \mathfrak{B}_{\nu \varrho_{\sigma}} e^{j \omega \tau_{\sigma}} \right] \\ &\quad \left(\nu \neq \mu, \sigma \right) \\ &\quad \left. \sum_{\nu=1}^m \Delta i_{\nu} \frac{d}{dU_{\nu}} \left[\mathfrak{B}_{\nu \varrho_{\mu}} \mathfrak{B}_{\nu \varrho_{\mu}}^* \right] \right\} \quad (74) \end{aligned}$$

Für verschwindende Raumladung sind die Summen, da sie den gesamten Gleichstrom der Strömungen enthalten, Null zu setzen. Für zwei bzw. eine Strömung gilt dann:

$$\mathbf{r}_{\mu, \sigma} + \mathbf{r}_{\sigma, \mu}^* = 0 \quad (69)$$

beziehungsweise

$$\mathbf{r}_{\mu, \mu} + \mathbf{r}_{\mu, \mu}^* = 0. \quad (70)$$

Angewendet auf zwei bzw. ein Klemmenpaar:

$$\mathfrak{R}_{\mu, \sigma} + \mathfrak{R}_{\sigma, \mu}^* = 0, \quad (71)$$

$$\mathfrak{R}_{\mu, \mu} + \mathfrak{R}_{\mu, \mu}^* = 0. \quad (72)$$

Das sind die bekannten allgemeinen Impedanzbedingungen für eine Anordnung ohne innere Verluste. (69), (70) zusammen mit der entsprechend (79) umgeformten Beziehung (76)

$$\mathbf{r}_{\mu, \mu} + \mathbf{r}_{\mu, \mu}^* = 2 \operatorname{Re} \mathfrak{B}_{\mu \Omega_{\mu}} e^{j \omega \tau_{\mu}} = 2 \operatorname{Re} \int_0^{s_{m \mu}} \mathfrak{E}_{\Omega_{\mu}}(\mathfrak{s}) d\mathfrak{s} e^{j \omega \tau_{\mu}(\mathfrak{s})} = 0, \quad (73)$$

stellen nichts anderes als die notwendigen Bedingungen für die Verteilung des elektrischen Wechselfeldes, ausgelöst durch eine \mathfrak{Q}_{μ} -Modulation, längs der μ -Strömung bei verschwindender Raumladung unter Benutzung der Differentialbeziehungen dar, damit die Wirkleistungsbilanz erfüllt ist.

Für einen einzigen Stromfaden mit einem Geschwindigkeitsspektrum, dessen obere und untere Grenzen der statischen Anfangsvoltgeschwindigkeiten U_o und U_u sind, ergibt sich aus (74) durch Anwendung einer partiellen Integration

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{\mu, \sigma} + \mathbf{r}_{\sigma, \mu}^* = & \left[\frac{di_v}{dU_v} \right]_o \mathfrak{B}_{o \Omega_{\sigma}} e^{j \omega \tau_{\sigma}} \left[\mathfrak{B}_{o \Omega_{\mu}} e^{j \omega \tau_{\mu}} \right]^* \\ & - \left[\frac{di_v}{dU_v} \right]_u \mathfrak{B}_{u \Omega_{\sigma}} e^{j \omega \tau_{\sigma}} \left[\mathfrak{B}_{u \Omega_{\mu}} e^{j \omega \tau_{\mu}} \right]^* \\ & - \int_{U_u}^{U_o} \frac{d^2 i_v}{dU_v^2} dU_v \mathfrak{B}_{v \Omega_{\sigma}} e^{j \omega \tau_{\sigma}} \left[\mathfrak{B}_{v \Omega_{\mu}} e^{j \omega \tau_{\mu}} \right]^*, \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{\mu, \sigma} - \mathbf{r}_{\sigma, \mu}^* = & \left[\frac{di_v}{dU_v} \right]_o \mathfrak{B}_{\mu \Omega_o} \mathfrak{B}_{\sigma \Omega_o}^* - \left[\frac{di_v}{dU_v} \right]_u \mathfrak{B}_{\mu \Omega_u} \mathfrak{B}_{\sigma \Omega_u}^* \\ & - \int_{U_u}^{U_o} \frac{d^2 i_v}{dU_v^2} dU_v \mathfrak{B}_{\mu \Omega_v} \mathfrak{B}_{\sigma \Omega_v}^*. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Bei einem Stromfaden bedeutet der Index v nur eine Abhängigkeit von den Anfangsvoltgeschwindigkeiten. Bei mehreren Stromfäden bedeutet Index v auch eine Abhängigkeit vom Ort des Emissionspunktes, so dass dann eine weit

egration oder Summation in (80) und (81) erforderlich ist. Unter einem Stromfaden wird eine Anordnung verstanden, bei der die Felder in einem Querschnitt senkrecht zur Hauptbewegungsrichtung als konstant angesehen werden können. Ein Stromfaden kann deshalb zu einer ebenen Strömung ausfallen. Bei endlicher Gesamtgleichstromdichte im Stromfaden richtet sich der Gleichstrom des Stromfadens nach der zulässigen Querschnittsfläche. Die weiteren Untersuchungen sollen sich auf das konstante und exponentielle Spektrum erstrecken. Für das konstante Spektrum gilt

$$\frac{di_v}{dU_v} = \frac{di}{dU_e} = \text{const.}$$

Zeitgleich hat diese Verteilung auch die Eigenschaft, dass der Quotient aus der statischen Ladungsdichte dq längs des Stromfadens und dem zugehörigen Geschwindigkeitsintervall du ebenfalls konstant ist:

$$\frac{dq}{du} = \frac{e}{m} \cdot \frac{di}{dU_e}.$$

Ein Stromfaden mit beliebigem Spektrum werde einer reinen Feldmodulation ausgesetzt. Die v -te Strömung mit dem Gleichstromanteil Δi_v und den Spannungsgeschwindigkeiten zwischen U_v und $U_v + \Delta U_v$ erfährt an einem beliebigen Punkte der Strömung eine Wechselvoltgeschwindigkeit

$$\mathfrak{B}_v(s) \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_v(s) + \frac{d\mathfrak{B}_v(s)}{dU_v} \Delta U_v.$$

Der Gleichstrom Δi_v verteilt sich jetzt auf ein Spannungsintervall

$$\Delta U_v \left[1 + \frac{d\mathfrak{B}_v(s)}{dU_v} \right].$$

Andererseits kommt aber nach (50) ein Wechselkonvektionsstrom zum Gleichstromanteil hinzu, so dass für jeden Punkt s der Strömung der Quotient $di_v/dU_v|_s$ unverändert bleibt:

$$\left[\frac{di_v}{dU_v} \right]_s = \frac{\Delta i_v [1 + d\mathfrak{B}_v(s)/dU_v]}{\Delta U_v [1 + d\mathfrak{B}_v(s)/dU_v]} = \frac{di_v}{dU_v}. \quad (82)$$

Dies gilt für jedes beliebige Spektrum. Speziell beim konstanten Spektrum tritt damit durch die Feldmodulation keine Veränderung der spektralen Verteilung ein. Wird (50) integriert, so ist der gesamte Wechselkonvektionsstrom i_v am Ende des Stromfadens mit einem konstanten Spektrum nur durch die Wechselvoltgeschwindigkeiten $\mathfrak{B}^{(o)}$ und $\mathfrak{B}^{(u)}$ an der oberen und unteren Geschwindigkeitsgrenze bestimmt.

$$\mathfrak{Q}^{(1)} = \frac{di}{dU_e} \cdot [\mathfrak{B}^{(o)} - \mathfrak{B}^{(u)}]. \quad (83)$$

Es wird eine wirksame Voltgeschwindigkeit als mittlere Voltgeschwindigkeit der Endmodulationen eingeführt:

$$\mathfrak{B}^{(1)} = \frac{1}{2} [\mathfrak{B}^{(o)} + \mathfrak{B}^{(u)}].$$

Analog sei für die Anfangsmodulationen, die durch eine feldmodulierte Strecke entstanden sind, gesetzt:

$$\mathfrak{Q}_1 = \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}_o - \mathfrak{B}_u], \quad \mathfrak{B}_1 = \frac{1}{2} [\mathfrak{B}_o - \mathfrak{B}_u].$$

Durch Auflösen nach $\mathfrak{B}^{(o)}$, $\mathfrak{B}^{(u)}$, \mathfrak{B}_o und \mathfrak{B}_u ergibt sich:

$$\mathfrak{B}^{(o)} = \mathfrak{B}^{(1)} + \frac{dU_e}{2 di} \mathfrak{Q}^{(1)}; \quad \mathfrak{B}^{(u)} = \mathfrak{B}^{(1)} - \frac{dU_e}{2 di} \mathfrak{Q}^{(1)};$$

$$\mathfrak{B}_o = \mathfrak{B}_1 + \frac{dU_e}{2 di} \mathfrak{Q}_1; \quad \mathfrak{B}_u = \mathfrak{B}_1 - \frac{dU_e}{2 di} \mathfrak{Q}_1.$$

Mit den Wechselvoltgeschwindigkeiten an den Grenzen des Spektrums auch Wechselkonvektionsströme verbunden:

$$\mathfrak{Q}^{(o)} = \frac{1}{2} \mathfrak{Q}^{(1)} + \frac{di}{dU_e} \mathfrak{B}^{(1)}; \quad \mathfrak{Q}^{(u)} = \frac{1}{2} \mathfrak{Q}^{(1)} - \frac{di}{dU_e} \mathfrak{B}^{(1)};$$

$$\mathfrak{Q}_o = \frac{1}{2} \mathfrak{Q}_1 + \frac{di}{dU_e} \mathfrak{B}_1; \quad \mathfrak{Q}_u = \frac{1}{2} \mathfrak{Q}_1 - \frac{di}{dU_e} \mathfrak{B}_1.$$

Es soll nun untersucht werden, ob mit diesen Ersatzmodulationen Stromfaden mit konstantem Spektrum in seinem Verhalten auf eine Einströmung mit diskreter Geschwindigkeit zurückgeführt werden kann. Zu diesem Zweck wird die Wirkleistungsbilanz mit diesen Ersatzmodulationen gegeben. Entsprechend dem Ausdruck für die Wirkleistung $N = \operatorname{Re} \mathfrak{B} \mathfrak{Q}^*$ ist die infinitesimale Wirkleistung am Ende der Strömungen durch eine reine Feldmodulation (Index \mathfrak{E}) in der Hauptstrecke:

$$dN = \frac{1}{2} \cdot \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}} d\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^* + \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^* d\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{di}{dU_e} d[\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}} \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^*]$$

und für das gesamte Spektrum:

$$N' = \frac{1}{2} \cdot \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(o)} \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(o)*} + \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(u)} \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(u)*}].$$

Analog ist die zugeführte Wirkleistung am Anfang der Strömungen in der Hauptstrecke:

$$N_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}_o \mathfrak{B}_o^* - \mathfrak{B}_u \mathfrak{B}_u^*].$$

Die zusammengesetzten Wechselvoltgeschwindigkeiten an der oberen und unteren Grenze des Spektrums am Ende der Strömungen betragen unter Berücksichtigung

ung der Laufzeiten τ_o und τ_u :

$$\mathfrak{B}_Z^{(o)} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(o)} + \mathfrak{B}_o e^{-j\omega\tau_o}; \quad \mathfrak{B}_Z^{(u)} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(u)} + \mathfrak{B}_u e^{-j\omega\tau_u}. \quad (93)$$

ende der Gesamtströmung wird dann die Wirkleistung:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}_Z^{(o)} \mathfrak{B}_Z^{(o)*} - \mathfrak{B}_Z^{(u)} \mathfrak{B}_Z^{(u)*}] \\ & \frac{1}{2} \cdot \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(o)} \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(o)*} - \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(u)} \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(u)*}] + \frac{1}{2} \cdot \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}_o \mathfrak{B}_o^* - \mathfrak{B}_u \mathfrak{B}_u^*] \\ & + \frac{di}{dU_e} \operatorname{Re} [\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(o)} \mathfrak{B}_o^* e^{j\omega\tau_o} - \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(u)} \mathfrak{B}_u^* e^{j\omega\tau_u}] \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

eben. Wegen der zusätzlichen Ströme an den Geschwindigkeitsgrenzen die Anfangsmodulationen muss das elektrische Wechselfeld noch eine liche Wirkleistung N'' aufbringen:

$$\left. \begin{aligned} N'' &= \operatorname{Re} \int_0^{s_m} \mathfrak{E}(s) ds \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}_o^* e^{j\omega\tau_o(s)} - \mathfrak{B}_u^* e^{j\omega\tau_u(s)}] \\ &= \frac{di}{dU_e} \operatorname{Re} \left[\mathfrak{B}_o^* e^{j\omega\tau_o} \int_0^{s_m} \mathfrak{E}(s) ds e^{-j\omega[\tau_o - \tau_o(s)]} \right. \\ &\quad \left. - \mathfrak{B}_u^* e^{j\omega\tau_u} \int_0^{s_m} \mathfrak{E}(s) ds e^{-j\omega[\tau_u - \tau_u(s)]} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

beiden Integrale in (95) auf der rechten Seite stellen nichts anderes bzw. $\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(u)}$ dar. Damit ist N'' gleich dem letzten Glied von (94), und (91), (92), (94) und (95) ist $N^{(1)} = N' + N_1 + N''$. Die durch das Wechsel der Hauptstrecke zugeführte Wirkleistung $N' + N''$ ist gleich der Differenz von den Ladungsträgern abgegebenen und zugeführten Wirkleistung. Wiederholung des Beweises wurde vorgenommen, um die speziellen Aussagen beim konstanten Spektrum zu gewinnen. Nunmehr werden die Ersatzleistungen aus (87) und (86) in (92) und (94) eingeführt:

$$N_1 = \frac{1}{2} [\mathfrak{B}_1 \mathfrak{Q}_1^* - \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{B}_1^*]; \quad N^{(1)} = \frac{1}{2} [\mathfrak{B}_Z^{(1)} \mathfrak{Q}_Z^{(1)*} + \mathfrak{B}_Z^{(1)*} \mathfrak{Q}_Z^{(1)}]. \quad (96)$$

und die Wirkleistungen für eine Strömung. Aus (93) erhält man:

$$\mathfrak{Q}_Z^{(1)} = \mathfrak{Q}_{\mathfrak{E}}^{(1)} + \mathfrak{Q}_1 \frac{1}{2} [e^{-j\omega\tau_o} + e^{-j\omega\tau_u}] + \mathfrak{B}_1 \frac{di}{dU_e} [e^{-j\omega\tau_o} - e^{-j\omega\tau_u}], \quad (97)$$

$$\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(1)} + \mathfrak{B}_1 \frac{1}{2} [e^{-j\omega\tau_o} + e^{-j\omega\tau_u}] + \mathfrak{Q}_1 \frac{1}{4} \cdot \frac{dU_e}{di} [e^{-j\omega\tau_o} - e^{-j\omega\tau_u}]. \quad (98)$$

man bei konstantem Gesamtstrom die Breite des Spektrums klein werden

$$\tau_o = \tau - \frac{\Delta\tau}{2}; \quad \tau_u = \tau + \frac{\Delta\tau}{2}; \quad \omega \Delta\tau \ll 1,$$

so entsteht:

$$\Omega_Z^{(1)} = \Omega_{\mathfrak{E}}^{(1)} + \Omega_1 e^{-j\omega\tau} + \mathfrak{B}_1 i \frac{de^{-j\omega\tau}}{dU_e}; \quad \mathfrak{B}_Z^{(1)} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(1)} + \mathfrak{B}_1 e^{-j\omega\tau}. \quad (1)$$

Das sind entsprechend (4) und (6) die Zusammenhänge für eine Strömung, $\omega \Delta\tau > 1$, so kann (97) und (98) nicht durch Wahl einer Ersatzlaufzeit einer geeigneten Abhängigkeit der Laufzeit von der Anfangsvoltgeschwindigkeit unabhängig von den Anfangsmodulationen auf eine Strömung ohne Spektrum zurückgeführt werden. Das gleiche gilt für die wechselseitige Leistung zwischen Feld- und Anfangsmodulationen N'' , die ebenfalls die Laufzeiten enthält. Dagegen werden die durch das Wechselfeld entstehenden Modulationen $\Omega_{\mathfrak{E}}^{(1)}$ und $\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}^{(1)}$ lineare Funktionen von den Konvektionswechselströmen \mathfrak{Q}_o und \mathfrak{Q}_u sein. \mathfrak{Q}_o und \mathfrak{Q}_u entstehen durch Verschiebung und Änderung der Breite des Spektrums am Anfang der Strömungen und enthalten nach (89) \mathfrak{Q}_1 und \mathfrak{B}_1 . Insgesamt lassen sich also die Ersatzendmodulationen durch die Ersatzanfangsmodulationen nach (97) und (98) wie folgt darstellen:

$$\Omega_Z^{(1)} = \Omega_{\mathfrak{Q}_1} \mathfrak{Q}_1 + \Omega_{\mathfrak{B}_1} \mathfrak{B}_1; \quad \mathfrak{B}_Z^{(1)} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{Q}_1} \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{B}_{\mathfrak{B}_1} \mathfrak{B}_1. \quad (1)$$

In dieser Beziehung besteht kein Unterschied zwischen einer Strömung mit konstantem Spektrum und einer Strömung mit diskreter Geschwindigkeit. Diese linearen Zusammenhänge zwischen den Anfangs- und Endmodulationen bilden mit der Invarianz der am Anfang und Ende der Strömung auftretenden Wirkleistungen, deren Wert durch die Ersatzmodulationen wie bei einer Einzelströmung wiedergegeben wird (96), die Voraussetzungen dafür, dass die Ergebnisse der Matrizendarstellung (20) bis (27), (30) bis (36), (40) bis (43), (46) bis (48) verwendet werden können. Damit können diese Koeffizientenbeziehungen auf Strömungen mit konstanten Spektren bzw. eine Kombination von Strömungen diskreter Geschwindigkeiten erweitert werden. Der Unterschied zwischen dem Verhalten der beiden Strömungsarten besteht in der verschwindenden Ortsabhängigkeit, die in den Koeffizienten selbst nicht direkt erscheint.

Es werden die Umformungen angegeben, die für eine gesteuerte Modulation \mathfrak{Q} bezüglich ihrer Abhängigkeit von den an den Grenzen des Spektrums hauptsächlich auftretenden steuernden Wechselkonvektionsströmen \mathfrak{Q}_o und \mathfrak{Q}_u bei ihren Ersatzmodulationen bestehen.

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{\mathfrak{Q}_o} \mathfrak{Q}_o + \mathfrak{Q}_{\mathfrak{Q}_u} \mathfrak{Q}_u = \mathfrak{Q}_1 \frac{1}{2} [\mathfrak{Q}_{\mathfrak{Q}_o} + \mathfrak{Q}_{\mathfrak{Q}_u}] + \mathfrak{B}_1 \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{Q}_{\mathfrak{Q}_o} - \mathfrak{Q}_{\mathfrak{Q}_u}]. \quad (1)$$

\mathfrak{Q}_o und \mathfrak{Q}_u sind aus (89) durch \mathfrak{Q}_1 und \mathfrak{B}_1 ersetzt worden. Die auf die Ersatzmodulationen bezogenen Koeffizienten lauten:

$$\mathfrak{Q}_{\mathfrak{Q}_1} = \frac{1}{2} [\mathfrak{Q}_{\mathfrak{Q}_o} + \mathfrak{Q}_{\mathfrak{Q}_u}]; \quad \mathfrak{Q}_{\mathfrak{B}_1} = \frac{di}{dU_e} [\mathfrak{Q}_{\mathfrak{Q}_o} - \mathfrak{Q}_{\mathfrak{Q}_u}] \quad (1)$$

$$\mathfrak{Y}_{\mathfrak{L}_0} = \mathfrak{Y}_{\mathfrak{L}_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{dU_e}{di} \mathfrak{Y}_{\mathfrak{L}_1}; \quad \mathfrak{Y}_{\mathfrak{L}_u} = \mathfrak{Y}_{\mathfrak{L}_1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{dU_e}{di} \mathfrak{Y}_{\mathfrak{L}_1}. \quad (103)$$

nt die Breite des Spektrums bei unverändertem Gesamtstrom gegen Null, so $\mathfrak{Y}_{\mathfrak{L}_0} - \mathfrak{Y}_{\mathfrak{L}_u} - \mathfrak{Y}_{\mathfrak{L}_1}$, das heisst, die Wirkung einer \mathfrak{L} -Modulation unmittelbar ts und links des auf eine Geschwindigkeit zusammengezogenen Spektrums die gleiche. Unter Benutzung von (86) und (103) in (80) und (81) (die Inte- le entfallen wegen $d^2 i_v / dU_v^2 = 0$) ergibt sich:

$$\mathbf{r}_{\mu, \sigma} + \mathbf{r}_{\sigma, \mu}^* = \mathfrak{L}_{1\mathfrak{L}_\sigma} e^{i\omega\tau_\sigma} [\mathfrak{B}_{1\mathfrak{L}_\mu} e^{i\omega\tau_\mu}]^* + \mathfrak{B}_{1\mathfrak{L}_\sigma} e^{i\omega\tau_\sigma} [\mathfrak{L}_{1\mathfrak{L}_\mu} e^{i\omega\tau_\mu}]^* \quad (104)$$

$$\mathbf{r}_{\mu, \sigma} + \mathbf{r}_{\sigma, \mu}^* = \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{L}_1} \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{L}_1}^* + \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{L}_1} \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{L}_1}^*. \quad (105)$$

f Klemmenpaare 1 und 2 angewendet ($\tau_\mu = \tau_\sigma = 0$, $\mathfrak{L}_\mu = -\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_\sigma = -\mathfrak{L}_2$, $= \mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{B}_\sigma = \mathfrak{U}_2$) folgt:

$$\mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_{21}^* = \mathfrak{L}_{1\mathfrak{L}_2} \mathfrak{B}_{1\mathfrak{L}_1}^* + \mathfrak{B}_{1\mathfrak{L}_2} \mathfrak{L}_{1\mathfrak{L}_1}^* = \mathfrak{U}_{1\mathfrak{L}_1} \mathfrak{U}_{2\mathfrak{L}_1}^* + \mathfrak{U}_{1\mathfrak{L}_1} \mathfrak{U}_{2\mathfrak{L}_1}^* \quad (106)$$

Übereinstimmung mit den Gleichungen (34) und (30) für eine Strömung. egekehrt stellen (104) und (105) Beziehungen für die Strömungsimpedanzen einer Strömung mit diskreter Geschwindigkeit dar.

Für das exponentielle Spektrum nimmt di_v/dU_v und seine erste Ableitung folgenden Werte an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_v}{dU_v} &= \frac{e}{kT} e^{-\frac{eU_v}{kT}}; \quad c_o = \left[\frac{di_v}{dU_v} \right]_o = 0; \quad c_u = \left[\frac{di_v}{dU_v} \right]_u = \frac{e}{kT}; \\ \frac{d^2 i_v}{dU_v^2} &= -\frac{e}{kT} \cdot \frac{di_v}{dU_v}. \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

Temperatur des Emissionsgebietes des Stromfadens mit dem Gesamtgleich- om i . Die wechselseitigen Strömungsimpedanzen aus (80) und (81), der Strö- ngswirkwiderstand $r_{\mu, \mu}$ wird aus (108) und (109) erhalten für $\sigma = \mu$, und e Beziehungen (69) und (70) ergeben sich damit, wenn in allen Gleichungen t $2kT$ multipliziert und eine Umstellung vorgenommen wird, zu:

$$\int_0^\infty 2e di_v \mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{L}_\sigma} \mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{L}_\mu}^* - 2e i \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{L}_\sigma} \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{L}_\mu}^* - 2kT [\mathbf{r}_{\mu, \sigma} - \mathbf{r}_{\sigma, \mu}^*] e^{i\omega\tau_\mu - \tau_\sigma}, \quad (108)$$

$$\int_0^\infty 2e di_v \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{L}_\nu} \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{L}_\nu}^* - 2e i \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{B}_{\sigma\mathfrak{L}_\mu}^* - 2kT [\mathbf{r}_{\mu, \sigma} + \mathbf{r}_{\sigma, \mu}^*], \quad (109)$$

$$\int_0^\infty 2e di_v \mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{L}_\mu}^* = 2e i \mathfrak{B}_{u\mathfrak{L}_\mu} \mathfrak{B}_{u\mathfrak{L}_\mu}^* + 4kT r_{\mu, \mu}, \quad (110)$$

$$\int_0^\infty 2 e di_\nu \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Q}_\nu} \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Q}_\nu}^* = 2 e i \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Q}_u} \mathfrak{B}_{\mu\mathfrak{Q}_u}^* + 4 k T r_{\mu,\mu}, \quad (11)$$

$$\left. \int_0^\infty 2 e di_\nu \mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{B}_\mu} \mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{B}_\mu}^* = 2 e i \mathfrak{B}_{u\mathfrak{B}_\mu} \mathfrak{B}_{u\mathfrak{B}_\mu}^* - 4 k T \operatorname{Re} \Delta i_\mu^2 \right\} \quad (11)$$

$$\times \int_0^{s_m} \frac{d}{dU_\mu} \mathfrak{E}_{\mathfrak{Q}_\mu}(s) ds \frac{de^{j\omega\tau_\mu(s)}}{dU_\mu},$$

$$\left. \int_0^\infty 2 e di_\nu \mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{Q}_\nu} \mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{Q}_\nu}^* = 2 e i \mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{Q}_u} \mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{Q}_u}^* - 4 k T \operatorname{Re} \Delta i_\mu^2 \right\} \quad (11)$$

$$\times \int_0^{s_m} \frac{d}{dU_\mu} [\mathfrak{E}_{\mathfrak{Q}_\mu}(s) e^{j\omega\tau_\mu(s)}] ds \frac{de^{-j\omega[\tau_\mu(s_m) - \tau_\mu(s)]}}{dU_\mu}.$$

Die ersten vier Gleichungen sind von nullter Ordnung, die beiden letzten sind in allen ihren Gliedern von zweiter Ordnung in Δi_μ , da die Koeffizienten $\mathfrak{B}_{\nu\mathfrak{Q}_\mu}$ und $\mathfrak{Q}_{\mu\mathfrak{Q}_\nu}$ von erster Ordnung in Δi_μ sind [(59), (58)]. $2 e di_\nu$ ist das infinitesimale Schwankungsquadrat¹⁾ pro Hertz Bandbreite \mathfrak{Q}_ν , \mathfrak{Q}_ν^* der ν -ten Strömung mit der infinitesimalen Gleichstromstärke di_ν an der Emissionsstelle. $2 e i$ ist das Schwankungsquadrat des Emissionsstromes des gesamten Stromfadens. (108) bis (113) ergeben somit zwanglos Beziehungen, die auf Rauschvorgänge in linear sich verhaltenden Anordnungen bezogen werden können. Die linke Seite von (111) stellt das Schwankungsquadrat der Voltgeschwindigkeit der Leitungsträger am Ende der μ -ten Strömung dar. Es setzt sich zusammen aus einem Schwankungsquadrat der Voltgeschwindigkeit am Ende der μ -ten Strömung, das entsteht, wenn der gesamte Schwankungsstrom in der Strömung mit der niedrigsten Geschwindigkeit ($U_u = 0$) wirkt und einem Schwankungsquadrat einer Spannung, das man erhält, wenn man dem Strömungswiderstand $r_{\mu,\mu}$ entsprechend der Rauschformel von NYQUIST²⁾ eine Rauschtemperatur T zuordnet. Bezieht sich μ auf ein Klemmenpaar 1 ($\mathfrak{B}_\mu, r_{\mu,\mu}$ gehen über in \mathfrak{U}_1, R_{11}), so entsteht aus (111):

$$\int_0^\infty 2 e di_\nu \mathfrak{U}_{1\mathfrak{Q}_\nu} \mathfrak{U}_{1\mathfrak{Q}_\nu}^* = 2 e i \mathfrak{U}_{1\mathfrak{Q}_u} \mathfrak{U}_{1\mathfrak{Q}_u}^* + 4 k T R_{11}. \quad (114)$$

Beim Übergang vom Widerstandersatzbild zum Leitwertersatzbild tritt für

¹⁾ Alle vorkommenden Schwankungs- oder Rauschquadrate oder -produkte beziehen sich stets auf 1 Hertz Bandbreite.

²⁾ H. NYQUIST, Phys. Rev. 32, 110 (1928).

und R_{11} , \mathfrak{I}_1 und S_{11} :

$$\int_0^{\infty} 2 e di_v \mathfrak{I}_{1v} \mathfrak{I}_{1v}^* = 2 e i \mathfrak{I}_{1u} \mathfrak{I}_{1u}^* + 4 k T S_{11}. \quad (115)$$

Die Zerlegung in zwei Rauschanteile ist von FREEMAN¹⁾ für ebene Strömungen bei verschwindender Raumladung berechnet worden. Sie kann hier auf den Fall mit Raumladung im elektromagnetischen Feld und für die Randwerte der Strömungen selbst erweitert werden. Im Abschnitt II über anfangsgesteuerte Strömungen wird gezeigt, welche Beziehungen bei Anwesenheit eines Potentialminimums bestehen. Die Schwankungsströme in verschiedenen Strömungen einer emittierenden Oberfläche stehen in keinem phasenmässigen Zusammenhang²⁾. Dagegen besteht eine phasenmässige Zuordnung bei den durch die Emissionsschwankungen ausgelösten Schwankungen. Für die Schwankungen der Voltgeschwindigkeiten an den Enden der Strömungen regelt dies (109) und für die Schwankungen der Kurzschlußströme an zwei Klemmenpaaren 1 und 2 (116) [in (109) wird \mathfrak{B}_μ , \mathfrak{B}_σ , $r_{\mu,\sigma}$, $r_{\sigma,\mu}$ ersetzt durch \mathfrak{I}_1 , \mathfrak{I}_2 , \mathfrak{S}_{12} , \mathfrak{S}_{21}]:

$$\int_0^{\infty} 2 e di_v \mathfrak{I}_{1v} \mathfrak{I}_{2v}^* = 2 e i \mathfrak{I}_{1u} \mathfrak{I}_{2u}^* + 2 k T [\mathfrak{S}_{12} + \mathfrak{S}_{21}]. \quad (116)$$

Die Integrale in (109) und (116) sind bestimmend für den wechselseitigen Einfluss bei der Bildung wirksamer Schwankungsquadrate. Sind die Integrale in (109) und (116) Null, so kann gerechnet werden, als ob die Schwankungsquadrate an μ oder 1 bzw. σ oder 2 unabhängig voneinander sind.

Die linke Seite von (113) stellt das induzierte Schwankungsquadrat des Konvektionsstromes am Ende der μ -ten Strömung dar, das proportional Δi_μ^2 ist. Da das Schwankungsstromquadrat der μ -ten Strömung proportional der Gleichstromstärke Δi_μ ist, so tritt das induzierte gegenüber dem direkten Schwankungsstromquadrat in jeder Strömung bei verschwindendem Δi_μ zurück. An Klemmenpaaren liefert (113) und (112) keinen Beitrag. Die Glieder mit T werden Null wegen $\tau_\mu = 0$, und jeder einzelne Koeffizient wird in den anderen Gliedern Null.

Aus (108) und (109) sowie (110) und (111) erhält man die Vertauschungsrelationen durch Subtraktion, wobei die Koeffizienten durch die Strömungsimpedanzen ersetzt werden.

$$\int_0^{\infty} 2 e di_v r_{\mu,v} r_{\sigma,v}^* - 2 e i r_{\mu,u} r_{\sigma,u}^* = \int_0^{\infty} 2 e di_v r_{v,\sigma} r_{v,\mu}^* - 2 e i r_{u,\sigma} r_{u,\mu}^*, \quad (117)$$

¹⁾ J. J. FREEMAN, J. appl. Phys. 23, 1223 (1952).

²⁾ W. SCHOTTKY, Ann. Phys. 57, 541 (1918).

$$\int_0^{\infty} 2 e d i_v r_{\mu, v} r_{\mu, v}^* - 2 e i r_{\mu, u} r_{\mu, u}^* - \int_0^{\infty} 2 e d i_v r_{v, \mu} r_{v, \mu}^* - 2 e i r_{u, \mu} r_{u, \mu}^* , \quad (117)$$

und für $\mu = u$:

$$\int_0^{\infty} 2 e d i_v r_{u, v} r_{u, v}^* = \int_0^{\infty} 2 e d i_v r_{v, u} r_{v, u}^* . \quad (118)$$

Die linken Seiten gehen aus den rechten Seiten durch Vertauschung von v mit μ , v mit σ , u mit μ und u mit σ sowie Bildung des konjugiert komplexen Wertes in (117) hervor.

Wird von einem Stromfaden auf ein Emissionsgebiet F_e übergegangen, bedeutet Index v in den Ausgangsgleichungen, zum Beispiel (81), sowohl die Abhängigkeit von U_e als auch von x, y , dem Ort des Emissionspunktes. Wird (107) die Stromdichte $i(x, y, U_e)$ eingeführt, so folgt aus (81), wenn mit 2 multipliziert und umgestellt wird, wobei auf das Leitwertersatzbild an zwei Klemmenpaaren durch Austausch von \mathfrak{B}_μ und \mathfrak{B}_σ gegen die Kurzschlußströme und \mathfrak{I}_2 bezogen wird:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{F_e} \int_{U_e=0}^{U_e=\infty} \frac{2 e d i(x, y, U_e)}{k T(x, y)} d F_e \mathfrak{I}_{1q}(x, y, U_e) \mathfrak{I}_{2q}^*(x, y, U_e) \\ & = \int_{F_e} \frac{2 e i(x, y)}{k T(x, y)} d F_e \mathfrak{I}_{1q}(x, y, 0) \mathfrak{I}_{2q}^*(x, y, 0) + 2 [\mathfrak{S}_{12} + \mathfrak{S}_{21}^*] . \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

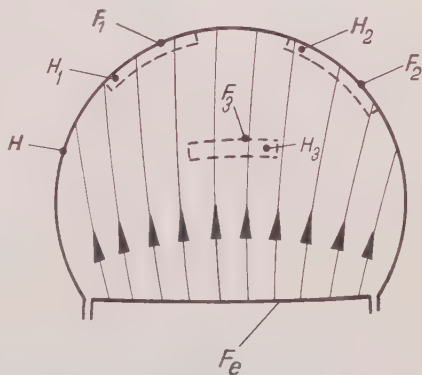
Hieraus folgt, dass die durch die Emissionsschwankungen entstehenden Schwankungsprodukte und -quadrate der Kurzschlußströme an den Klemmenpaaren nur dann durch (120) dargestellt werden können, wenn die Temperatur der emittierenden Oberfläche $T(x, y)$ konstant ist.

In Figur 2 ist ein verlustloser elektromagnetischer Hohlraum H angegeben, der eine Elektronenströmung mit der emittierenden Fläche F_e und einer einheitlichen Emissionstemperatur einschliesst. Drei weitere Hohlräume, zwei der Begrenzung von H und einer innerhalb des Raumes, sind angeordnet. Die Elektronen sollen ungehindert hindurchgehen können, und die Laufzeiten der Elektronen innerhalb dieser drei Hohlräume sollen verschwindend sein. Wenn die Elektronen durch H_1 und H_2 nur in einer Richtung entweder von aussen nach innen oder umgekehrt gehen, ist der Wirkleitwert für eine Anregung innerhalb von H_1 und H_2 Null. Die wechselseitigen Leitwerte zwischen H_1 und H_2 sind Null, wenn die Elektronen durch H_1 und H_2 in der gleichen Richtung, bezogen auf die gleiche Flächennormale, gehen. Für H_3 sind die Leitwerte im allgemeinen nicht Null. Die bei einer inneren Anregung von H_3 geschwindigkeitsmoduliert hindurchgegangenen Elektronen ergeben eine Rückwirkung auf

ne neu eintretenden Elektronen. Ebenso sind die wechselseitigen Leitwerte $\mathfrak{L}_{12} + \mathfrak{L}_{21}^*$ von H_3 mit H_1 oder H_2 aus dem gleichen Grund im allgemeinen nicht Null. In den Fällen, in denen die Leitwerte Null sind, fällt in (120) das Glied 2 ($\mathfrak{L}_{12} - \mathfrak{L}_{21}^*$) weg. Die Gleichung (120) besagt dann, dass die durch die Emissionsschwankungen an den inneren schmalen Rändern von H_1 und H_2 induzierten wechselseitigen Schwankungsprodukte und -quadrate der Kurzschlußströme genau so gross sind, wie wenn in jedem Stromfaden die Schwankungsströme der einzelnen Strömungen dieses Stromfadens zusammengefasst

im Anfang der langsamsten Strömung wirken würden. Lässt man die seitlichen Abmessungen von H_1 und H_2 gegen Null gehen, so werden die Kurzschlussströme genau so gross wie die auf den Querschnitt von H_1 und H_2 auftreffenden Konvektionsströme. Vergrössert man die seitlichen Abmessungen von H_1 und H_2 , so dass sie nicht mehr als klein gegenüber der Vakuumwellenlänge der hochfrequenten Vorgänge sind, so besteht ein Unterschied zwischen Kurzschlußströmen und Konvektionsströmen, da bei normalen Mediumkonstanten Transformationen in H_1 und H_2 auftreten. Besitzen H_1 und H_2 ein

Medium mit der besonderen Eigenschaft einer Permeabilität Null, so treten keine linearen Transformationsverzerrungen auf, und die Kurzschlußströme werden auch bei endlicher Fläche mit den Konvektionsströmen identisch. Werden die Hohlräume H_1 und H_2 entfernt und Flächen F_1 und F_2 auf der inneren Oberfläche von H gewählt, so kann in (120) \mathfrak{L}_1 bzw. \mathfrak{L}_2 durch die auftreffenden Konvektionswechselströme \mathfrak{L}_1 bzw. \mathfrak{L}_2 an F_1 bzw. F_2 ersetzt werden, wobei die Leitwerte Null gesetzt werden können. Für die wechselseitigen Schwankungsprodukte der auftreffenden Konvektionsströme an F_1 und F_2 gilt dann:



Figur 2

Elektromagnetischer Hohlraum H mit emittierender Fläche F_e und drei weiteren Hohlräumen H_1, H_2, H_3 mit den Grundflächen F_1, F_2, F_3 .

$$\left. \begin{aligned} & \int_{F_e} \int_{U_e=0}^{U_e=\infty} 2 e i(x, y, U_e) dF_e \mathfrak{L}_{1\Omega}(x, y, U_e) \mathfrak{L}_{2\Omega}^*(x, y, U_e) \\ & = \int_{F_e} 2 e i(x, y) dF_e \mathfrak{L}_{1\Omega}(x, y, 0) \mathfrak{L}_{2\Omega}^*(x, y, 0) . \end{aligned} \right\} \quad (121)$$

Das Schwankungsquadrat der Konvektionsströme an F_1 beträgt:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{U_e=0}^{F_e} \int_{U_e=0}^{U_e=\infty} 2 e di(x, y, U_e) dF_e \mathfrak{L}_{1\Omega}(x, y, U_e) \mathfrak{L}_{1\Omega}^*(x, y, U_e) \\ &= \int_{F_e}^{F_e} 2 e i(x, y) dF_e \mathfrak{L}_{1\Omega}(x, y, 0) \mathfrak{L}_{1\Omega}^*(x, y, 0) . \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Bei senkrechter Richtung des magnetischen Führungsfeldes zur emittierten Oberfläche liefert die normale Glühemission zwanglos ein Exponentialspektrum. Bei schiefer Richtung wird der Sättigungsstrom auf $\cos \varphi$ (φ = Winkel zwischen Flächennormale und Magnetfeld) geschwächt. Es ergibt sich das gleiche Spektrum, wenn angenommen wird, dass der Bruchteil $1 - \cos \varphi$ der Elektronen, die wieder auf die Kathode zurückfallen, keine Vorzugsrichtung der Emission bewirkt. Man bezieht zweckmässigerweise das Verteilungsgesetz auf die Richtung des magnetischen Führungsfeldes. Dabei findet man ebenfalls ein exponentielles Verteilungsgesetz von der Form

$$di = i dF p_{0\perp} dp_{0\perp} \exp \left[\frac{-W}{k T} \right] \frac{e dU_e \cos \varphi}{(m_e + k T / c_0^2) (k T)^2},$$

wobei die Emissionsenergie $W = e U_e + W_0$ ist. (W_0 Emissionsenergie, wenn nur eine Bewegungsgrösse $p_{0\perp}$ quer zum Führungsfeld besteht.)

Für eine Strömung mit diskreter Geschwindigkeit werden noch die Vereinfachungen angegeben, die bei verschwindender Raumladung bestehen. Wir bei den Ausdrücken für das Leitwertersatzbild (40) und (41) die Differentiabelbeziehung (54) benutzt, so ergibt sich für die wechselseitigen Leitwerte und den Wirkleitwert an zwei bzw. einem Klemmenpaar:

$$\mathfrak{S}_{12} + \mathfrak{S}_{21}^* = \Delta i \frac{d}{dU_e} [\mathfrak{I}_{1\Omega} \mathfrak{I}_{2\Omega}^*]; \quad 2 S_{11} - \Delta i \frac{d}{dU_e} [\mathfrak{I}_{1\Omega} \mathfrak{I}_{1\Omega}^*]. \quad (12)$$

Der Koeffizient \mathfrak{B}_{11} aus (43) folgt mit (56) zu:

$$\mathfrak{B}_{11} = \mathfrak{I}_{1\Omega}^* e^{-j\omega\tau}. \quad (12)$$

Bei den Untersuchungen in diesem Abschnitt I stehen die Anfangsmodulationen in keinem gegenseitigen Zusammenhang. Im folgenden Abschnitt II werden Vorgänge behandelt, bei denen die Anfangsmodulationen teilweise oder vollständig abhängig sind von den Endmodulationen anderer Strömungen. Dies hat Bedeutung bei dem wichtigen Fall des Vorhandenseins von Potentialminima in den Strömungen.

Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus

Von HEINZ RUTISHAUSER, Zürich¹⁾

1. Einleitung

Im Anschluss an eine praktische Anwendung des BO-Algorithmus (Biorthogonalisierungs-Algorithmus von C. LANCZOS [4], [5]²⁾ machte mich Herr Prof. STIEFEL, ETH., auf das Problem aufmerksam, die höheren Eigenwerte direkt aus den sogenannten Schwarzschen Konstanten zu bestimmen, das heisst ohne den Umweg über die Orthogonalisierung. Auf diese Anregung hin entwickelte der Verfasser einen Algorithmus, der die gestellte Aufgabe löst.

Allerdings gab bereits A. C. AITKEN [1] eine Methode an, welche hauptsächlich zur Auflösung algebraischer Gleichungen gedacht war, aber auch die Bestimmung höherer Eigenwerte aus Schwarzschen Konstanten gestattet. Ferner stammt von C. LANCZOS ein Algorithmus³⁾ zur Bestimmung des charakteristischen Polynoms einer Matrix aus Schwarzschen Konstanten. Überdies entwickelte J. HADAMARD in seiner Dissertation [2] eine Methode zur Bestimmung der Pole einer durch ihre Potenzreihe gegebenen Funktion. Er hat damit, wie § 2 zeigen wird, auch das eingangs erwähnte Eigenwertproblem gelöst. Wenn hier das schon gelöste Problem nochmals aufgegriffen wird, so geschieht dies deshalb, weil der entwickelte Algorithmus eine Reihe von weiteren Anwendungen gestattet und insbesondere auch wertvolle Beziehungen zur Kettenbruchtheorie vermittelt⁴⁾.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit den theoretischen Grundlagen, während über die zahlreichen Anwendungen (Auflösung algebraischer Gleichungen, Eigenwertprobleme, Umwandlung einer Potenzreihe in einen Kettenbruch und umgekehrt, Summation schlecht konvergenter Reihen usw.) später berichtet werden soll.

Es sei schliesslich noch bemerkt, dass an der GaMM.-Tagung 1953 (21. bis 24. April in Aachen) auszugsweise über diese Arbeit berichtet wurde [7].

2. Problemstellung

Sei A eine n -reihige Matrix, A^* ihre Transponierte, ferner seien x_0, y_0 zwei Vektoren, von denen x_0 in bezug auf die Matrix A und y_0 in bezug auf die

¹⁾ Institut für angewandte Mathematik der ETH.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 251.

³⁾ Es handelt sich *nicht* um den BO-Algorithmus, vgl. vielmehr Kapitel VI bei [4] oder S. 173—179 bei [5].

⁴⁾ Herrn Prof. Stiefel verdanke ich auch die Anregung zur Vereinfachung einiger Beweise mit Hilfe der Kettenbruchtheorie.

Matrix A^* in allgemeiner Lage sei, das heisst, im Koordinatensystem der Eigenvektoren und Hauptvektoren von A (bzw. A^*) verschwinde keine Komponente von x_0 (bzw. y_0). Ich bilde nun aus x_0 und y_0 die unendlich vielen Vektoren $x_\nu = A^\nu x_0$ und $y_\nu = (A^*)^\nu y_0$ sowie die inneren Produkte $s_{\mu+\nu} = (x_\mu, y_\nu)$, die bekanntlich von der Summe der Indizes μ, ν abhängen und als *Schwarzsche Konstanten* der Matrix A in bezug auf die Anfangsvektoren x_0 und y_0 bezeichnet werden.

Die mit diesen Schwarzschen Konstanten s_κ gebildete Funktion

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{s_\kappa}{z^{\kappa+1}}$$

ist nun rational, und ihre Pole sind die Eigenwerte von A , denn es ist

$$f(z) = (B x_0, y_0) \quad \text{mit} \quad B = (z E - A)^{-1}.$$

Damit ist das gestellte Problem, nämlich die Bestimmung der Eigenwerte einer Matrix A aus Schwarzschen Konstanten, zurückgeführt auf die Bestimmung der Pole einer rationalen Funktion

$$f(s) = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \dots$$

Ist jedoch A eine unendliche Matrix oder ein Integraloperator, so ist die Funktion $f(z)$ zwar nicht mehr rational, aber ihre Pole sind immer noch die Eigenwerte von A . In gewissen Fällen kann man beweisen, dass $f(z)$ für $z \neq 0$ merkmorph ist, beispielsweise dann, wenn die Schwarzschen Konstanten eines selbstadjungierten und volldefiniten Eigenwertproblem entstammen, für welches der Entwicklungssatz gilt.

Die dargelegten Gründe rechtfertigen es wohl ohne weiteres, nicht das Problem der Eigenwertbestimmung, sondern wie J. HADAMARD [2] das etwas allgemeinere Problem der Bestimmung der Pole einer durch eine Reihe (1) gegebenen Funktion $f(z)$ zu behandeln, wobei die s_κ beliebig komplex sein dürfen. Darüber hinaus wird in gewissen Fällen auch noch die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(z)$ gesucht sein, falls eine solche existiert.

3. Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus (QD-Algorithmus)

Für den Fall, dass die erzeugende Funktion

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{s_\nu}{z^{\nu+1}}$$

ausserhalb eines gewissen Kreises $|z| = R$ genau einen einfachen Pol λ_1 besitzt, gab bereits D. BERNOULLI die Formel

$$\lambda_1 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{s_{\nu+1}}{s_\nu}$$

Zur Bestimmung weiterer Pole dienen die Formeln (21) bei AITKEN [1]; spielsweise erhält man unter der Voraussetzung $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$ für den 1. λ_2 die Beziehung

$$\lambda_2 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\frac{s_{\nu+1} \ s_{\nu+2}}{s_{\nu+2} \ s_{\nu+3}}}{\frac{s_{\nu+1}}{\frac{s_{\nu} \ s_{\nu+1}}{s_{\nu+1} \ s_{\nu+2}}}}, \quad (2b)$$

und entsprechende Formeln können für die weiteren Pole aufgestellt werden. Man gilt aber die Identität

$$\frac{\frac{s_{\nu} \ s_{\nu+1}}{s_{\nu+1} \ s_{\nu+2}}}{s_{\nu}} = s_{\nu+1} \left(\frac{s_{\nu+2}}{s_{\nu+1}} - \frac{s_{\nu+1}}{s_{\nu}} \right),$$

so wir entnehmen, dass man λ_2 auch durch folgenden Prozess aus den Schwarzschen Konstanten s_{ν} — $s_1^{(\nu)}$ ermitteln kann: Man bildet die Quotienten $s_{\nu} = s_1^{(\nu+1)}/s_1^{(\nu)}$, dann die Differenzen dieser $q_1^{(\nu)}: d_1^{(\nu)} = q_1^{(\nu+1)} - q_1^{(\nu)}$, und schliesslich die Produkte

$$s_2^{(\nu)} = s_1^{(\nu+1)} \cdot d_1^{(\nu)} \quad \left(= \frac{1}{s_{\nu}} \cdot \frac{s_{\nu} \ s_{\nu+1}}{s_{\nu+1} \ s_{\nu+2}} \right).$$

Man ist λ_2 nach (2b) der Grenzwert der Quotienten $q_2^{(\nu)} = s_2^{(\nu+1)}/s_2^{(\nu)}$ (für $\nu \rightarrow \infty$), genau so wie λ_1 nach (2a) der Grenzwert von $q_1^{(\nu)}$ ist.

Für die praktische Rechnung wird man die Zahlen $s_1^{(\nu)}$, $q_1^{(\nu)}$, ... untereinander schreiben (vgl. das Beispiel auf Seite 236); man spricht dann von einer Quotientenkolonne » $q_1^{(\nu)}$ bzw. von einer » Differenzenkolonne » usw.

Man wird nun vermuten, dass sich durch konsequente Fortsetzung dieses Prozesses auch die weiteren Pole $\lambda_3, \lambda_4, \dots$ als Grenzwerte entsprechender Quotienten $q_3^{(\nu)}, q_4^{(\nu)}, \dots$ ergeben (vorausgesetzt, dass $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > |\lambda_4| > \dots$).

Dies ist in der Tat der Fall, nur muss man die weiteren Differenzenkolonnen $q_{\sigma}^{(\nu)}$ ($\sigma = 2, 3, \dots$) vor der Multiplikation mit $s_{\sigma}^{(\nu-1)}$ modifizieren; es ergibt sich nun die folgende allgemeine Vorschrift zur Aufstellung des QD-Schemas zu den gegebenen Reihenkoeffizienten (bzw. Schwarzschen Konstanten) $s_{\nu} = s_1^{(\nu)}$:
Ausgehend von den $s_1^{(\nu)}$ berechne man nacheinander (für $\sigma = 1, 2, 3, \dots$)

$$\left. \begin{aligned} q_{\sigma}^{(\nu)} &= s_{\sigma}^{(\nu+1)}/s_{\sigma}^{(\nu)} && \text{Quotientenreihe der } s_{\sigma}^{(\nu)}, \\ d_{\sigma}^{(\nu)} &= q_{\sigma}^{(\nu+1)} - q_{\sigma}^{(\nu)} && \text{Differenzenreihe der } q_{\sigma}^{(\nu)}, \\ e_{\sigma}^{(\nu)} &= d_{\sigma}^{(\nu)} + e_{\sigma-1}^{(\nu+1)} && \text{modifizierte Differenzen}^2), \\ s_{\sigma+1}^{(\nu)} &= s_{\sigma}^{(\nu+1)} \cdot e_{\sigma}^{(\nu)} && \text{neue s-Reihe.} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

1) Wir bezeichnen die Schwarzschen Konstanten s_{ν} fortan auch gelegentlich mit $s_1^{(\nu)}$.

2) Für $\sigma = 1$ stimmen die $e_1^{(\nu)}$ mit den $d_1^{(\nu)}$ überein, also ist immer $e_0^{(\nu)} = 0$ zu setzen.

Falls man die $s_\sigma^{(v)}$ -Werte ($\sigma > 1$) nicht benötigt, kann man auch mit folgenden komprimierten Vorschrift arbeiten (ausgehend von $e_0^{(v)} = 0$ und $q_1^{(v)} = s_{v+1}/s_v$):

$$\left. \begin{aligned} e_\sigma^{(v)} &= e_{\sigma-1}^{(v+1)} + q_\sigma^{(v+1)} - q_\sigma^{(v)}, \\ q_{\sigma-1}^{(v)} &= q_\sigma^{(v+1)} \cdot \frac{e_\sigma^{(v+1)}}{e_\sigma^{(v)}}. \end{aligned} \right\} \quad (\sigma = 1, 2, \dots)$$

Beispiel zum QD-Algorithmus

Die $s_1^{(v)}$ seien die sogenannten Fibonaccischen Zahlen; es ist dann

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}:$$

$s_1^{(v)}$	$q_1^{(v)}$	$d_1^{(v)} = e_1^{(v)}$	$s_2^{(v)}$	$q_2^{(v)}$	$d_2^{(v)}$	$e_2^{(v)}$
1						
1	1		1			
2	2	1	1	-1		
3	1,5	-0,5	-1	-0,5	+0,5	0
5	1,666 667	0,166 667	0,5	-0,666 667	-0,166 667	0
8	1,6	-0,066 667	-0,333 333	-0,6	+0,066 667	0
13	1,625	+0,025	+0,2	-0,625	-0,025	0
21	1,615 384	-0,009 615	-0,125			
	$\lambda \approx 1,618 034$			$\lambda_2 \approx -0,618 034$		

An diesem einfachen Beispiel tritt bereits eine Erscheinung zutage, die als allgemeingültig erweisen wird:

Wenn $f(z)$ eine rationale Funktion ist, deren Nenner den Grad n besitzt, bricht das QD-Schema nach der n -ten modifizierten Differenzenkolonne ab, ähnlich, wie das gewöhnliche Differenzenschema eines Polynoms nach der n -ten Differenz abbricht.

Diese Eigenschaft erlaubt uns, das QD-Schema in einem solchen Fall auch von oben nach unten fortschreitend aufzubauen, wenn die in der obersten Schrägzeile stehenden Werte

$$s_0, q_1^{(0)}, e_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, e_{n-1}^{(0)}, q_n^{(0)}$$

bekannt sind. Dieses Vorgehen, welches einem wohlbekannten Prozess bei dem gewöhnlichen Differenzenschema völlig analog ist, wird vor allem für die Anwendungen von grosser Bedeutung sein.

Gewissermaßen als Vorläufer des BO-Algorithmus hat C. LANZOS das bereits erwähnte Verfahren zur Bestimmung des charakteristischen Polynoms einer Matrix aus Schwarzschen Konstanten angegeben. Im Verlaufe dieses Prozesses, der übrigens mit dem QD-Algorithmus nahe verwandt ist¹⁾, wird eine Kette von Polynomen $p_0 \equiv 1, p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots$ aufgebaut, deren letztes Glied $p_m(\lambda)$ das Minimalpolynom der Matrix A ist.

Entsprechend bilden wir hier das zweidimensionale Schema der Polynome $v(z)$ vom Grade σ (P-Schema):

$$\begin{array}{cccc} p_0^{(0)} & & & \\ & p_1^{(0)} & & \\ p_0^{(1)} & & p_2^{(0)} & \\ & p_1^{(1)} & & p_3^{(0)} \\ p_0^{(2)} & & p_2^{(1)} & \\ & p_1^{(2)} & & p_3^{(1)} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot \end{array}$$

Das wir nach der folgenden Regel aufbauen:

$$\left. \begin{aligned} p_0^{(\nu)} &\equiv 1 \quad \text{für alle } \nu, \\ p_\sigma^{(\nu)}(z) &= z p_{\sigma-1}^{(\nu+1)}(z) - q_\sigma^{(\nu)} p_{\sigma-1}^{(\nu)}(z) \quad (\nu = 0, 1, \dots; \sigma = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Die Regel (5) kann auch schematisch dargestellt werden, so dass man sofort ersieht, in welcher Weise ein Element im P-Schema aus den links davon stehenden Elementen $p_{\sigma-1}^{(v+1)}$ und $p_{\sigma-1}^{(v)}$ gebildet wird:

A diagram illustrating the mapping of points. At the top left, there is a point labeled $p_{\sigma-1}^{(v)}$. To its right and slightly higher is a point labeled $q_{\sigma}^{(v)}$. Below $p_{\sigma-1}^{(v)}$ is a point labeled $p_{\sigma-1}^{(v+1)}$. Dotted lines connect $p_{\sigma-1}^{(v)}$ to $q_{\sigma}^{(v)}$, and $p_{\sigma-1}^{(v+1)}$ to $q_{\sigma}^{(v)}$. From $q_{\sigma}^{(v)}$, two dotted lines branch out towards a point on the right labeled $p_{\sigma}^{(v)}$. A label z is placed below the line connecting $p_{\sigma-1}^{(v+1)}$ and $q_{\sigma}^{(v)}$.

Wir wollen nun für diese Polynome $p_a^{(v)}(z)$ die beiden folgenden Relationen beweisen:

$$p_{\sigma}^{(v+1)} - p_{\sigma}^{(v)} = -e_{\sigma}^{(v)} p_{\sigma-1}^{(v+1)} \quad \text{für } \sigma \geq 0 \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} p_1^{(v)} - (z - q_1^{(v)}) p_0^{(v)} &= 0, \\ p_{\sigma+1}^{(v)} - [z - q_{\sigma+1}^{(v)} - e_{\sigma}^{(v)}] p_{\sigma}^{(v)} + e_{\sigma}^{(v)} q_{\sigma}^{(v)} p_{\sigma-1}^{(v)} &= 0 \quad \text{für } \sigma > 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

1) Vergleiche hierzu § 8.

Beweis von (6)

Wir verwenden als Induktionsvoraussetzung die Formel (6) mit $\sigma - 1$ an Stelle von σ , also die Beziehung

$$p_{\sigma-1}^{(v+1)} - p_{\sigma-1}^{(v)} + e_{\sigma-1}^{(v)} p_{\sigma-2}^{(v+1)} = 0,$$

welche für $\sigma = 1$ wegen $p_0^{(v)} \equiv 1$ und $e_0^{(v)} = 0$ sicher für alle v erfüllt ist.

Wir bilden nun die Grösse

$$\delta = p_{\sigma}^{(v+1)} - p_{\sigma}^{(v)} + e_{\sigma}^{(v)} p_{\sigma-1}^{(v+1)},$$

die wegen (5) zu

$$z[p_{\sigma-1}^{(v+2)} - p_{\sigma-1}^{(v+1)}] - q_{\sigma}^{(v+1)} p_{\sigma-1}^{(v+1)} + q_{\sigma}^{(v)} p_{\sigma-1}^{(v)} + e_{\sigma}^{(v)} p_{\sigma-1}^{(v+1)}$$

wird. Unter Verwendung von

$$q_{\sigma}^{(v+1)} - e_{\sigma}^{(v)} = q_{\sigma}^{(v)} - e_{\sigma}^{(v-1)}$$

[siehe (4)] ergibt sich

$$\delta = z[p_{\sigma-1}^{(v+2)} - p_{\sigma-1}^{(v+1)}] - q_{\sigma}^{(v)} [p_{\sigma-1}^{(v+1)} - p_{\sigma-1}^{(v)}] + e_{\sigma-1}^{(v+1)} p_{\sigma-1}^{(v+1)},$$

oder unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung:

$$\delta = -z e_{\sigma-1}^{(v+1)} p_{\sigma-2}^{(v+2)} + q_{\sigma}^{(v)} e_{\sigma-1}^{(v)} p_{\sigma-2}^{(v+1)} + e_{\sigma-1}^{(v+1)} p_{\sigma-1}^{(v+1)},$$

was sich schliesslich unter Verwendung von

$$q_{\sigma}^{(v)} e_{\sigma-1}^{(v)} - q_{\sigma-1}^{(v+1)} e_{\sigma-1}^{(v+1)}$$

[siehe (4)] zu

$$\delta = e_{\sigma-1}^{(v+1)} \{ -z p_{\sigma-2}^{(v+2)} + q_{\sigma-1}^{(v+1)} p_{\sigma-2}^{(v+1)} + p_{\sigma-1}^{(v+1)} \}$$

reduziert. Dieser Ausdruck verschwindet aber wegen (5); was zu beweisen war.

Beweis von (7)

Unter Verwendung der mit z multiplizierten Gleichung (6) ergibt (7):

$$\begin{aligned} p_{\sigma+1}^{(v)} - z p_{\sigma}^{(v+1)} &= z e_{\sigma}^{(v)} p_{\sigma-1}^{(v+1)} + q_{\sigma+1}^{(v)} p_{\sigma}^{(v)} + e_{\sigma}^{(v)} p_{\sigma}^{(v)} + e_{\sigma}^{(v)} q_{\sigma}^{(v)} p_{\sigma-1}^{(v)} \\ &= [p_{\sigma+1}^{(v)} - z p_{\sigma}^{(v+1)} + q_{\sigma+1}^{(v)} p_{\sigma}^{(v)}] + e_{\sigma}^{(v)} [p_{\sigma}^{(v)} - z p_{\sigma-1}^{(v+1)} + q_{\sigma}^{(v)} p_{\sigma-1}^{(v)}]. \end{aligned}$$

Wegen (5) verschwinden aber die eingeklammerten Ausdrücke; was zu beweisen war.

Als Beispiel sei hier das zum QD-Schema auf Seite 236 gehörige P-Schema gegeben:

$p_0^{(v)}$	$p_1^{(v)}$	$p_2^{(v)}$
1		
	$z - 1$	
1		$z^2 - z - 1$
	$z - 2$	
1		$z^2 - z - 1$
	$z - 1,5$	
1		$z^2 - z - 1$
	$z - 1,666\,667$	
1		

Man erkennt aus diesem Beispiel sofort eine weitere grundlegende Eigenschaft des QD-Algorithmus, die wir später (§ 7) beweisen werden:

Ist

$$f(z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{s_{\alpha}}{z^{\alpha+1}}$$

die rationale Funktion mit dem Nenner $N(z) = z^n + \dots$, so steht im zugeordneten P-Schema in der Kolonne $p_n^{(v)}$ für alle v dasselbe Polynom, nämlich $N(z)$.

5. Beziehungen zur Kettenbruchtheorie

Wie die Formel (7) zeigt, sind die Polynome $p_{\sigma}^{(v)}(z)$ für festes v gerade die Näherungsnenner des folgenden J-Kettenbruchs¹⁾:

$$f_v(z) = \cfrac{s_v}{z - q_1^{(v)}} - \cfrac{e_1^{(v)} q_1^{(v)}}{z - q_2^{(v)} - e_1^{(v)}} - \cfrac{e_2^{(v)} q_2^{(v)}}{z - q_3^{(v)} - e_2^{(v)}} - \dots \quad (8)$$

Dieser ist wiederum der sogenannte « gerade Teil » des nachstehenden S-Kettenbruchs, in welchen er durch Extension transformiert werden kann²⁾:

$$f_v(z) = \cfrac{s_v}{z} - \cfrac{q_1^{(v)}}{1} - \cfrac{e_1^{(v)}}{z} - \cfrac{q_2^{(v)}}{1} - \cfrac{e_2^{(v)}}{z} - \dots \quad (9)$$

Bildet man nun durch Kontraktion den « ungeraden Teil » des Kettenbruchs (9), so resultiert offenbar:

$$f_v(z) = \cfrac{s_v}{z} \left\{ 1 + \cfrac{q_1^{(v)}}{z - q_1^{(v)} - e_1^{(v)}} - \cfrac{e_1^{(v)} q_2^{(v)}}{z - q_2^{(v)} - e_2^{(v)}} - \cfrac{e_2^{(v)} q_3^{(v)}}{z - q_3^{(v)} - e_3^{(v)}} - \dots \right\},$$

¹⁾ Vgl. H. WALL [8], §§ 50 und 51.

²⁾ Vgl. H. WALL [8], § 96, insbesondere Formeln (96.6), (96.12) und (96.13).

oder wegen (4):

$$z f_v(z) - s_v = \frac{s_{v+1}}{z - q_1^{(v+1)}} - \frac{e_1^{(v+1)} q_1^{(v+1)}}{z - q_2^{(v+1)} - e_1^{(v+1)}} - \frac{e_2^{(v+1)} q_2^{(v+1)}}{z - q_3^{(v+1)} - e_2^{(v+1)}} - \dots = f_{v+1}(z).$$

Es ist also für alle v

$$f_v(z) = \frac{s_v}{z} + \frac{f_{v+1}(z)}{z}$$

und damit offenbar für $|z| > \limsup |s_{v+1}/s_v|$:

$$f_v(z) = \sum_0^{\infty} \frac{s_{v+\kappa}}{z^{\kappa+1}}. \quad (1)$$

Das bedeutet insbesondere, dass die Formeln (8) und (9) für $v=0$ Kettenbruchentwicklungen der ursprünglich gegebenen Funktion $f(z)$ darstellen; der QD-Algorithmus leistet somit auch die Kettenbruchentwicklung einer durch eine Potenzreihe $\sum_0^{\infty} s_{\kappa}/z^{\kappa+1}$ gegebenen Funktion.

Beispielsweise ergibt sich aus dem QD-Schema für die Fibonacci'schen Zahlen (Seite 236) der endliche S-Kettenbruch

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{1}$$

für die Funktion $z/(z^2 - z - 1)$.

Auf Grund dieses Zusammenhanges lassen sich sofort gewisse Ergebnisse aus der Kettenbruchtheorie auf den QD-Algorithmus übertragen. Beispielsweise sind die im J -Kettenbruch (8) als Teilzähler auftretenden Grössen $e_{\sigma}^{(v)} q_{\sigma}^{(v)}$ mit den Reihenkoeffizienten der durch den Kettenbruch dargestellten Funktion (10) in folgender Weise verknüpft¹⁾:

$$e_{\sigma}^{(v)} q_{\sigma}^{(v)} = \frac{H_{\sigma+1}^{(v)} H_{\sigma-1}^{(v)}}{(H_{\sigma}^{(v)})^2}. \quad (1)$$

$$H_{\sigma}^{(v)} = \begin{vmatrix} s_v & s_{v+1} & \dots & s_{v+\sigma-1} \\ s_{v+1} & s_{v+2} & \dots & s_{v+\sigma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{v+\sigma-1} & s_{v+\sigma} & \dots & s_{v+2\sigma-2} \end{vmatrix}$$

¹⁾ Vgl. § 42, insbesondere Formeln (42.3) und (42.7) bei H. WALL [8].

erner ist ja nach (4)

$$s_{\sigma}^{(v)} = e_{\sigma-1}^{(v)} s_{\sigma-1}^{(v+1)} = \{ e_{\sigma-1}^{(v)} q_{\sigma-1}^{(v)} \} s_{\sigma-1}^{(v)} \quad \text{oder} \quad s_{\sigma}^{(v)} = s_1^{(v)} \prod_{\mu=1}^{\sigma-1} (e_{\mu}^{(v)} q_{\mu}^{(v)}) .$$

mit wegen (11):

$$s_{\sigma}^{(v)} = \frac{H_{\sigma}^{(v)}}{H_{\sigma-1}^{(v)}} \quad \text{und} \quad q_{\nu}^{(\sigma)} = \frac{H_{\sigma}^{(v+1)} H_{\sigma-1}^{(v)}}{H_{\sigma}^{(v)} H_{\sigma-1}^{(v+1)}} . \tag{12}$$

er auch die Näherungsnenner $p_{\sigma}^{(v)}(z)$ des Kettenbruchs (8) kann man explizite
rch die Reihenkoeffizienten ausdrücken. Weil nämlich der σ -te Näherungs-
uch von $f_{\nu}(z)$ (dessen Nenner $p_{\sigma}^{(v)}$ ist), bis zum Glied $1/z^{2\sigma}$ einschliesslich mit
(z) übereinstimmen muss (vgl. [8], §51), müssen im Produkt $f_{\nu}(z) p_{\sigma}^{(v)}(z)$ die
ieder mit

$$\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \dots, \frac{1}{z^{\sigma}}$$

mtliche verschwinden. Daraus folgt aber wegen

$$f_{\nu}(z) = \frac{s_{\nu}}{z} + \frac{s_{\nu+1}}{z^2} + \frac{s_{\nu+2}}{z^3} + \dots$$

nd weil $p_{\sigma}^{(v)}(z)$ mit $z^{\sigma} + \dots$ beginnt:

$$p_{\sigma}^{(v)}(z) = \frac{1}{H_{\sigma}^{(v)}} \begin{vmatrix} s_{\nu} & s_{\nu+1} & \dots & s_{\nu+\sigma-1} & 1 \\ s_{\nu+1} & s_{\nu+2} & \dots & s_{\nu+\sigma} & z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{\nu+\sigma} & s_{\nu+\sigma+1} & \dots & s_{\nu+2\sigma} & 1 & z^{\sigma} \end{vmatrix} . \tag{13}$$

6. Schwierigkeiten bei der Bildung des QD-Schemas

Die Quotientenbildung im QD-Schema wird natürlich gestört, sobald einer
er Werte $s_{\sigma}^{(v)}$ verschwindet; man muss aber zwei verschiedene Fälle unter-
cheiden:

a) Es sei $s_{\sigma}^{(v)} = 0$, aber $s_{\sigma}^{(v+1)} \neq 0$

Dann wird $q_{\sigma}^{(v)} = \infty$, so dass das QD-Schema in einem von diesem Element
us nach rechts öffnenden Winkelraum nicht definiert ist. Man kann leicht fest-
stellen (vgl. [8], §50), dass dann auch der J -Kettenbruch (8) für die Funktion
(z) nicht existiert.

b) Es sei $s_{\sigma}^{(v)} = 0$ für alle $v \geq \mu$

In diesem Fall kann man das QD-Schema sinnvoll nach rechts und unten
ortsetzen, indem man für die sich zunächst als 0/0 ergebenden Quotienten $q_{\sigma}^{(v)}$

($\nu \geq \mu$) konsequent den Wert 0 einsetzt. Es erscheinen dann im QD-Schema rechts und unterhalb des Elementes $s_{\sigma}^{(\mu)}$ (welches im nachstehenden Beispiel eingerahmt ist) nur noch Nullen. Für den Kettenbruch (8) der Funktion $f_{\nu}(z)$ ($\nu \geq \mu$) bedeutet dies, dass die Näherungsbrüche R_{σ} , $R_{\sigma-1}$ usw. sich nicht nur noch formal durch Faktoren z^{ν} im Zähler und Nenner unterscheiden und nach dem Kürzen alle gleich sind, $f_{\nu}(z)$ ist dann also rational und damit auch $f(z)$.

Das identische Verschwinden der $e_{\sigma}^{(\nu)}$ und $q_{\sigma}^{(\nu)}$ rechts und unterhalb einer gewissen Stelle wirkt sich entsprechend auch auf die Polynome $p_{\sigma}^{(\nu)}$ aus. In der Tat muss nach (6) $p_{\sigma}^{(\nu)}(z)$ von ν unabhängig sein, wenn alle $e_{\sigma}^{(\nu)}$ verschwinden; ausserdem wird $p_{\sigma}^{(\nu)} = z p_{\sigma-1}^{(\nu+1)}$, wenn $q_{\sigma}^{(\nu)} = 0$ ist.

Beispiel: QD-Schema für $f(z) = \frac{z^2 + 2}{z^2(z+1)}$

$s_1^{(\nu)} = s_{\nu}$	$q_1^{(\nu)}$	$e_1^{(\nu)}$	$s_2^{(\nu)}$	$q_2^{(\nu)}$	$d_2^{(\nu)}$	$e_2^{(\nu)}$	$s_3^{(\nu)}$	$q_3^{(\nu)}$	$d_3^{(\nu)}$	$e_3^{(\nu)}$
1										
-1	-1									
+3	-3	-2	2	3						
-3	-1	+2	6	0	-3	-1	-6	0		
+3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1			0						
		0	0	0	0	0	0			

Zugehöriges P-Schema

$p_0^{(\nu)}$	$p_1^{(\nu)}$	$p_2^{(\nu)}$	$p_3^{(\nu)}$	$p_4^{(\nu)}$
1				
	$z+1$			
1		z^2-3		
	$z+3$		$z^2(z+1)$	
1		$z(z+1)$		$z^3(z+1)$
	$z+1$		$z^2(z+1)$	
1		$z(z+1)$		

7. Grundlegende Eigenschaften des QD-Algorithmus

Wir wollen hier die bereits in §3 auf Grund eines numerischen Beispiels vermutete Eigenschaft des QD-Algorithmus beweisen. Zunächst folgt aus dem unmittelbar:

Satz 1. Verschwinden die n -ten modifizierten Differenzen $e_n^{(\nu)}$ im QD-Schema für alle ν , so ist

$$f(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{s_{\kappa}}{z^{\kappa+1}}$$

eine rationale Funktion, deren Nenner höchstens den Grad n hat.

Es gilt aber auch umgekehrt:

Satz 2. Wird mit den Koeffizienten s_n einer rationalen Funktion

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{s_n}{z^{n+1}},$$

den Nenner $N(z)$ den Grad n hat, das QD-Schema aufgestellt¹⁾, so verschwinden die n -ten modifizierten Differenzen $e_n^{(v)}$ für alle v .

Ferner hat das zugeordnete P-Schema die Eigenschaft, dass die Polynome $p_\sigma^{(v)}(z)$ für alle v gleich dem Nenner $N(z)$ der Funktion $f(z)$ sind.

Die Voraussetzung von Satz 2 ist insbesondere dann erfüllt, wenn die s_n Schwarzsche Konstanten einer endlichen Matrix A in bezug auf beliebige Anfangsvektoren sind.

Beweis von Satz 2

Ist $f(z)$ rational und regulär an der Stelle $z = 0$, so sind auch die $f_v(z)$ rational, und zwar alle mit demselben Nenner $N(z)$. Nun ist aber der J -Kettenbruch einer rationalen Funktion, falls er überhaupt existiert²⁾, immer endlich, und die Folge der Näherungsnenner desselben endet mit dem Nenner $N(z)$ der rationalen Funktion. Im Fall der Funktion $f_v(z)$ heisst dies, dass die Folge der Polynome $p_\sigma^{(v)}(z)$ für jedes feste v wie folgt beschaffen ist:

$$p_0^{(v)} \equiv 1; \quad p_1^{(v)}(z), p_2^{(v)}(z), \dots, p_{n-1}^{(v)}(z), p_n^{(v)}(z) = N(z).$$

Damit ist der zweite Teil des Satzes bereits bewiesen, und der erste Teil ergibt sich anschliessend aus (6) mit $\sigma = n$, weil ja die Polynome $p_{n-1}^{(v)} = z^{n-1} - \dots$ sicher nicht identisch verschwinden.

Ist hingegen $z = 0$ ein r -facher Pol von $f(z)$, so ist $f_r(z)$ eine rationale Funktion, die an der Stelle $z = 0$ regulär ist und deren Nenner den Grad $n - r$ hat. Somit folgt aus dem ersten Teil des Beweises, dass $e_n^{(v)} = 0$ für $v \geq r$ (und ebenso $s_{n-1-r} = 0$). Nun kann man offenbar das QD-Schema in der in § 6 unter b) angegebenen Weise ergänzen und findet, dass bereits für $v \geq r + 1$ $e_{n-1}^{(v)} = 0$ ist, ferner $e_{n-2}^{(v)} = 0$ für $v \geq r + 2$ usw., bis schliesslich $e_n^{(v)} = 0$ für alle $v > 0$; was zu beweisen war.

Eine weitere wichtige Eigenschaft des QD-Schemas, die sich insbesondere auch zur Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms eignet (vgl. die angekündigten

¹⁾ Falls das QD-Schema existiert. Ist $z = 0$ ein Pol von $f(z)$, so gilt Satz 2 nur dann, wenn das QD-Schema gemäss der in § 6 unter b) gemachten Bemerkung bis zur Kolonne $e_n^{(v)}$ ergänzt wird.

²⁾ Nichtexistenz dieses Kettenbruchs führt nach [8], §§ 41 und 42, sofort auf $H_\sigma^{(v)} = 0$ für ein gewisses $\sigma < n$ und damit wegen (12) aus $s_\sigma^{(v)} = 0$. Es muss damit Fall § 6a vorliegen, denn § 6b würde die Existenz nicht stören.

digte Arbeit über die Anwendungen des QD-Algorithmus) ergibt sich fast unmittelbar aus der erwähnten Arbeit von AITKEN:

Satz 3. Ist die Funktion $f(z)$ rational und haben ihre Pole verschiedene Absolutbeträge: $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots$ so gilt für das QD-Schema der Koeffizienten von $f(z)$:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} q_{\sigma}^{(v)} = \lambda_{\sigma}, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} e_{\sigma}^{(v)} = 0 \quad (\sigma = 1, 2, 3, \dots). \quad (1)$$

Beweis. Nach AITKEN gilt unter den gemachten Voraussetzungen:

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{H_m^{(v+1)}}{H_m^{(v)}}.$$

Schreibt man dies für $m = \sigma$ und $m = \sigma - 1$ an und dividiert, so folgt wegen (12) sofort die erste der Beziehungen (14). Für den Beweis der zweiten Behauptung betrachten wir den Quotienten

$$\frac{e_{\sigma}^{(v+1)}}{e_{\sigma}^{(v)}} = \frac{q_{\sigma+1}^{(v)}}{q_{\sigma}^{(v+1)}},$$

der für $v \rightarrow \infty$ gegen $\lambda_{\sigma+1}/\lambda_{\sigma}$ konvergiert. Also strebt $e_{\sigma}^{(v)}$ wie $(\lambda_{\sigma+1}/\lambda_{\sigma})^v$ gegen was zu beweisen war.

Die Aussage von Satz 3 kann wie folgt verallgemeinert werden:

Satz 4. Es könne die Funktion

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{s_n}{z^{n+1}}$$

in folgender Weise zerlegt werden: $f(z) = R(z) + q(z)$. Dabei sei $R(z)$ eine für $|z| < R$ rationale Funktion mit dem Nenner $N(z) = z^n + \dots$ und q eine nicht notwendigerweise rationale, aber für $|z| \geq \vartheta R$ ($\vartheta < 1$) reguläre Funktion.

Dann gilt, sofern das QD-Schema existiert und insbesondere die Polynome $p_{\sigma}^{(v)}(z)$ ($\sigma = 0, 1, 2, \dots, n$) für unendlich viele Indexwerte v , definiert sind

$$\lim_{v_j \rightarrow \infty} p_n^{(v_j)}(z) = N(z). \quad (2)$$

Der Beweis dieser Behauptung kann ohne weiteres der erwähnten Arbeit von HADAMARD [2], §§ 14 bis 21, entnommen werden; allerdings wird dort eine Funktion $f(z)$ betrachtet, die nach aufsteigenden Potenzen von z entwickelt. Die bei HADAMARD auftretenden Polynome

$$\mathfrak{P}_m = 1 + A_m^{(1)} z + A_m^{(2)} z^2 + \dots + A_m^{(p)} z^p,$$

$$\mathfrak{P}'_m = 1 + A_m'^{(1)} z + A_m'^{(2)} z^2 + \dots + A_m'^{(q)} z^q,$$

den Koeffizienten durch die Gleichungen (18), (18') bei [2] definiert sind, entsprechen den in dieser Arbeit verwendeten Polynomen $p_r^{m_l}(z)$, $p_q^{m_l}(z)$ usw.; bei die Indizes p, q, r so bestimmt sind, dass

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_p| = \varrho > |\lambda_{p+1}| = |\lambda_{p+2}| = \dots \\ |\lambda_q| = \varrho' > |\lambda_{q+1}| = \dots = \varrho'' > \dots$$

DAMARD beweist dann, dass diese Polynome \mathfrak{P}_m und \mathfrak{P}'_m für $m \rightarrow \infty$ gegen Polynome \mathfrak{P} bzw. \mathfrak{P}' konvergieren, deren Nullstellen genau die ersten p bzw. ersten q Pole von $f(z)$ sind, und zwar ist die Konvergenz etwa so gut wie die der geometrischen Reihe mit dem Quotienten ϱ'/ϱ bzw. ϱ''/ϱ' . Dem Satz 4 kann man folgende Aussagen entnehmen, die wir hier ohne Beweis angeben:

Folgerung 1. Für die Gültigkeit der Aussage (14) (Satz 3) für einen einzelnen Indexwert $\sigma = k$ ist bereits die Bedingung $|\lambda_{k-1}| > |\lambda_k| > |\lambda_{k+1}|$ hinreichend.

Folgerung 2. Baut man mit den Werten $q_\sigma^{(v)}$ und $e_\sigma^{(v)}$ des QD-Schemas analog zu (5) die Polynome $\hat{p}_\sigma^{(v)}(z)$ nach folgender Vorschrift auf:

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_m^{(v)}(z) &\equiv 1 \quad \text{für alle } v, \\ \hat{p}_\sigma^{(v)}(z) &= z \hat{p}_{\sigma-1}^{(v+1)}(z) - q_\sigma^{(v)} \hat{p}_{\sigma-1}^{(v)}(z) \quad (\sigma = m+1, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

so gilt unter der Voraussetzung

$$|\lambda_m| > |\lambda_{m+1}| \geq |\lambda_{m+2}| \geq \dots \geq |\lambda_n| > |\lambda_{n+1}| \dots$$

die Beziehung

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \hat{p}_n^{(v)}(z) = (z - \lambda_{m+1})(z - \lambda_{m+2}) \dots (z - \lambda_n). \quad (17)$$

8. Beziehungen zum BO-Algorithmus von C. Lanczos

Wie bereits in §4 erwähnt, stammt von LANCZOS ein Verfahren zur Bestimmung des charakteristischen Polynoms einer Matrix A aus Schwarzschen Konstanten s_v (bei LANCZOS mit c_v bezeichnet). Es werden dort nach einem bestimmten Verfahren aus den s_v die Polynome $p_0 \equiv 1$; $p_1(z)$, $p_2(z)$, ... gebildet, deren $p_m(z)$, das Minimalpolynom von A ist.

Aus dem Gleichungssystem (48) bei [5], dem die Koeffizienten des Polynoms

$$p_\sigma(z) = z^\sigma + \eta_{\sigma-1} z^{\sigma-1} + \dots + \eta_1 z + \eta_0$$

hinzugefügt werden müssen, geht hervor, dass $p_\sigma(z)$ ebenfalls Näherungsnenner des J -Ket-

tenbruchs von

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{c_N}{z^{N+1}}$$

sein muss, mit andern Worten:

Die von LANCZOS konstruierten Polynome $p_\sigma(z)$ stimmen mit den σ -ten ordneten Polynomen $p_\sigma^{(0)}(z)$ des QD-Schemas der c , überein.

Genauere Betrachtungen zeigen ferner, dass das algorithmische Schema (s. von LANCZOS¹⁾) mit den hier verwendeten Bezeichnungen wie folgt ausgedrückt werden kann:

	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$h_i =$	$s_1^{(0)}$	$s_1^{(1)}$	$s_2^{(0)}$	$s_2^{(1)}$	$s_3^{(0)}$	$s_3^{(1)}$	
$q_j =$	$-q_1^{(0)}$	$-e_1^{(0)}$	$-q_2^{(0)}$	$-e_2^{(0)}$	$-q_3^{(0)}$	$-e_3^{(0)}$	
s_0	1	0	0	0	0	0	
s_1		1		0	0	0	
s_2						0	
			Koeffizienten von $p_1^{(0)}(z)$	Koeffizienten von $p_1^{(1)}(z)$	Koeffizienten von $p_2^{(0)}(z)$	Koeffizienten von $p_2^{(1)}(z)$	

LANCZOS hat ferner gezeigt, dass dieselben Polynome $p_\sigma^{(0)}(z)$ auch auf andere Weise erzeugt werden können, wenn man die Vektoren x_0, y_0 , die zur Erzeugung der Schwarzschen Konstanten s_σ der Matrix A dienten, als Anfangsvektoren für den BO-Algorithmus verwendet²⁾. Da diese Polynome ferner mit den Elementen $\alpha_\sigma, \beta_\sigma$ der Kodiagonalform der Matrix durch die Relationen

$$p_1^{(0)}(z) - (z - \alpha_1) p_0^{(0)} = 0,$$

$$p_{\sigma+1}^{(0)}(z) - (z - \alpha_{\sigma+1}) p_\sigma^{(0)}(z) + \beta_\sigma p_{\sigma-1}^{(0)}(z) = 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots)$$

verknüpft sind, folgt durch Vergleich mit (7) sofort eine Beziehung zwischen den mit dem BO-Algorithmus erzeugten Kodiagonalform der Matrix A und den mit denselben Anfangsvektoren x, y mit dem QD-Algorithmus erhaltenen Werten $q_\sigma^{(0)}$ und $e_\sigma^{(0)}$:

$$\alpha_1 = q_1^{(0)}, \quad \alpha_\sigma = q_\sigma^{(0)} + e_{\sigma-1}^{(0)}, \quad \beta_\sigma = q_\sigma^{(0)} e_\sigma^{(0)} \quad (\sigma = 1, 2, \dots).$$

¹⁾ Tabelle 1, Seite 263, bei [4] oder Seite 176 bei [5].

²⁾ Diese Polynome sind in der Arbeit [6], Seite 41, mit $p_{\sigma+1}(\lambda)$ bezeichnet.

se Formeln vereinfachen auch die Schreibweise des J -Kettenbruchs (8) der Funktion $f(z)$ zu

$$f(z) = \frac{s_0}{|z - \alpha_1|} - \frac{\beta_1}{|z - \alpha_2|} - \frac{\beta_2}{|z - \alpha_3|} - \dots$$

Wie man leicht einsieht, haben nicht nur die Grössen

$$q_\sigma^{(0)} + e_{\sigma-1}^{(0)} \quad \text{und} \quad q_\sigma^{(0)} e_\sigma^{(0)}$$

eine bestimmte Bedeutung für den BO-Algorithmus, sondern auch

$$\alpha_\sigma^{(\nu)} = q_\sigma^{(\nu)} + e_{\sigma-1}^{(\nu)}, \quad \beta_\sigma^{(\nu)} = q_\sigma^{(\nu)} e_\sigma^{(\nu)} \quad (\sigma = 1, 2, \dots; \nu = 0, 1, \dots). \quad (20)$$

sind dies nämlich die Kodiagonalelemente, die man erhält, wenn man den BO-Algorithmus mit den Anfangsvektoren $A^{\approx} x$ und $(A^*)^{\nu-\approx} y^1$ an Stelle von y beginnt.

Demnach enthält das QD-Schema soviel Information, wie man durch vielfache Anwendung des BO-Algorithmus erhält; wir werden in den Anwendungen darauf zurückkommen.

9. Beziehungen zum cg-Algorithmus²⁾

Die Beziehung, die nach [3], § 18, zwischen dem cg-Algorithmus und den Kettenbrüchen besteht, lässt auch eine Querverbindung zwischen cg-Algorithmus und QD-Algorithmus vermuten:

Sei A eine reell symmetrische Matrix; mit dieser bilden wir einerseits die Schwarzschen Konstanten s_ν für die Anfangsvektoren x und $y = x$ sowie anschliessend das QD-Schema.

Andererseits führen wir aber mit demselben Anfangsvektor $r_0 = x$ den BO-Algorithmus durch (Formelgruppe 5.1 bei [3]), allerdings ohne das Gleichungssystem aufzulösen. Die dadurch erzeugten Residuenvektoren r_i genügen nach den Formeln (5.8) und (5.9) bei [3] den Relationen

$$\left. \begin{aligned} A r_0 &= -\frac{1}{a_0} r_1 + \frac{1}{a_0} r_0, \\ A r_i &= -\frac{1}{a_i} r_{i+1} + \left(\frac{1}{a_i} + \frac{b_{i-1}}{a_{i-1}} \right) r_i - \frac{b_{i-1}}{a_{i-1}} r_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots), \\ (r_i, r_j) &= 0 \quad \text{für } i \neq j. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

¹⁾ Die Wahl von \approx beeinflusst dann zwar das Biorthogonalsystem, nicht aber die Kodiagonalmatrix.

²⁾ cg-Algorithmus = Synonym für: Verfahren der konjugierten Gradienten von STIEFEL und SHENSTENES (siehe [3]).

Dieselben Vektoren r_i liefert aber auch der BO-Algorithmus in der Form (2'), (3') bei [6], wenn man für die dort auftretenden s_{k+1} -Skalare $-1/a_{k-1}$ einsetzt; man erhält dann (wegen $A = A^*$):

$$\left. \begin{aligned} A x_1 &= -\frac{1}{a_0} x_2 + \alpha_1 x_1, \\ A x_\sigma &= -\frac{1}{a_{\sigma-1}} x_{\sigma+1} + \alpha_\sigma x_\sigma + \gamma_{\sigma-1} x_{\sigma-1} \quad (\sigma = 2, 3, \dots), \\ (x_i, x_j) &= 0 \text{ für } i \neq j. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Vergleich von (21) und (22) liefert die folgenden Korrespondenzen zwischen den beim cg- und BO-Algorithmus auftretenden Grössen

$$\left. \begin{aligned} x_{\sigma+1} &= r_\sigma, \quad \alpha_1 = \frac{1}{a_0}, \quad \alpha_{\sigma+1} = \frac{1}{a_\sigma} + \frac{b_{\sigma-1}}{a_{\sigma-1}}, \\ \gamma_\sigma &= -\frac{b_{\sigma-1}}{a_{\sigma-1}} \quad \text{oder} \quad \beta_\sigma = \frac{b_{\sigma-1}}{a_{\sigma-1}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ein weiterer Vergleich mit (19) ergibt nun endlich die gewünschte Beziehung zwischen den q, e des QD-Algorithmus und den Gewichtskoeffizienten a, b des cg-Algorithmus:

$$q_\sigma^{(0)} = \frac{1}{a_{\sigma-1}}, \quad e_\sigma^{(0)} = \frac{b_{\sigma-1}}{a_{\sigma-1}} \quad (\sigma \neq 1, 2, \dots). \quad (2)$$

10. Die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(z)$

Nachdem wir Methoden zur Bestimmung der Pole einer Funktion $f(z)$ entwickelt haben, wollen wir nun versuchen, auch die zugehörigen Residuen zu ermitteln. Zur Lösung dieser Aufgabe gehen wir von der Formel (13) aus, welche dasselbe sagt wie

Satz 5. Es ist

$$p_\sigma^{(v)}(z) f_v(z) = \text{Polynom} + \frac{s_{\sigma+1}^{(v)}}{z^{\sigma+1}} + \dots, \quad (2)$$

das heisst der σ -te Näherungsbruch des Kettenbruchs (8) weicht in erster Annäherung um den Betrag $s_{\sigma+1}^{(v)}/z^{2\sigma+1}$ von $f_v(z)$ ab.

Beweis. In der Tat ergibt sich ja das Verschwinden der Koeffizienten von

$$\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \dots, \frac{1}{z^\sigma} \quad \text{in} \quad p_\sigma^{(v)}(z) f_v(z)$$

aus § 5, während der Koeffizient von $1/z^{\sigma+1}$ aus folgender Betrachtung hervorgeht

$$\left. \begin{aligned} &\text{Man erhält den Koeffizienten von } 1/z^{\mu-1} \text{ im Produkt } p_\sigma^{(v)}(z) f_v(z) \\ &\text{dadurch, dass man in der Formel (13) die Potenzen } z^\kappa \text{ durch die} \\ &\text{Werte } s_{v+\mu+\kappa} \text{ ersetzt.} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Daraus folgt – mit $\mu < \sigma$ – sofort wieder das Verschwinden der Koeffizienten von

$$\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \dots, \frac{1}{z^\sigma},$$

aber für $\mu = \sigma$ wird (13) mit der Substitution (26) offenbar zu $H_{\sigma-1}^{(v)}/H_\sigma^{(v)}$, was wegen (12) gleich $s_{\sigma+1}^{(v)}$ ist; was zu beweisen war.

Für die Bestimmung der Residuen von $f(z)$ benötigen wir nun die Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) p_\sigma^{(0)}(z) p_\varrho^{(0)}(z) dz = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma \neq \varrho, \\ s_{\sigma+1}^{(0)} & \text{für } \sigma = \varrho, \end{cases} \quad (27)$$

welcher C irgendeinen Weg bedeutet, der alle Singularitäten von $f(z)$ umschließt. Diese Formel folgt sofort aus (25), denn für $\varrho < \sigma$ fehlt in der Entwicklung von

$$f(z) p_\sigma^{(0)}(z) p_\varrho^{(0)}(z)$$

das Glied mit $1/z$; aus Symmetriegründen folgt dasselbe für $\varrho > \sigma$, und für $\sigma = \varrho$ ist der Koeffizient von $1/z$ tatsächlich $s_{\sigma+1}^{(0)}$.

Nehmen wir nun an, $f(z)$ sei rational und habe n einfache Pole:

$$f(z) = \sum_{\tau=1}^n \frac{c_\tau}{z - \lambda_\tau}, \quad (28)$$

so erhält man durch Einsetzen in (27)

$$\sum_{\tau=1}^n c_\tau p_\sigma^{(0)}(\lambda_\tau) p_\varrho^{(0)}(\lambda_\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma \neq \varrho, \\ s_{\sigma+1}^{(0)} & \text{für } \sigma = \varrho. \end{cases}$$

Diese Gleichung kann in Matrizenform geschrieben werden; definiert man nämlich die Matrizen

$$\left. \begin{aligned} C &= \begin{vmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_n \end{vmatrix}, & S &= \begin{vmatrix} s_1^{(0)} & & & \\ & s_2^{(0)} & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & s_n^{(0)} \end{vmatrix}, \\ P &= \begin{vmatrix} p_0^{(0)}(\lambda_1) & p_0^{(0)}(\lambda_2) & \dots & p_0^{(0)}(\lambda_n) \\ p_1^{(0)}(\lambda_1) & p_1^{(0)}(\lambda_2) & \dots & p_1^{(0)}(\lambda_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n-1}^{(0)}(\lambda_1) & p_{n-1}^{(0)}(\lambda_2) & \dots & p_{n-1}^{(0)}(\lambda_n) \end{vmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

so lautet sie PCP^* S. Daraus ergibt sich endlich die Formel für die gesuchten Residuen c_τ :

$$C^{-1} = P^* S^{-1} P, \quad (3)$$

oder ausführlich geschrieben:

$$\sum_{\sigma=0}^{n-1} \frac{1}{s_{\sigma+1}^{(0)}} p_{\sigma}^{(0)}(\lambda_\tau) p_{\sigma}^{(0)}(\lambda_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \tau, \\ \frac{1}{c_\tau} & \text{für } \nu = \tau. \end{cases} \quad (3)$$

Da aus (28) sofort folgt, dass für alle ν

$$s_\nu = \sum_{\tau=1}^n c_\tau \lambda_\tau^\nu \quad (3)$$

ist, kann man die Formeln für die Bestimmung der c_τ auch gebrauchen, und aus den Werten $s(0), s(1), \dots, s(2n-1)$ eine Funktion

$$s(x) = \sum_{\tau=1}^n c_\tau \lambda_\tau^x$$

zu konstruieren, die an den Stellen $\nu = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$ die vorgeschriebenen Werte $s(\nu) = s_\nu$ annimmt (Interpolation durch Exponentialsummen).

Beispiel. Gesucht eine Funktion $s(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x$, die die Werte

$$s(0) = -1, \quad s(1) = 2, \quad s(2) = 16 \quad \text{und} \quad s(3) = 68$$

annimmt. Wir stellen das QD-Schema auf:

$s_1^{(\nu)}$	$q_1^{(\nu)}$	$e_1^{(\nu)}$	$s_2^{(\nu)}$	$q_2^{(\nu)}$
-1				
	-2			
2		10	20	
	8			-3
16		-3,75	-60	
	4,25			
68				

Hier ist

$$p_0^{(\nu)} \equiv 1, \quad p_1^{(\nu)} = z + 2, \quad p_2^{(\nu)} = z^2 - 5z + 6,$$

also $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$. Ferner

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{20} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

damit

$$C^{-1} = P^* S^{-1} P = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{vmatrix},$$

$$c_1 = 4, c_2 = 5 \quad \text{oder} \quad s(x) = 4 \cdot 3^x + 5 \cdot 2^x.$$

LITERATURVERZEICHNIS

- A. C. AITKEN, *On Bernoulli's Numerical Solution of Algebraic Equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **46**, 289–305 (1925/26).
- J. HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, Thèse (Gauthier-Villars, Paris 1892).
- M. R. HESTENES und E. STIEFEL, *Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems*, J. Res. Nat. Bur. Standards **49**, 409–436 (1952).
- C. LANCZOS, *An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators*, J. Res. Nat. Bur. Standards **45**, 255–282 (1950).
- C. LANCZOS, *Proceedings of a Second Symposium on Large Scale Calculating Machinery*, (1949), S. 164–206.
- H. RUTISHAUSER, *Beiträge zur Kenntnis des Biorthogonalisierungsalgorithmus von C. Lanczos*, ZAMP **4**, 35–56 (1953).
- E. STIEFEL, *Zur Berechnung höherer Eigenwerte symmetrischer Operatoren mit Hilfe der Schwarzschen Konstanten*, ZAMM **33**, 260–262, (1953).
- H. WALL, *Analytic Theory of Continued Fractions* (Van Nostrand Comp. Inc., New York 1948).

Summary

The quotient-difference (QD) algorithm developed by the author may be considered as an extension of BERNOULLI's method for solving algebraic equations. Whereas BERNOULLI's method gives the dominant root as the limit of a sequence of quotients $q_1^{(v)} = s_1^{(v-1)} / s_1^{(v)}$ formed from a certain numerical sequence, the QD-algorithm gives (under certain conditions) all the roots λ_σ as the limits of similar quotient sequences $q_\sigma^{(v)} = s_\sigma^{(v-1)} / s_\sigma^{(v)}$. Close relationship exists between this method and the theory of continued fractions. In fact the QD-algorithm permits developing a function given in the form of a power series into a continued fraction in a remarkably simple manner.

In this paper only the theoretical aspects of the method are discussed. Practical applications will be discussed later.

(eingegangen: 5. August 1953.)

723 A/B Reflex Klystron Performance

By GIACINTO ZITO, Turin¹⁾

1. Foreword

During a systematic series of measurements carried out on a 723 A/B Reflex Klystron it was possible to outline the results in a number of diagrams which proved to be of a considerable practical value inasmuch as they made it possible to follow, at a given load, the behaviour of the tube during the simultaneous variations of the applied voltages to the anode and the reflector. The practical value of these diagrams is evident in that they enable one to obtain very pure amplitude and frequency modulation and to reach conditions of very stable operation.

2. Klystron Characteristic Curves and Methods Used in Obtaining Them

Consider the circuit shown in Figure 1. Through varying simultaneously the anode (resonator) voltage V_a and the reflector voltage V_r so as to keep

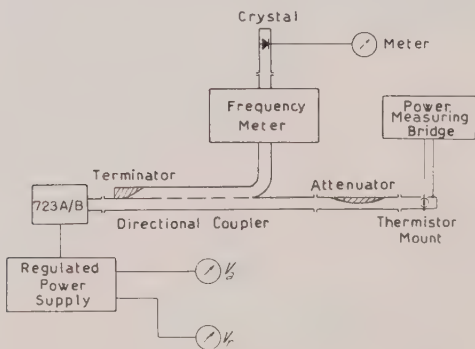


Figure 1

Circuit for the measurement of static klystron performance.

constant the frequency generated by the klystron tube, a nearly linear relation between V_a and V_r is obtained. In other words the ratio between the variation

¹⁾ Istituto Elettrotecnico Nazionale «Galileo Ferraris».

the anode voltage and the reflector voltage along a constant frequency curve is nearly constant.

The approximate linearity of the curves is to be interpreted as a consequence of the linear variation of the potential in the drift space which would be obtained exactly in the case of parallel flat electrodes and in the absence of space charge.

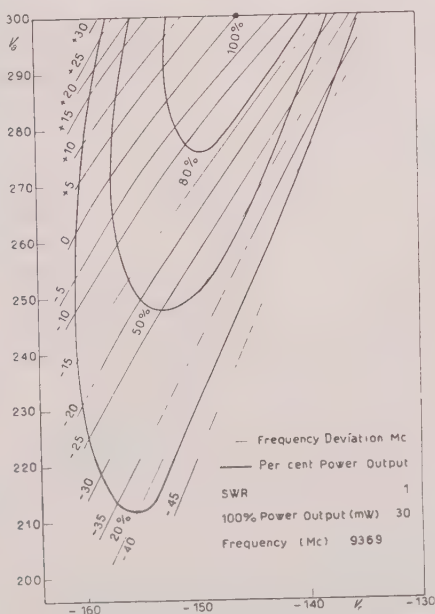


Figure 2
Performance diagram, first mode.

Slight deviations from linearity may be due to the different geometry of the electrodes, to the effect of the space charge, also to the fact that in general along a curve of constant frequency the dissipated power is variable. It follows that a variation of the operating temperature in the tube may modify its geometry with consequent frequency variations.

A number of these curves at different frequencies are shown in the diagrams of Figures 2, 3, and 4, corresponding to three operating modes of the klystron tube.

Simultaneous power measurements were carried out by means of a thermistor and a direct reading bridge (see Figure 1). On the diagrams of Figures 2, 3, and 4 a series of constant power curves have been sketched. In the diagrams

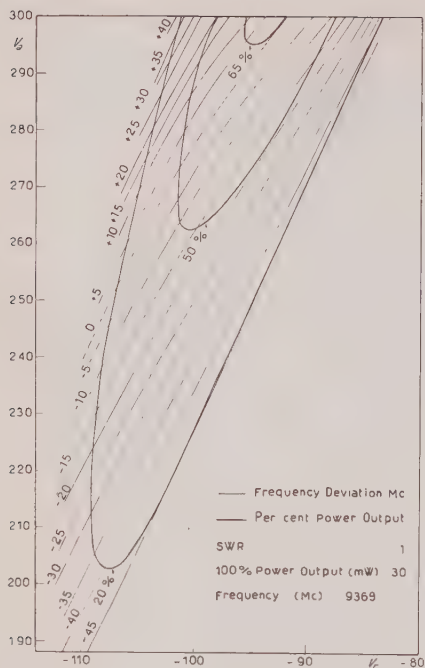


Figure 3

Performance diagram, second mode.

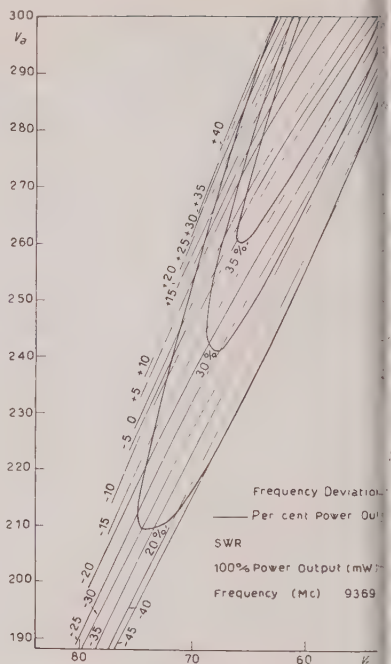


Figure 4

Performance diagram, third mode.

the curve $\Delta f = 0$ refers to the frequency of 9369 Mc. The frequency difference between two adjacent curves is 5 Mc.

The output power (30 mW) at the point $V_a = 300$ V on the curve $\Delta f = 0$ (see Figure 2), has been taken as the reference value of 100% for the constant power curves.

Since the thermistor mount does not produce appreciable reflections across the entire band, the load is constant and equal to the characteristic impedance of the waveguide.

The constant power curves are similar to a series of parabolas, with power values increasing from the outside parabola to the inside ones. The point marked 100% in the diagram of Figure 2 would be the vertex of the parabola 100% power which would develop wholly above the 300 V abscissa, but which is not drawn in the diagram.

At the ends of the constant frequency curves the power diminishes quickly to zero.

3. Examples of Utilization

3.1. Amplitude Modulation

If amplitude modulation is produced by feeding only one of the tube electrodes, as is usually done, undesired frequency modulation cannot be avoided. For this reason, it is often necessary to resort to some method of pulse modulation. In some cases, however, especially in the measurement field, the frequency spectrum inherent to pulse modulation may cause certain difficulties which limit the utility of this system. In these cases, a considerable advantage can be obtained if the amplitude modulation is produced by modulating anode and reflector electrodes at the same time, utilizing a region on diagrams where the power varies considerably along one of the constant frequency curves. The diagram of Figure 2 presents the wanted requirement in the region between the frequency curves $\Delta f = 0$ and $\Delta f = +5$ and the power values $P = 50\%$ and $P = 100\%$.

In order that the point of operation should stay on a constant frequency curve during the modulation process, it is necessary to vary simultaneously the anode voltage and the reflector voltage so that, at every instant, the ratio between their peak variations ΔV_a and ΔV_r is constant and equal to the slope of a curve V_a versus V_r , as shown in Figure 2. The amplitude and phase relation between voltages V_a and V_r can be easily obtained by means of two transformers having the secondary windings in series with the anode and reflector circuits. It may be necessary to limit the maximum value of the depth of modulation to about 50%, in order to avoid distortion. However, this condition does not limit the practical usefulness of the system for measurement purposes.

3.2. Frequency Modulation

The frequency modulation is generally obtained by the superposition of a sinusoidal or saw-tooth voltage on the bias voltage of the reflector. The frequency variation will then depend on the amplitude of the modulating voltage. However, a certain amount of amplitude modulation will always accompany the desired frequency modulation.

From Figures 2, 3, and 4, it appears possible to obtain frequency modulation free from amplitude modulation, if the nearly straight parts of the constant power curves are employed where they cross a great number of constant frequency curves of uniform spacing. In view of the shape of the curves, the further from the vertices the more favourable are the regions for such a system.

The mode of Figure 4 is more suitable for frequency modulation, both because the constant frequency curves are closer to each other, and because the nearly straight curves are in a region of not too high anode voltages.

In order to maintain the operating point on the straight part of the power curves during the modulation process, it is necessary, as in the case, to keep the ratio between the anode-voltage and reflector-voltages constant.

By choosing the correct point of operation, simply varying the above mentioned ratio, it is furthermore possible to pass from amplitude modulation to frequency modulation. In some cases this possibility may be of practical use.

3.3. *Stability*

In each mode of operation, for lower frequencies, the branch curves $P = \text{const}$ are parallel to the constant frequency curves for constant lengths. This fact is accentuated especially in the modes of Figures 4 and 5.

This coincidence makes it possible for the tube to operate with high stability if anode voltage and reflector voltage are regulated so that at any time their ratio is constant.

Values of output power which can be as low as 20% of the maximum respond to these regions of good stability. However, the power may be increased enough for laboratory purposes.

4. Experimental Tests

4.1. *Circuit*

By means of the circuit shown in Figure 5, a number of experiments have been conducted. By referring to curves obtained in these experiments, the correctness of the previous deductions has been verified.

The 50 c/s power-line voltage simultaneously modulates anode and reflector electrodes of the klystron tube by means of two transformers: T_3 and T_4 (Figure 5). A variable ratio transformer T_2 inserted on the primary of T_3 allows a continuous variation of the ratio between the secondary voltages of T_3 and T_4 . A phasing network compensates the phase shift in the transformer T_2 , much as in obtaining amplitude modulation, frequency modulation and frequency stability, a decrease of reflector voltage must correspond to an increase of anode voltage, the connections of the two transformers are such that the secondary voltages are 180° out of phase.

The klystron-output power, properly attenuated, is detected by a diode and the rectified voltage is applied through a switch to the vertical plates of a cathode-ray oscilloscope having a D.C. amplifier.

By means of a directional coupler, inserted before the attenuator, a part of the power is taken out and applied to a frequency meter. The anode voltage, through the above mentioned switch, can in turn be applied, after amplification, to the vertical plates of the oscilloscope.

The oscilloscope-sweep voltage is derived from the power line through a sensing network.

4.2. Measurements carried out

4.2.1. In order to obtain amplitude modulation, a curve of frequency Δf higher than the curve $\Delta f = 0$ of Figure 2, has been utilized in the region between the power curves $P = 50\%$ and $P = 100\%$.

By adjusting amplitude and phase of the sweep voltage it was possible to obtain nearly linear amplitude modulation.

The maximum frequency deviation was measured with a cavity wave-meter (Figure 5). It turned out to be about ± 1.3 Mc, corresponding to a percentage deviation of 1.3×10^{-4} .

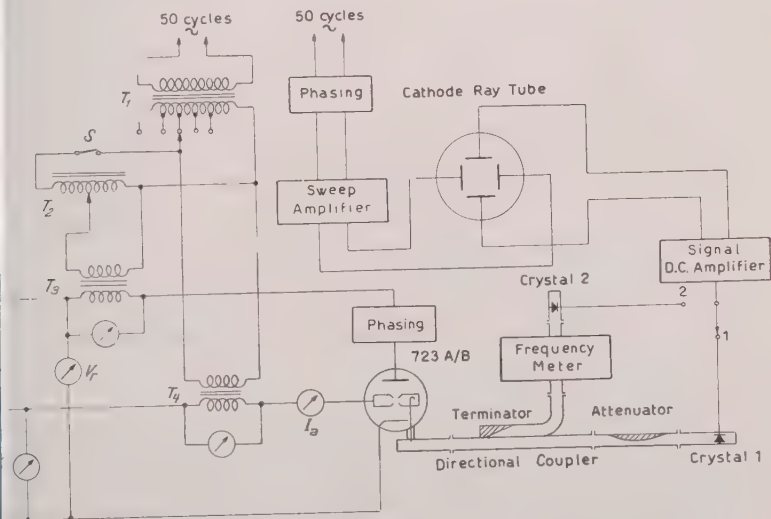


Figure 5

Circuit for measuring dynamic performance.

4.2.2. As previously stated, in the case of frequency modulation better results are obtained the further the point of operation is moved from the lower vertices of the constant power curves, towards the regions where they are straighter. It is therefore possible to obtain better performance by moving the point of operation into the region above 300 V. The circuit shown in Figure 5 is used to investigate how the tube works in the region above 300 V.

By means of the transformer inserted on the anode circuit, a 50-cycle voltage was superposed to the 300 V anode voltage. The 50-cycle voltage had

a peak value variable up to a maximum of 150 V. For various values of reflector voltage the crystal-1 response was observed at the oscilloscope. Thus it was possible to ascertain the behaviour of the tube in a broad region which had not been explored with static measurements not to damage the tube.

This investigation has verified the expected regularity of the curves extending above the 300 V ordinate.

By utilizing the mode of Figure 4, an anode voltage of 350 V and the left branch of the curve $P = 45\%$ (not included in the diagram), favourable conditions were found to obtain a sufficiently high and constant power together with very large frequency swing and fair linearity.

In this region it was possible to obtain a 40 Mc sweep with a constant output power $P = 45\%$ (about 13 mW). By accepting power variations of about 10% during the modulation period, and a slight loss in modulation linearity, it was possible to increase the bandwidth up to 60 Mc by increasing the modulation voltages applied to the two electrodes.

These large frequency swings can be very useful for measurement purposes, for instance to study the response curve of wide-band filters. Of course, with smaller frequency swings it is possible to obtain a better linearity by utilizing regions where the curve distribution is more uniform.

It would be possible to further extend the useful sweep width by means of a fast acting automatic volume control system. The error voltage obtained from the control circuit could be applied to the reflector electrode in such a manner that the output amplitude remains almost constant during the modulation cycle.

4.2.3. Finally, the expected operating point with optimum stability was observed. To this end, the mode of Figure 4 was used at the point $V_a = 250$, $V_r = 59$. In this point a branch of the curve $P = 35\%$ is parallel to the frequency curve $\Delta f = 15$. By means of transformers T_3 and T_4 , two sinusoidal voltages of peak values 10 V and 2.5 V were superimposed to anode voltage and reflector voltage respectively. The change of frequency with respect to the previous value was 0.5 Mc while the output power remained practically unchanged.

4.3. *Validity Limits of the Diagrams*

If the static anode voltage is changed to a higher value, the tube dissipates more energy. It is accordingly heated up and this, as pointed out at paragraph 4.1, changes the cavity dimensions and hence the frequency. However, if the voltage is modulated at audio frequency there is not enough time for the cavity to heat up and cool down during the audio cycle. Accordingly there is only an electron frequency change.

Measurements on the 2 K 22-klystron type show a remarkable thermal frequency sensitivity with anode voltage variations. The thermal anode sensitivity

of the same order or still larger than the reflector sensitivity, and the frequency shift is in the opposite direction than for fast voltage variations. The behaviour of the 723 A/B tube is much more normal and more predictable from electronic theory, but a small thermal effect will surely be present too. Therefore it should be kept in mind that from the static measurement of performance curves one cannot exactly predict dynamic behaviour under radio frequency modulation. For this it would be necessary to measure directly dynamic performance.

Of course these facts do not invalidate the measurements, because for slow changes they are perfectly right and for quick modulation they show at least the general features of the klystron characteristics. It is expected that the dynamic curves would be quite similar to the static ones except that their inclination would be changed.

It is important to notice that, simply by means of the circuit of Figure 5, it is possible to find out, by cut-and-try in various cases, the best conditions of operation. Then, the diagram would only give a first indication, and can be checked getting only few points on the curves. The exact condition of operation can be found in an easier way by reading the instruments inserted in the supply and modulation circuits.

5. Conclusion

By means of diagrams drawn out for the 723 A/B Reflex Klystron tube conditions of operation were found which proved to be of practical value.

By simply relating the anode and reflector voltages, so as to keep the ratio of their variations constant, it was possible to obtain sinusoidal amplitude modulation keeping the frequency practically constant. In a similar way it was possible to obtain frequency modulation keeping constant the output power, with large frequency swings. Finally, always by means of the diagrams, conditions of operation characterized by good stability were found.

The described modulation systems may prove to be of good utility, inasmuch as they give particular results unobtainable with the signal generators available up to date.

6. Acknowledgment

The work described in this paper was carried out at the E.T.H. Institut für Hochfrequenztechnik of Zurich, and the writer expresses his gratitude to Prof. TANK for his hospitality and encouragement during the course of the work. Thanks are also due to Dr. NEU, under whose direction the research was made, to Mr. GIGER for his help to establish the limit of the curves validity, and to Prof. BOELLA for his help in writing this account.

Zusammenfassung

Durch eine Reihe von Messungen an einem Reflexklystron wird die Abhängigkeit seiner Ausgangsleistung und Frequenz von den angelegten Gleichspannung untersucht und in Diagrammen dargestellt. An Hand dieser Diagramme wird gezeigt, dass durch gleichzeitige Modulation der Resonatorspannung und der Influktorspannung entweder reine Amplitudenmodulation oder reine Frequenzmodulation des Klystrons erreicht werden kann. Die wichtigste Anwendung besteht in der Modulation von Signalgeneratoren für Messzwecke.

(Received: July 14, 1953.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

Zur iterativen Auflösung algebraischer Gleichungen

VON HANS J. MAEHLI, Zürich¹⁾

Durch die Entwicklung schneller Rechenautomaten hat das klassische Problem der iterativen Berechnung der Nullstellen von Polynomen keineswegs an Bedeutung verloren; hingegen haben sich die Maßstäbe zur Beurteilung der Frage kommenden Näherungsformeln etwas verschoben: Einerseits können kompliziertere Formeln in Kauf genommen werden, andererseits aber soll die Konvergenz in jedem Falle gut sein, auch dann, wenn die Koeffizienten oder der Anfangswert vielleicht sehr ungünstig sind. Bekanntlich erfüllt die Newtonsche Formel diese Bedingungen nicht immer, vor allem nicht bei komplexen und mehrfachen Nullstellen²⁾. Eine weitere Schwierigkeit entsteht oft durch die Verschleppung von Rundungsfehlern, besonders bei Polynomen hohen Grades, worauf wir am Schluss nochmals zurückkommen.

Gegeben sei also ein Polynom n -ten Grades:

$$P(x) = \sum_{r=0}^n c_r x^r,$$

gesucht seine Wurzeln x_1, x_2, \dots, x_n , für welche

$$P(x) = c_n \prod_{k=1}^n (x - x_k).$$

Dabei können Koeffizienten und Wurzeln komplex sein.

Herleitung und Vergleich verschiedener Näherungsformeln zur Berechnung der x_k werden erleichtert, wenn wir als Hilfsfunktionen die logarithmischen Ableitungen von P einführen; wir setzen

$$-\frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d}{dx} \right)^m \log P = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x_k - x)^m} = s_m \quad (m = 1, 2, \dots).$$

¹⁾ Institut für angewandte Mathematik der ETH.

²⁾ Vergleiche hierzu zum Beispiel: E. F. MOORE, Math. Tables & Aids to Comp. 2, 486 (1949).

$$a_k = \frac{1}{P} \cdot \frac{d^k P}{dx^k} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= -a_1, \\ s_2 &= a_1^2 - a_2, \\ 2s_3 &= -2a_1^3 + 3a_1a_2 - a_3, \\ 6s_4 &= 6a_1^4 - 12a_1^2a_2 + 3a_2^2 + 4a_1a_3 - a_4. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

hiesslich führen wir – für ein fest gewähltes x – zur Abkürzung ein:

$$(x_k - x)^{-1} = u_k; \quad (6)$$

mit

$$s_m = \sum_{k=1}^n u_k^m. \quad (7)$$

Wir suchen nun Näherungsformeln, die von jedem x aus möglichst nahe an die Wurzel heranzuführen, und zwar am besten an die nächstgelegene. Wegen (7) bedeutet dies: Aus den ersten s_m soll eines der u_k , wenn möglich das absolut grösste, möglichst genau bestimmt werden.

Ist x von \bar{x} aus gesehen – eine einzige p -fache Nullstelle viel näher als alle übrigen, so gilt bei geeigneter Numerierung:

$$u_1 = u_2 = \dots = u_p, \quad |u_1| \gg |u_k| \text{ für } k > p. \quad (8)$$

Der erste Näherung ist also:

$$s_1 = p u_1, \quad s_2 = p u_1^2. \quad (9)$$

Mit $p = 1$ ergibt sich die Newtonsche Formel:

$$(x_1 - x)^{-1} = u_1 = s_1 = \frac{-P'}{P}. \quad (10)$$

Wenn man bei vorgegebenem p :

$$u_1 = \frac{s_1 - 1}{p} \quad (11)$$

schliesslich bei unbekanntem p :

$$u_1 = \frac{s_2 - 1}{s_1} \quad (12)$$

Genauere Formeln, welche allerdings die Auflösung einer quadratischen Gleichung erfordern, erhält man, wenn man sich die nächstgelegenen Wurzeln nicht als eine, sondern in zwei verschiedenen Punkten konzentriert denkt. Ist x eine q -fache, \bar{x} eine p -fache Wurzel, so wird

$$s_m = p u^m + q v^m \quad \text{mit} \quad u = (\bar{x} - x)^{-1}; \quad v = (\bar{x} - x)^{-1}. \quad (13)$$

und dabei p und q gegeben, so ergibt sich leicht²⁾:

$$u = \frac{p s_1 \pm \sqrt{p q [(p + q) s_2 - s_1^2]}}{p(p + q)}. \quad (14)$$

¹⁾ Diese beiden Formeln finden sich schon bei E. SCHRODER, Math. Ann. 2, 317 (1870).

²⁾ Vgl. E. BOHME, Proc. Acad. Sci. Amsterdam 49, 911 (1946), und J. G. VAN DER CORP, Proc. Acad. Sci. Amsterdam 49, 922 (1946).

Mit $p = 1$, $q = n - 1$ erhält man die Laguerresche Formel¹⁾:

$$u = \frac{1}{n} (s_1 + 1) \left[(n-1) (s_2 - s_1) + 1 \right]. \quad (12)$$

Ist nur die Summe $s_0 = p + q$ bekannt, nicht aber p und q einzeln, so ergibt sich für u die quadratische Gleichung:

$$u^2 (s_0 s_2 - s_1^2) - u (s_0 s_3 - s_1 s_2) + (s_1 s_3 - s_2^2) = 0. \quad (13)$$

Lässt man auch $p + q$ frei, so erhält man ganz analog:

$$u^2 (s_1 s_3 - s_2^2) - u (s_1 s_4 - s_2 s_3) + (s_2 s_4 - s_3^2) = 0. \quad (14)$$

Die letzten vier Gleichungen für u haben jeweils zwei Lösungen; da wir jeweils die nächstgelegene Wurzel suchen, ist das Wurzelvorzeichen stets so zu wählen, dass man das absolut grössere u erhält.

Aus unserer obigen Herleitung ergibt sich, dass die Laguerresche Formel auch zur Berechnung komplexer Nullstellen geeignet ist. Bei Polynomen mit reellen Koeffizienten hat sie den grossen Vorzug, die reelle Achse von selbst, aber eben dann zu verlassen, wenn der Einfluss eines komplexen Wurzelpaars überwiegt. Die Folge sukzessiver Näherungen konvergiert bei Verwendung der Laguerreschen Formel (auch im Komplexen) kubisch gegen einfache, aber nur linear gegen mehrfache Wurzeln²⁾. Analog führt Gleichung (14) nur für genau p -fache Wurzeln zu kubischer Konvergenz. Dagegen ist die Konvergenz mit (16) stets kubisch, mit (17) sogar immer von vierter Ordnung, ohne dass die eventuelle Vielfachheit der Wurzel bekannt zu sein braucht. Nach unserer Herleitung ist zu vermuten, dass (17) noch etwas bessere Konvergenz ergibt als (16), und in den wenigsten bisher gerechneten Beispielen hat sich dies bestätigt. Ob und wann sich aber ein erheblicher Mehraufwand für die Berechnung von s_4 lohnt, kann hier noch nicht entschieden werden.

Nach Bestimmung einer Nullstelle x_k pflegt man das Polynom $P(x)$ durch $(x - x_k)$ zu dividieren, einerseits um den Grad des Polynoms zu erniedrigen, andererseits die folgende Rechnung zu vereinfachen, andererseits um eine nochmalige Berechnung von x_k zu verhindern. Dies führt aber oft zu gefährlichen Rundungsfehlern. Bei schnellen Maschinen, wo die Ersparnis an Rechenaufwand weniger ins Gewicht fällt, ist daher eher folgendes Verfahren zu empfehlen:

Kennt man Näherungen $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_l$ für l Nullstellen x_1, \dots, x_l und sucht man die restlichen Wurzeln x_{l+1}, \dots, x_n , so ersetze man alle s_m durch

$$s'_m = s_m - \sum_{k=1}^l (\bar{x}_k - x)^{-m}. \quad (15)$$

Im Gegensatz zum üblichen Divisionsverfahren haben dann die Ungenauigkeiten $\bar{x}_k - x_k$ praktisch keinen Einfluss auf die iterierten Werte und gar keinen auf den Grenzwert, solange $|x - x_k| \gg |\bar{x}_k - x_k|$. Ist diese letztere Bedingung nicht erfüllt, so kann die Folge allerdings gegen ein x_k oder eventuell gegen ein x_k mit $k < l$ konvergieren.

Theoretische Untersuchungen über die hier vorgeschlagenen Iterationsverfahren sowie numerische Versuche sind im Gange, und eine ausführliche Arbeit hierüber ist vorgesehen.

¹⁾ E. N. LAGUERRE, Nouv. Ann. Math. [2^e s.] 19 (1880), oder Œuvres de Laguerre, Bd. I, S. 103.

²⁾ Vgl. E. BODEWIG und J. G. VAN DER CORPUT, a. a. O.

Summary

The slow convergence of NEWTON's method for the iterative approximation of the roots of an algebraic equation may be improved by using a formula due to QUERRE. It is shown that this formula together with certain generalizations is useful for the numerical calculation of both real and complex zeros. A method is also given for the calculation of a further root of an equation after several roots have already been found, such that errors on the determination of the previous roots will not affect the accuracy with which the present one may be approximated.

Eingegangen: 21. Januar 1954.)

Aerodynamische Kräfte auf schlanke Rotationskörper¹⁾

VON HANS R. VOELLMY, Zürich²⁾

Zur Berechnung der Kräfte auf schlanke drehsymmetrische Körper, insbesondere zur Bestimmung der Querkraft, steht heute eine recht umfangreiche Literatur zur Verfügung. Seltener aber findet man Veröffentlichungen über Messergebnisse und Vergleiche mit theoretischen Berechnungen.

Im Verlaufe vieler routinemässig durchgeführter Windkanalmessungen wurde dem Verfasser auf beträchtliche Differenzen der erhaltenen Messresultate mit den liegenden potentialtheoretischen Berechnungen aufmerksam. Eine spezielle Untersuchungsserie, welche im Institut für Aerodynamik der ETH, unter Leitung von Herrn Prof. Dr. J. ACKERET durchgeführt wurde, sollte den Anwendungsbereich jenseits der einfachen Theorien aufzeigen.

1. Elementare Theorie

Die Normalkraft N , welche auf einen zur Strömungsrichtung mit dem kleinen Winkel α angestellten schlanken Rotationskörper wirkt, wurde seinerzeit schon (MUNK 1)³⁾ angegeben und seither von JONES 2) und ACKERET 3) wieder genommen. Die hier getrennte Betrachtung von benachbarten Schnittebenen senkrecht zur Rotationsachse stellt eine noch stärkere Vereinfachung der tatsächlichen Strömungsvorgänge dar, als dies mittels der Linearisierung der räumlichen Potentialströmung nach den Methoden von von KÁRMÁN und MOORE 4), ACKERET 5) und TSIEN 6) möglich ist. Dabei zeigt sich, dass nach dieser *Querschnittstheorie* die Normalkraftverteilung unabhängig von der Mach-Zahl wird und von der Änderung des Querschnittes F mit der Länge x des Körpers abhängt:

$$\frac{dN}{dx} \sim \frac{dF}{dx}$$

Wenn man über die Länge des Körpers integriert, so erhält man das erstaunlich einfache Resultat, dass die Normalkraft zur Bodenfläche F_h proportional ist:

$$N = \sin 2\alpha \cdot \frac{\rho}{2} V^2 F_h.$$

¹⁾ Vorgetragen am Astronautischen Kongress 1953 in Zürich, zufolge Abwesenheit des Verfassers durch Herrn B. CHAIX, Institut für Aerodynamik der ETH.

²⁾ Werkzeugmaschinenfabrik Oerlikon, Buhrle & Cie., und Institut für Aerodynamik der ETH.

³⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 269.

Ebenso ergibt sich für das Längsmoment H eine physikalisch anschauliche Grösse

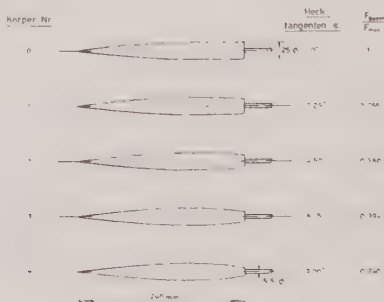
$$M = \sin 2\alpha \cdot \frac{\rho}{2} V^2 (G - F_h s),$$

indem G das Volumen des Körpers und s den Abstand des Momentenpunktes von der Bodenfläche bedeuten.

Die Versuche haben die Gültigkeit dieser einfachen Formeln für *kleine Anstellwinkel* und Körper mit *schwach konvergierendem Heckteil* bewiesen.

2. Modelle und Messeinrichtung

Um den Einfluss der Grösse der Bodenfläche auf die Normalkraft zu untersuchen, wurden fünf Versuchskörper im hinteren Drittel der Länge verschieden stark verjüngt (Figur 1).



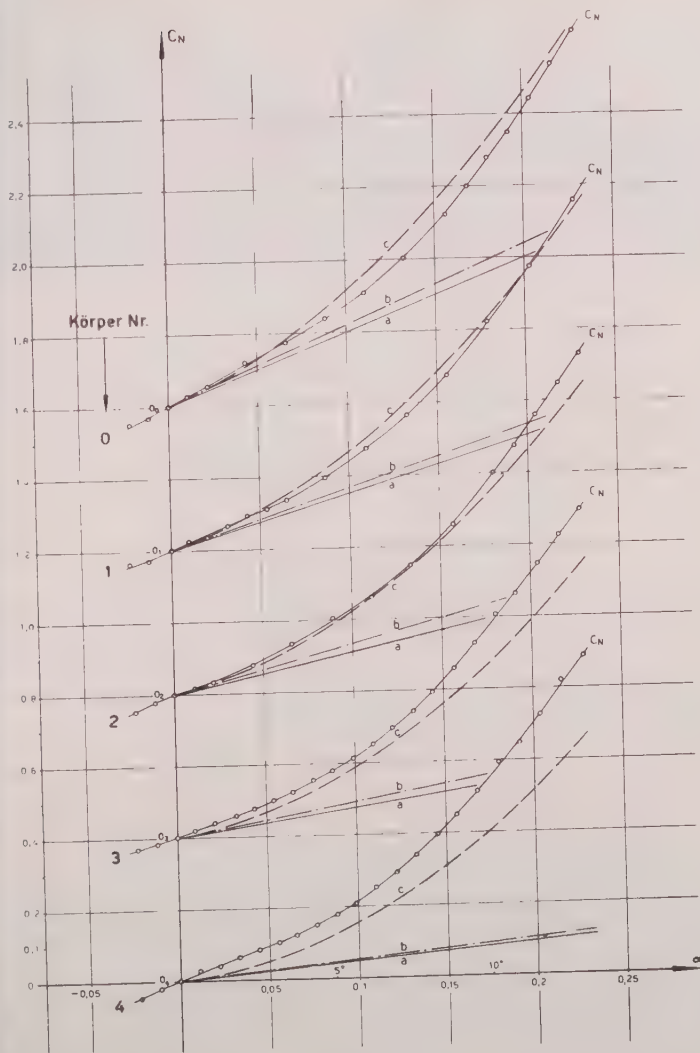
Figur 1

Meridianschnitt der fünf Versuchskörper mit verschieden grossen Bodenflächen. Die elektrische Drei-Komponenten-Waage sitzt im Innern des Modells.

Die Messung der Kräfte geschieht mittels einer *im Modell eingebauten elektrischen Waage* (strain-gage), welche auf einer Stütze von veränderlichem Anstellwinkel sitzt. An einer Philips-Messbrücke werden die Resultate abgelesen und in einem von der Firma Contraves AG., Zürich, entwickelten elektronischen Analogierechner [7] ausgewertet.

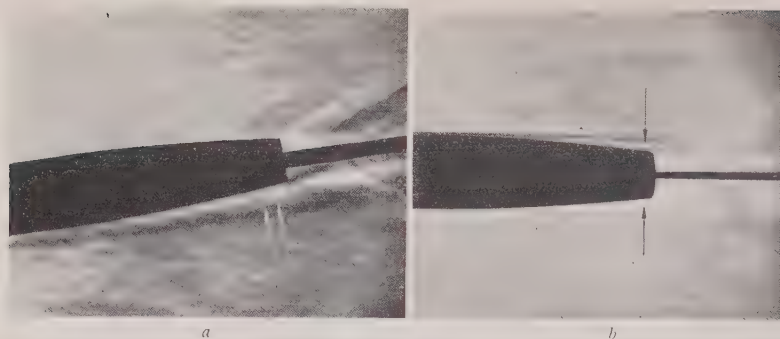
3. Messergebnisse bei grossen Anstellwinkeln

Wie Figur 2 deutlich zeigt, übersteigt die gemessene Normalkraft stark die aus der elementaren Theorie (Kurve *a*) oder auch aus der linearisierten Potentialtheorie (Kurve *b*) berechneten Werte bei grossen Anstellwinkeln. Das *quadratische Verhalten der Normalkraft* über dem Anstellwinkel kann nur durch die Betrachtung der Einflüsse der Zähigkeit der Luft auf die Strömungsvorgänge erklärt werden, worauf BETZ [8] erstmals hingewiesen hat. Ähnlich der Queranströmung eines Zylinders entsteht durch die Queranströmung des Rotationskörpers auf der Abströmseite, im Querschnitt betrachtet, ein *Wirbelpaar*. Die gleichzeitige Längsanströmung verhindert aber die Ausbildung einer Kármánschen Wirbelstrasse, indem die Wirbel in der dritten Dimension wegschwimmen können. In den beiden



Figur 2

Vergleich der gemessenen Normalkraftbeiwerte C_N für die fünf Körper bei $M = 1,38$, $Re_L = 1,2 \cdot 10^6$
 mit: a Elementartheorie von Munk (Q -Theorie); b linearisierter Theorie; c Elementartheorie und
 nichtpotentieller Normalkraft.



Figur 3

Schlierenaufnahme der Wirbelzöpfe auf der Abströmseite des Körpers (Pfeile), eine Folge der durch die Potentialtheorie nicht erfassten Zähigkeit der Luft. Körper Nr. 3, $M = 1,66$, $Re_L = 1,2 \cdot 10^6$, $\alpha = 10^\circ$. *a* 10° -Anstellwinkel in der Bildebene; *b* 10° -Anstellwinkel senkrecht zur Bildebene.

in zwei Projektionen aufgenommenen Schlierenbildern zeichnen sich diese Wirbelzöpfe als starke Helligkeitsveränderungen deutlich ab (Figur 3).

Die durch die Wirbel hervorgerufene Querkraft pro Einheitslänge in Abströmrichtung ist:

$$\frac{dW}{dx} = C_w \frac{\rho}{2} (V \sin \alpha)^2 D \sim \alpha^2.$$

Mit dem konstanten Widerstandskoeffizienten $C_w = 1,2$ (unterkritisch angegeben für einen Kreiszylinder) berechnet, ergibt sich der in Figur 4, Kurve *c*, abgebildete Verlauf der Normalkraft pro Querschnitt des Körpers. Die resultierende Kraft wird also durch den Schwerpunkt der Meridianflächen bestimmt. Da dieser Schwerpunkt im allgemeinen nahe beim Massenschwerpunkt des Körpers liegt, wird das Drehmoment, welches die Stabilität des Körpers beeinflusst, durch die nichtpotentiellen Kräfte kaum verändert.



Figur 4

Normalkraftverteilung entlang der Körperachse für Körper Nr. 2 bei $\sin \alpha = 0,2$, nach: *a* Querschnittstheorie; *b* linearisierter Theorie, $M = 1,38$; *c* nichtpotentieller Normalkraft aus Querschnittstheorie. $C_{w, quer} = 1,2$.

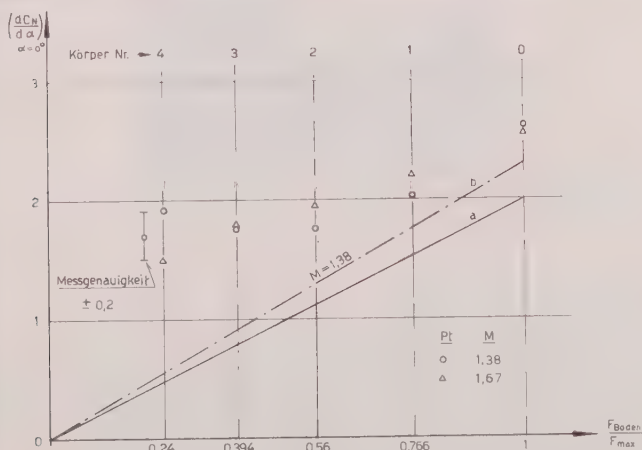
Aus diesem Grund ist die Abschätzung der Längsstabilität eines schlanken Stabes mittels der linearisierten Potentialtheorie (Kurve *b*) oder sogar mit der einfachen Querschnittstheorie (Kurve *a*) erstaunlich genau.

Der Vergleich der von den Kurven eingeschlossenen Flächen hingegen zeigt starken Einfluss der durch die Zähigkeit hervorgerufenen *Normalkräfte*, die die von der Potentialtheorie erfassten Kräfte übersteigen können.

Nach ALLEN [9], VAN DYKE [14] und FLAX und LAWRENCE [11] addiert man nichtpotentielle zur potentiellen Normalkraft und erhält so die Kurven *c* in Fig. 2, welche nun das quadratische Verhalten der experimentellen Kurven besser wiedergeben.

4. Messergebnisse bei kleinen Anstellwinkeln

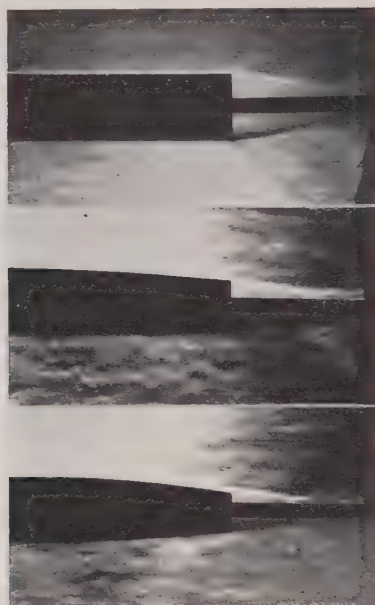
Bei kleinen Anstellwinkeln möchte man erwarten, dass die potentialtheoretisch berechneten Normalkräfte gut mit den Messungen übereinstimmen, da das quadratische Glied seine Wirkung verliert. Schon ein Blick auf Figur 2 zeigt aber, dass besonders bei den sich *stark verjüngenden Körpern* die *Tangenten* der Normalkraftkurven im Anstellwinkel-Nullpunkt wenig mit den



Figur 5

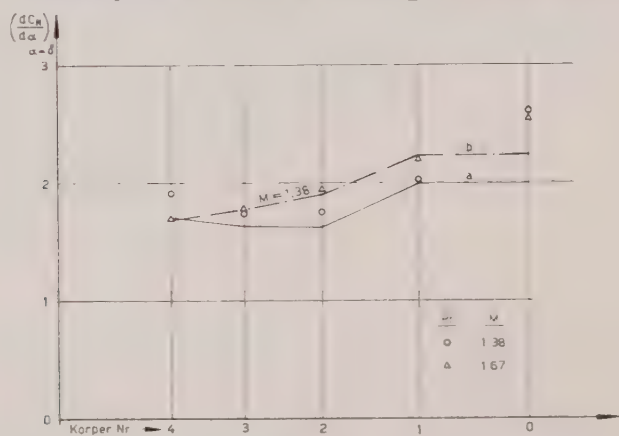
Vergleich der gemessenen Querkraftgradienten $dC_N/d\alpha$ bei $\alpha = 0^\circ$ mit: *a* Q-Theorie; *b* linearisierter Theorie.

ungen der theoretischen Kurven übereinstimmen. In Figur 5 sind diese Normalkraftgradienten über der Bodenfläche aufgetragen, um die Abweichung der Messungen gegenüber der durch eine Gerade dargestellten Querschnittstheorie (Kurve *a*) oder der linearisierten Theorie (Kurve *b*) besser überblicken zu können. Die Verdrängungsdicke der Grenzschicht wird gegen das Körperende hin so grösser, je stärker sich der Körper nach hinten verjüngt. Dies zeigt Figur 6 deutlich, wo die Grenzschicht als weißer Streifen auf der oberen Seite der Körper sichtbar ist. Die Berechnung der Druckverteilung entlang der verschiedenen Körper zeigt das starke Anwachsen des Druckes gegen das Körperende hin,



Figur 6

Wachsende Grenzschichtdicke bei zunehmender Konvergenz des Heckteils. Schlierenaufnahmen der Körper Nr. 0, 2 und 4 bei $M = 1,38$, $Re_L = 1,2 \cdot 10^6$, $\alpha = 0$



Figur 7

Vergleich der gemessenen Querkraftgradienten mit den bis zum Punkt minimalen Druckes integrierten Querkraften nach: a Q-Theorie; b linearisierter Theorie.

aus mit der rein geometrischen Verkleinerung des Körperrumfanges zusammen starke Anwachsen der Grenzschicht hervorgeht.

In ganz schematischer Weise wird nun angenommen, dass die Strömung innerhalb der Grenzschicht vom Querschnitt des tiefsten Druckes an infolge der stark anwachsenden Grenzschichtdicke nicht weiter gegen die Achse konvergiere. An Stelle der Bodenfläche werde also der *Querschnitt minimalen Druckes* in die Rechnung gesetzt. Figur 7 zeigt, dass nach dieser einfachen *Hypothese* die experimentellen Werte bedeutend besser erreicht werden.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass es wichtiger ist, die Einflüsse der *Viskosität der Luft* bei der Berechnung der Kräfte auf schlanke Rotationskörper zu schätzen, als die potentialtheoretischen Rechenmethoden weiter zu verbessern.

LITERATURVERZEICHNIS

- M. M. MUNK, Nat. Advis. Comm. Aeron. Rep. No. 184 (1924).
 R. T. JONES, Nat. Advis. Comm. Aeron. T. N. No. 1032 (1946).
 J. ACKERET, Helv. phys. Acta 22, 127–134 (1949).
 TH. VON KÁRMÁN und N. MOORE, Trans. Amer. Soc. mech. Eng. 54, 303–310 (1932).
 C. FERRARI, Aerotechnica 17, 507–518 (1937).
 H. S. TSIEN, J. aeron. Sci. 5, 480–483 (1938).
 H. R. VOELLMY, ZAMP 3, 394–395 (1952).
 A. BETZ, Aerodynamic Theory (W. F. Durand, Berlin 1934–36), Bd. 4, S. 69–72.
 H. J. ALLEN, Nat. Advis. Comm. Aeron. T. N. 2044 (1950).
 M. D. VAN DYKE, J. aeron. Sci. 18, 161–178 (1951).
 A. H. FLAX und H. R. LAWRENCE, Proc. 3rd Anglo-American. Aeron. Conf. 1951, 363–398.

Summary

Comparison between measurements of the normal force of five *slender* bodies in revolution with different base areas in supersonic flow and the simple airship-like theory of MUNK or the more accurate linearised theory of *potential flow* show considerable discrepancy not only at large, but also at small angles of attack. To get better agreement with the experimental results, it is shown to be more important to estimate the *effects of viscosity* than to consider higher orders of potential flow theory.

(Eingegangen: 5. Februar 1954.)

Abklingen eines schwachen Dralls in der Längsströmung zwischen koaxialen Kreiszylindern

Von HERMANN WUNDT, Freiburg i. Br.¹⁾

L. COLLATZ und H. GÖRTLER haben neuerdings²⁾ die laminare Strömung mit schwachem Drall durch ein ruhendes gerades Kreisrohr rechnerisch behandelt. Nach Linearisierung der Bewegungsgleichungen bezüglich der Drallstörgrösse wird man auf ein Eigenwertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung geführt. Die Grössenordnung der Eigenwerte gibt den Aufschluss über das Abklingen des anfänglichen Dralls in Stromrichtung.

Diese Betrachtungen sollen hier auf eine Längsströmung zwischen koaxialen Kreiszylindern verallgemeinert werden. Den Drall mag man sich dabei etwa durch ein im ruhenden Rohr angebrachtes geeignetes Leitwerk erzeugt denken: der innere Zylinder kann als feste Nabe ausgebildet sein. In den technisch interessierenden Fällen wird diese Strömung freilich selten laminar sein. Die das Abklingen des Dralls messenden Eigenwerte werden von der Weite des ringförmigen Spalts abhängig sein; man erwartet für enge Spalte ein rascheres Abklingen, heisst absolut grössere Eigenwerte.

Wegen der Herleitung des Eigenwertproblems sei auf die genannte Arbeit von COLLATZ und GÖRTLER verwiesen (fortan zitiert als [1]). Mit den dortigen Bezeichnungen seien $q = x/r_0 Re^3$ die axiale, $s = r/r_0$ die radiale dimensionslose Koordinate des der Strömung angepassten Zylinderkoordinatensystems, s_0 sei der Radius des inneren Zylinders, $s = 1$ der Radius des äusseren Zylinders, so dass b das Radienverhältnis bedeutet. Betrachtet werden Fälle von $b < 1$ (kein innerer Zylinder) bis $b = 1$ (Rohr verstopft). Das s -Intervall ist $b \leq s \leq 1$.

$u(s)$ sei die Komponente der Strömungsgeschwindigkeit in q -Richtung, während $w(q, s)$ die tangentielle Geschwindigkeitskomponente, also den Drall, bezeichne. Für diesen Drall wird der Separationsansatz

$$w(q, s) = e^{-\lambda q} G(s)$$

gemacht, welcher auf das untenstehende Eigenwertproblem (1) für die Funktion $G(s)$ führt. Der Separationsparameter λ tritt als Eigenwertparameter in die Gleichung für $G(s)$ ein. Er ist gegenüber [1] mit umgekehrtem Vorzeichen definiert, da dann positive Eigenwerte zu erwarten sind.

Damit lautet das gleich in selbstadjungierter Form geschriebene Eigenwertproblem:

$$L[G] = -(sG')' + \frac{1}{s} G = \lambda s f(s) G$$

mit den aus der Haftbedingung am inneren und am äusseren Zylinder herrührenden Randwerten $G(b) = G(1) = 0$.

Der wesentliche Unterschied zum in [1] aufgestellten Eigenwertproblem steht in der veränderten Funktion $f(s)$, die die axiale Geschwindigkeitsverteilung

¹⁾ Mathematisches Institut der Universität, Abteilung Angewandte Mathematik.

²⁾ L. COLLATZ und H. GÖRTLER, *Rohrströmung mit schwachem Drall*, ZAMP 5, 95 (1954).

³⁾ Über die Definition der hier verwendeten Reynoldsschen Zahl Re siehe unten nach Formel (1).

weitem Abstand vom Einlauf darstellt. Ohne inneren Zylinder ($b = 0$) war diese

$$\frac{u^*(s)}{U_0} = f^*(s) = 1 - s^2,$$

bekannte Poiseuille-Strömung (U_0 die Maximalgeschwindigkeit in der Rohrse), jetzt hingegen, nach Hinzutreten der weiteren Randbedingung $u(b) = 0$, lautet sie

$$\frac{u(s)}{U_0} = f(s) = 1 - s^2 - A \ln s \quad (2)$$

der vom Radienverhältnis b abhängigen Konstanten

$$A(b) = \frac{1 - b^2}{\ln b}. \quad (3)$$

Wir wollen hierbei für alle Spaltweiten b stets dasselbe konstante Druckgefälle dp/dx zugrunde legen. Damit lässt sich eine von b unabhängige Bezugsgeschwindigkeit

$$U_0 = - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{r_0^2}{4\mu}$$

definiert (die konstante Zähigkeit) definieren; sie ist mit der bei [1] im Falle $b = 0$ verwendeten Bezugsgeschwindigkeit identisch. Die so zu bildende Reynoldssche Zahl

$$Re = \frac{U_0 r_0 \varrho}{\mu} = - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{r_0^3 \varrho}{4\mu^2}$$

ist ebenfalls von b unabhängig.

$f(s)$ ist eine exakte Lösung der vollen Navier-Stokesschen Gleichungen. Die berechnenden Eigenwerte λ_i werden nun natürlich von b abhängen: $\lambda_i = \lambda_i(b)$, und gerade diese Abhängigkeit (etwa bei unverändertem Druckgefälle) besitzt Verallgemeinerung gegenüber [1] das Hauptinteresse.

Die Theorie der Eigenwertaufgabe (Existenz von Eigenwerten und Eigenfunktionen, Entwicklungssatz) ist fast wörtlich aus [1] übertragbar. Erhöhte Ansprüche fordert lediglich der Umstand, dass $f(s)$ nunmehr an *beiden* Rändern verschwindet. An die nach Eigenfunktionen G_i entwickelbaren Funktionen $h(s)$ muss daher ausser den in [1] genannten Bedingungen noch die Forderung $h(s)|_{s=b} = 0$ gestellt werden (für $s = 0$ war dies von selbst sichergestellt), damit

$$k^*(s) = \frac{L[h(s)]}{\sqrt{s} f(s)}$$

im Intervall $(b, 1)$ quadratisch integrierbar ist. Alle übrigen Aussagen bleiben erhalten; insbesondere sind die Eigenwerte λ_i sämtlich positiv.

Während demnach die Theorie der erweiterten Aufgabe nur eine geringfügige Verschärfung der Voraussetzungen notwendig macht, stellen sich der numerischen Berechnung der Eigenwerte und -funktionen beträchtliche Hindernisse in den Weg.

Um über die Abhängigkeit der λ_i von b und über ihre Grössenordnung Anhaltspunkte zu gewinnen, wird zunächst ein Vergleichsproblem herangezogen. Wir setzen $f(s)$ durch $g(s) \equiv 1$. Dann gilt $g(s) \geq f(s)$ überall im Intervall $(b, 1)$. Das Vergleichsproblem lautet in selbstadjungierter Form

$$-(s \bar{G}')' + \frac{1}{s} \bar{G} = \kappa s \bar{G}, \quad G(b) = \bar{G}(1) = 0. \quad (4)$$

Die allgemeine Lösung hiervon ist $Z_1(\sqrt{\kappa} s)$, eine Zylinderfunktion erster Ordnung, die den Forderungen $Z_1(b\sqrt{\kappa}) = Z_1(\sqrt{\kappa}) = 0$ zu genügen hat. Da für Eigenfunktionen ein Faktor frei bleiben kann, so lautet diese Forderung:

$$J_1(\sqrt{\kappa}) + A_b N_1(\sqrt{\kappa}) = 0 \quad \text{und} \quad J_1(b\sqrt{\kappa}) + A_b N_1(b\sqrt{\kappa}) = 0.$$

Zwecks Eliminierung von A_b multiplizieren wir die erste Gleichung mit $N_1(b\sqrt{\kappa})$ die zweite mit $N_1(\sqrt{\kappa})$, und subtrahieren sie von der ersten. Dann folgt

$$J_1(\sqrt{\kappa}) N_1(b\sqrt{\kappa}) - J_1(b\sqrt{\kappa}) N_1(\sqrt{\kappa}) = 0,$$

eine viel untersuchte transzendente Gleichung. Man findet ihre Wurzeln für verschiedene Werte von b , etwa bei JAHNKE-EMDE¹⁾.

Mit diesen Werten ergibt sich die folgende Tabelle der Eigenwerte κ_i in Abhängigkeit von b :

b	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5	κ_6
0	14,682	49,219	103,50	177,52	271,28	384,7
1/2	40,883	159,386	359,27	633,15	988,46	1422,7
2/3	89,927	356,424	800,56	1422,35	2221,79	3198,8
5/6	356,198	1422,127	3198,65	5685,79	8883,55	12791,9
1	Für $b \rightarrow 1$ wachsen die κ_i über alle Grenzen.					

Wegen $g(s) \geq f(s)$ gilt nun $\kappa_i \leq \lambda_i$. Wir haben damit (grobe) untere Schranken für die $\lambda_i(b)$. Dass sie sehr grob sind, sieht man schon aus dem Vergleich der Zeile $b = 0$ mit den bei [1] berechneten Werten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Aus der Theorie der Gleichung (6) folgt, dass die $\kappa_i(b)$ in $0 \leq b \leq 1$ monoton von einem Anfangswert nach $+\infty$ steigende Funktionen sind. Dasselbe gilt auch für die $\lambda_i(b)$, wie in Fußnote 1, S. 274, gezeigt werden wird. Das heisst: je enger der Spalt zwischen den koaxialen Zylindern ist, desto rascher klingt der Drall stromabwärts ab; bei $b = 1$ (Spalt zu) kann natürlich nichts mehr fließen.

Zur eigentlichen Berechnung der Eigenwerte bieten sich im wesentlichen vier Wege:

1. Differenzenverfahren mit Versuchseigenwerten, die so lange systematisch variiert werden, bis der zweite Randwert mit gewünschter Genauigkeit erreicht ist; Eigenfunktion und Eigenwert sind dann richtig getroffen;
2. numerische Integration (etwa Runge-Kutta-Methode) mit demselben Problem für die Eigenwerte;
3. Reihenentwicklungen um den einen Randpunkt;
4. Verfahren der schrittweisen Näherungen.

Die Methoden 1 und 2, die man im allgemeinen nur zur Berechnung der Eigenfunktionen, selten zur Bestimmung der Eigenwerte anwendet, scheiden aus, das Problem noch den Parameter b enthält. Man müsste für jeden Parameterwert b alle Rechnungen gesondert durchführen, was einen unangemessenen Arbeitsaufwand bedeuten würde.

Methode 3, die sich für den Fall $b = 0$ sehr bewährt, versagt auch, weil die Funktion $f(s)$ nun einen Logarithmus enthält. Die übersichtliche Rekursion

¹⁾ E. JAHNKE und F. EMDE, *Tafeln höherer Funktionen*, 1. Aufl. (Teubner, Leipzig 1948), S. 29.

el für die Koeffizienten der Potenzreihe

$$G(s) = \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_v s^{v+1}$$

verloren, weil man mit der Logarithmusreihe auszumultiplizieren hat. Zu-
ist der günstige Entwicklungspunkt $s = 0$ nach ausserhalb des Intervalls
ekt.

Es bleibt daher nur Methode 4, das Verfahren der schrittweisen Näherungen,
es bekanntlich leider nur den ersten Eigenwert mit erträglichem Aufwand
rt. Gerade der kleinste Eigenwert λ_1 ist jedoch in erster Linie interessant, da
hinreichend weit stromabwärts allein noch die Drallverteilung bestimmt.
Innoch kann man sich über die Grössenordnung des zweiten Eigenwertes ein
machen; siehe unten).

Zum Vergleich mit [1] wird der Rechengang grob skizziert: Um nicht für
Wahl von b getrennte Rechnungen durchführen zu müssen, wird von einer
igen Funktion F_0 ausgegangen, die die Randbedingungen erfüllt und den
parameter b explizit enthält. Dieser Parameter wird durch alle Operationen ohne
zialisierung mitgeschleppt. Da der Logarithmus im Verlauf der Rechnung
edies auftritt [wegen $f(s)$], bietet sich natürlich $f(s)$ selbst als erste Vergleichs-
ktion F_0 an; es erfüllt beide Randbedingungen.

Bezeichnet $N[F]$ die rechte Seite des Eigenwertproblems (1), so berechnet man
tere Vergleichsfunktionen F_1, F_2, \dots aus den Randwertproblemen

$$L[F_{v+1}] = N[F_v].$$

man erhält so

$$\left. \begin{aligned} &= 1 - s^2 - A \ln s, \\ &= -\frac{1}{35} s^6 + \frac{2}{15} s^4 - \frac{1}{3} s^2 + A^2 s^2 \left(-\frac{1}{3} \ln^2 s + \frac{8}{9} \ln s - \frac{26}{27} \right) \\ &\quad + A \left[s^4 \left(-\frac{4}{15} \ln s + \frac{16}{225} \right) + s^2 \left(\frac{2}{3} \ln s - \frac{8}{9} \right) \right] + C_1 s + C_2 \frac{1}{s} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} &= \frac{1}{1-b^2} \left[\frac{26}{27} A^2 (1-b^3) + \frac{184}{225} A (1-b^5) + \frac{8}{35} (1-b^7) \right], \\ &= -\frac{b^2}{1-b^2} \left[\frac{26}{27} A^2 (1-b) + \frac{184}{225} A (1-b^3) + \frac{8}{35} (1-b^5) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Formel für die Funktion F_2 würde bereits eine sehr beträchtliche Länge an-
nehmen.

Daraus werden die Schwarzschen Konstanten

$$a_0 = \int_b^1 s f(s) F_0^2(s) ds; \quad a_1 = \int_b^1 s f(s) F_0(s) F_1(s) ds; \quad a_2 = \int_b^1 s f(s) F_1^2(s) ds \quad (9)$$

und die Schwarzschen Quotienten $\mu_1 = a_0/a_1$ und $\mu_2 = a_1/a_2$ berechnet. Sowohl
Schwarzschen Konstanten als auch die Quotienten enthalten den Parameter b ,
er im Integranden und in der unteren Integralgrenze steckt. Nun schrumpft
er $b \rightarrow 1$ nicht nur die Intervalllänge auf 0 zusammen, sondern auch der Betrag

des Integranden wird rasch klein. Daher gehen die a_i für $b \rightarrow 1$ sehr stark gegen 0. Die μ_i , deren Folge von oben gegen den ersten Eigenwert λ_1 konvergiert, nähern sich dadurch für wachsendes b immer mehr der Form $0/0$, worunter die erzielte Rechengenauigkeit stark leidet.

Um mit Hilfe von $\mu_1(b)$ und $\mu_2(b)$ schliesslich $\lambda_1(b)$ in Grenzen einschliessen können, benötigt man noch eine untere Schranke $l_2(b)$ von $\lambda_2(b)$. Unter der durch Überschlagsrechnungen kontrollierbaren Annahme, dass $\lambda_2(b)$ für wachsendes b jedenfalls nicht schwächer wächst als $\lambda_1(b)$, bildet

$$l_2(b) = \frac{\lambda_2(0)}{\lambda_1(0)} \cdot \lambda_1(b)$$

eine verwendbare, wenn auch vielleicht noch sehr grobe untere Schranke für $\lambda_1(b)$. Die Schranken aus dem Vergleichsproblem von oben genügen nicht, da sie die Forderung $l_2 > \mu_2$ nicht erfüllen, das heisst viel zu schlecht sind. Die sogenannte Hauptformel

$$\mu_2 - \frac{\mu_1 - \mu_2}{(l_2/\mu_2) - 1} \leq \lambda_1 \leq \mu_2 \quad (1)$$

liefert sodann die in der Tabelle wiedergegebenen Werte für $\lambda_1(b)^1$.

Zu Vergleichszwecken werden hier auch noch folgende Grössen mit angegeben:

1. Die Strecke, auf der der Drall zu einem vorgebbaren Bruchteil seines anfänglichen Betrages abgeklungen ist, im Verhältnis zu der Strecke, auf der das Abklingen zum selben Bruchteil ohne inneren Zylinder erfolgt. Dieses Verhältnis $d(b)$ veranschaulicht also, um wieviel schneller das Abklingen des Dralls bei abnehmender Spaltweite erfolgt²).

$$d(b) = \frac{\lambda_1(0)}{\lambda_1(b)}.$$

2. Die Durchflussmenge $Q(b)$ im Verhältnis zur Durchflussmenge $Q(0)$ bei Fehlen des inneren Zylinders.

$$Q(b) = \frac{\pi}{2} r_0^2 U_0 \left(1 - b^4 + \frac{(1 - b^2)^2}{\ln b} \right).$$

3. Die noch erreichte Maximalgeschwindigkeit $u_{max}(b)$ im Verhältnis zur Maximalgeschwindigkeit $u_{max}(0) = U_0$ ohne inneren Zylinder.

$$\frac{u_{max}(b)}{U_0} = 1 + A \left(\frac{1}{2} - \ln \sqrt{\frac{-A}{2}} \right).$$

4. Die Abszisse $s_L(b)$, auf der die Maximalgeschwindigkeit $u_{max}(b)$ angenommen wird.

$$s_L(b) = \sqrt{\frac{-A}{2}}.$$

5. Die Abszisse $s_D(b)$, auf der das Maximum der asymptotischen Drallverteilung $G_{1,max}(b)$ liegt [der graphischen Darstellung der ersten Eigenfunktion G_1 für die verschiedenen b entnommen].

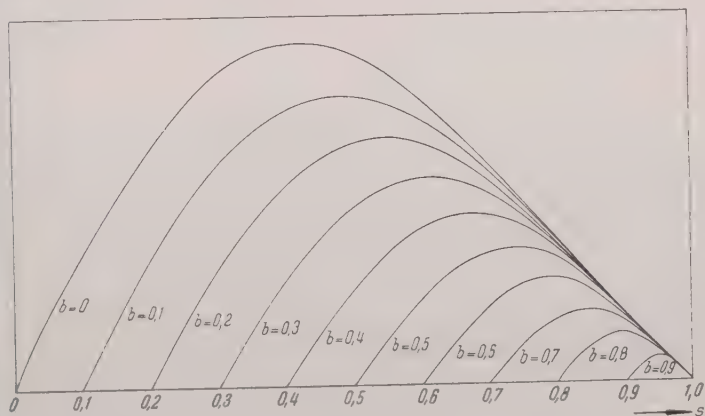
¹) Die μ_i sind im offenen Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ stetige, stetig differenzierbare und – wie sich nachrechnen lässt – monoton wachsende Funktionen von b . Ihre Folge konvergiert daher in $\langle 0, 1 \rangle$ auch gleichmässig gegen $\lambda_1(b)$, das demnach gleichfalls monoton wächst.

²) Die Werte gelten nur asymptotisch für grosse q , da der Einfluss der höheren Eigenwerte nicht berücksichtigt ist.

Es sei betont, dass alle diese Werte auf der Voraussetzung gleichbleibenden Spaltgefälles, das heisst von konstantem U_0 bzw. Re fussen.

	$\lambda_1(b)$	$d(b) = \frac{\lambda_1(0)}{\lambda_1(b)}$ %	$\frac{Q(b)}{Q(0)}$ %	$\frac{u_{max}(b)}{U_0}$ %	$s_L(b) = \sqrt{\frac{-A(b)}{2}}$	$s_D(b)$
	+ 21,382302	100	100	100	0	0,42
	+ 39,6	54,0	57,4	45,4	0,46364	0,49
2	+ 60,5	35,3	42,6	34,1	0,54611	0,55
3	+ 99,9	21,4	30,4	25,5	0,61474	0,61
4	+ 181	11,8	20,4	18,4	0,67703	0,68
5	+ 397	5,4	12,6	12,7	0,73553	0,74
6	+ 896	2,4	6,9	8,0	0,79147	0,79
7	+ 2975	0,7	3,1	4,5	0,84555	0,85
8	+ $1,2 \cdot 10^4$	0,2	1,0	2,1	0,89815	0,90
9	+ $8 \cdot 10^4(?)$	0,0	0,1	0,5	0,94956	0,95
10	+ ∞	0	0	0	1	1

Die Daten sind als um etwa eine Einheit der letzten Ziffer unsicher anzusehen. Der Ort des asymptotischen Drallmaximums stimmt für nicht allzu schlanke Zylinder praktisch mit dem Ort des Geschwindigkeitsmaximums überein. Das Maximum der asymptotischen Drallverteilung (wie auch das der maximalen Durchflussgeschwindigkeit) liegt für alle b näher am inneren als am äusseren Zylinder, wie aus der Asymmetrie der ersten Eigenfunktion zu ersehen ist.



Figur 1

erste Eigenfunktion $G_1(s)$ für verschiedene Spaltweiten b [Normierung derart, dass $G_1'(1)$ für alle Kurven gleich ist.]

Summary

The investigations of COLLATZ and GÖRTLER (ZAMP 5, 95 [1954]), are generalized to a laminar longitudinal flow between coaxial circular cylinders, superposed by a small angular velocity component. It is found that the eigenvalue describing the damping of the angular momentum downstream are rapidly increasing with increasing radius b of the inner cylinder. The first eigenvalue and eigenfunction are calculated for several values of b .

(Eingegangen: 23. November 1953.)

Varia – Miscellaneous – Divers

Historische Anmerkung zum Aufsatz: Einige Anwendungen funktionsanalytischer Methoden in der praktischen Analysis¹⁾

Von LOTHAR COLLATZ, Hamburg

Einem Vortrage von Herrn A. OSTROWSKI (am 14. Oktober 1953 in Oberwiesenthal) und einem Gespräch mit Herrn OSTROWSKI verdanke ich den Hinweis auf einen sehr beachtlichen Briefwechsel von R. MEHMKE und R. A. NEKRASSOFF, veröffentlicht in Math. Sbornik (Moscow) 16, 437–459 (1892) (drei Briefe von NEKRASSOFF in Russisch, zwei Briefe von MEHMKE in Deutsch) veröffentlicht ist und in welchem bereits verschiedene Konvergenzkriterien für das Iterationsverfahren in Einzelschritten bei linearen Gleichungssystemen bewiesen sind. Insbesondere ist das für praktische Zwecke sehr nützliche Kriterium $K < 1$ mit dem nach Gleichung (2) meiner Arbeit berechneten K nicht erst von SASSENFELD eingeführt worden, wie ich bisher annahm, sondern findet sich auch schon in dem genannten Briefwechsel S. 439, und auf den folgenden Seiten gibt MEHMKE einen Beweis.

Zu Abschnitt 9 ist noch als Literatur hinzuzufügen:

A. OSTROWSKI, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale*, Comment. Math. Helv. 10, 69–96 (1937).

2. Internationale Tagung für Kurzzeitphotographie und Hochfrequenzkinematographie

Die 2. Internationale Tagung für Kurzzeitphotographie und Hochfrequenzkinematographie wird vom 22. bis 28. September 1954 in Paris stattfinden. Die Organisationskomitee besteht aus den Herren LUCIEN BULL, Direktor des Marey Instituts (Vorsitzender), Ingénieur Général P. LIBESSART, Prof. Dr. H. SCHARIDY, Ingénieur en Chef P. FAYOLLE, J. VIVIÉ, Sekretär der AFITEC (Kassenführer), Ingénieur Principal P. NASLIN (Sekretär) sowie ausländischen Delegierten. Die Schriftverkehr, der die Tagung betrifft, ist zu führen mit dem Sekretär des Organisationskomitees, M. Ingénieur Principal P. NASLIN, Laboratoire Central de l'Armement, Fort de Montrouge, Arcueil (Seine), Tél. Alésia 06.46.

Vorträge werden gehalten nicht nur über die optischen, mechanischen, elektrischen und elektronischen Methoden, Verfahren, Geräte und Zubehöraparate der Kurzzeitphotographie und -radiographie und der Hochfrequenzkinematographie

¹⁾ L. COLLATZ, ZAMP 4, 327–357 (1953).

radiokinematographie, sondern auch über die *Anwendungen* dieser Methoden zur Untersuchung schnelllaufender Vorgänge in den verschiedensten wissenschaftlichen und technischen Gebieten (Physik, Aero- und Gasdynamik, Werkzeugmaschinen, Metallurgie, Elektronik, Motoren, Ballistik, Medizin, Chirurgie, Bio- usw.). Die Hochfrequenzkinematographie bezieht sich im allgemeinen nicht auf Aufnahmeserien, die mit Bildfrequenzen unter 100 s aufgenommen worden

Die drei *Tagungssprachen* sind Französisch, Englisch und Deutsch. Der *Tagungsbeitrag* beträgt für die Vortragenden 1000 Francs, für die übrigen Teilnehmer 50 Francs. Jeder Teilnehmer erhält vor der Tagungsöffnung Zusammenfassungen aller Vorträge. In den Grenzen des zur Verfügung stehenden Raumes können die Teilnehmer photographische und kinematographische Apparate und Zubehör, gegebenenfalls kommerziellen Charakters, ausstellen. Für die Ausleihung jedes Gerätes wird ein Beitrag von 20 000 Francs erhoben.

Im Auftrage des Organisationskomitees: J. EGGERT, Zürich

Generalversammlung der Union Radio-Scientifique Internationale vom 23. August bis 2. September 1954 in den Haag

Die Union Radio-Scientifique Internationale (U. R. S. I.) wird ihre diesjährige Generalversammlung vom 23. August bis 2. September 1954 in den Haag (Holland) abhalten. Nähere Auskünfte erteilen die Präsidenten der Nationalkomitees oder Generalsekretariat in Brüssel (42, rue des Minimes). Das Sekretariat des Organisationskomitees liegt in den Händen von Herrn Dr. C. TH. VAN DER WIJCK (Direction générale des P. T. T. des Pays-Bas, Kortenaerkade 12, 's Gravenhage). Anmeldungen zur Teilnahme sind möglichst frühzeitig erbeten. Die Programme werden noch erscheinen.

F. TANK

Internationales Symposium über experimentelle Meteorologie in Zürich vom 4. bis 6. Oktober 1954

Die «Eidgenössische Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr» wird an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich vom 4. bis 6. Oktober 1954 ein Internationales Symposium über experimentelle Meteorologie abhalten. Im Rahmen dieses Kolloquiums sollen in erster Linie die Fragen der natürlichen Niederschlagsbildung und ihre künstliche Beeinflussung besprochen und im besondern das Problem der Hagelbildung erörtert werden. Für dieses Symposium sind eine beschränkte Zahl von Hauptvorträgen ins Programm aufgenommen worden, ferner sind Kurzvorträge vorgesehen; doch sollen Diskussionen möglichst reichlich Zeit eingeräumt werden. Als Vortragende und Diskussionsteilnehmer haben zugesagt:

EUGENE BOLLAY, North American Weather Consultants, Altadena, Calif.; Prof. Dr. MARIO BOSSOLASCO, Istituto Geofisico Italiano, Milano; Prof. Dr. HORACE R. BYERS, Department of Meteorology, University of Chicago; HENRI DESSENS, Direktor des Observatoire Puy-de-Dôme, Clermont-Ferrand; L. FACY, Ingénieur en Chef, Météorologie Nationale, Paris; E. M. FOURNIER D'ALBE, Geophysical Observatory, Quetta, Pakistan; Dr. CH. JUNGE, Geophysics Research Directorate, Cambridge, Mass.; F. H. LUDLAM, Department of Meteorology, Imperial College of Science, London; B. J. MASON, Department of Meteorology,

Imperial College of Science, London; R. J. MURGATROYD, Meteorological Research Flight, Farnborough; Dr. WALTER RAU, Max-Planck-Institut für Physik der Stratosphäre, Weissenau bei Ravensburg; Dr. VINCENT J. SCHAEFER, Munital Foundation, Inc., Schenectady, N. Y.; G. SOULAGE, Observatoire Puy-de-Dôme, Clermont-Ferrand; Prof. Dr. FERD. STEINHAUSER, Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Wien; OTTARIO VITTORI, Osservatorio Monte Cimone, Sertola, Italien, und ein Mitglied des U. S. Advisory Committee on Weather Control.

Anfragen sind zu richten an die Adresse des Präsidenten der Kommission Prof. Dr. R. SÄNGER, ETH., Postfach, Zürich 23 (Schweiz).

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Rechenmethoden der Quantentheorie. Von S. FLÜGGE und H. MARSHALL. 1. Teil: *Elementare Quantenmechanik*, 2. Auflage (Springer, Berlin 1952). 272 S. DM 29.80, Ganzleinen DM 32.80.

Dieses schon in der ersten Auflage sehr günstig aufgenommene Werk liegt nun in zweiter, umgearbeiteter Auflage vor. Die Änderungen, deren Tendenz vor allem war, die physikalischen Fragestellungen stärker als bisher hervortreten zu lassen, dürften das dem Lernenden wie dem Lehrenden gleich wertvolle Buch noch wesentlich bereichert haben. Jedenfalls ist der Einschluss von Aufgaben über die WKB-Methode, über das neue Schwingersche Variationsverfahren für Streuprobleme und anderes sicherlich ein Vorzug, ebenso die vertiefte Behandlung des Diracschen Störungsverfahrens, das in allen Anwendungen der Quantentheorie ja eine zentrale Stellung innehat. Die elementaren Mehrkörperprobleme und das Pauli-Prinzip sind neu aufgenommen worden; dafür wird die Diracsche Theorie des Elektrons auf den zweiten Band verspart, der offenbar der relativistischen Quantentheorie und der Theorie der Strahlung gewidmet sein soll. Nach dem guten Gelingen der Neufassung des ersten Bandes erwartet man mit doppelter Spannung das Erscheinen des zweiten.

M. R. Schafroth

Linear Algebra and Projective Geometry. By REINHOLD BAER (Academic Press Inc., Publishers, New York, 1952). 318 pp., 19 Figs; \$6.50.

Das in der von P. A. SMITH und S. EILENBERG herausgegebenen Sammlung «Pure and Applied Mathematics» erschienene Buch setzt sich zum Ziel, die strukturelle Identität der linearen Algebra und der projektiven Geometrie aufzuzeigen durch Hervorhebung der algebraischen Formulierung geometrischer Begriffe. Im Vordergrund stehen daher zunächst die linearen Mannigfaltigkeiten, die semi-linearen und linearen Transformationen sowie die semilinearen Formen, denen entsprechend die projektiven Geometrien, die Projektivitäten und Kollineationen sowie die Dualitäten zugeordnet sind. Die Sätze werden möglichst allgemein formuliert, also ohne Beschränkung auf die Dimension oder den zugrunde gelegten Körper. Damit wird die von verschiedenen Autoren seit der Jahrhundertwende angebahnte Entwicklung zu einem gewissen Abschluss gebracht, und es zeigt sich die Tragweite der rein algebraischen Methode. Infolge des gesteckten Zieles fehlen die Determinanten und die Matrizen, ebensowenig treten Stetigkeitsbetrachtungen auf. Aus dem Inhalt: II. The Basic Properties of a Linear Manifold, III. Projectivities, IV. Dualities, V. The Ring of a Linear Manifold, VI. The Groups of

a Linear Manifold, VII. Internal Characterization of the System of Subspaces. Zahlreiche Detailfragen, Spezialfälle und Ergänzungen sind in Anhängen zu den einzelnen Kapiteln untergebracht. Im ganzen handelt es sich um ein sehr wertvolles Werk, das auch manche neue Gesichtspunkte aufweist.

E. Roth-Desmeules

Compendium of Meteorology, Prepared under the Direction of the Committee on the Compendium of Meteorology H. R. BYERS, H. E. LANDSBERG, H. WEXLER, B. HAURWITZ, A. F. SPILHAUS, H. C. WILLET, H. G. HOUGHTON, Chairman. Edited by THOMAS F. MALONE (American Meteorological Society, Boston, Massachusetts 1951). 1334 pp., Fr. 62.40.

Dieses grosse Werk der American Meteorological Society in Boston zeigt wohl wie kein anderes, welche Wandlungen die wissenschaftliche Meteorologie im letzten Jahrzehnt durchgemacht hat. Der Herausgeber, THOMAS F. MALONE, meint, mit dem Eintritt in die zweite Hälfte unseres Jahrhunderts ständen wir auf der Schwelle einer aufregenden Aera in der Geschichte der Meteorologie, in welcher bedeutende Fortschritte zu einem besseren Verständnis der physikalischen Gesetze, welche in der Atmosphäre herrschen, möglich sind. Schon die Wahl der Themen und das verschieden grosse Gewicht, das den einzelnen Abhandlungen gegeben wird, zeigen diese Wandlung. Wir müssen es uns hier versagen, zu schildern, in welcher Art die 108 Abhandlungen, an denen 102 Autoren aus der ganzen Welt gearbeitet haben, in 25 Abschnitte eingeteilt sind; wir können hier nur einige grosse Gruppen hervorheben. Die erste grosse Gruppe befasst sich vornehmlich mit der physikalischen Meteorologie, wobei die Physik der Wolken besonders eingehend behandelt wird. Im folgenden Abschnitt, der Meteorologie der höheren Atmosphäre, der allein aus zwölf grossen Beiträgen besteht, werden – nach einem kurzen Abstecher in die kosmische Meteorologie – die Dynamik der Atmosphäre, die Zirkulationssysteme und sehr ausführlich die Probleme und Methoden der Wettervorhersage dargestellt. Dreizehn Beiträge sind der tropischen, der polaren Meteorologie und der Klimatologie gewidmet. Diesen schliessen sich in mehr oder minder logischer Folge Abhandlungen an über Hydrometeorologie, Meteorologie der Meere, biologische und chemische Meteorologie und Staubmessungen in der Atmosphäre. In einem besonderen Abschnitt werden die Wolken, der Nebel und die Vereisung von Flugzeugen behandelt, während sich die letzten Abschnitte mit meteorologischen Messinstrumenten, Untersuchungen im Laboratorium (Modellversuchen), mit Radiometeorologie und Mikroseismik befassen.

Es handelt sich bei diesem Kompendium keineswegs um eine erschöpfende Behandlung der meteorologischen Materie; es ist also kein Nachschlagewerk im eigentlichen Sinne. Der Hauptzweck besteht vielmehr darin, eine Bestandsaufnahme der im letzten Jahrzehnt gesammelten Erkenntnisse vorzunehmen und die vielen noch der Lösung harrenden Probleme zu skizzieren. Die gleiche Materie ist oft von zwei Autoren bearbeitet worden. Dies geschah absichtlich, obgleich damit eine gewisse Doppelspurigkeit unvermeidbar wurde. Aber es ist ebenso interessant wie anregend, zu sehen, wie verschieden das gleiche Problem und seine Lösungsmöglichkeit von verschiedenen Forschern betrachtet wird.

Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass die meteorologische Forschung durch die Bedürfnisse des Zweiten Weltkrieges mächtig gefördert worden ist. Die Mittel, die namentlich in den Vereinigten Staaten von Amerika hierfür eingesetzt wurden und werden, sind nicht nur ungeheuer gross, es wird auch keine Mühe gescheut, das modernste Instrumentarium aus der gesamten Wissenschaft und Technik für die Meteorologie anzuwenden oder neues zu entwickeln, um die sehr komplexen

Vorgänge in der Atmosphäre zu erfassen. Die in der Meteorologie so lange herrschend gewesene statistische Methode wird offensichtlich immer mehr von der physikalischen Betrachtungsweise abgelöst. Nicht nur ist die Atmosphäre selbst zum grossen Experimentierfeld geworden, auch die Modellversuche im Laboratorium spielen eine immer grössere Rolle. Die experimentelle Meteorologie hat sich ja schon heute zu einem höchst selbständigen Wissenszweig entwickelt.

Dass bei dieser stürmischen Entwicklung der Forschung ein Werk wie das vorliegende Kompendium in mancher Hinsicht einen recht inhomogenen Charakter hat, ist ohne weiteres verständlich. Es ist aber ein grosses Verdienst, dass die fast unübersehbar gewordenen Einzelpublikationen zu abgerundeten monographischen Darstellungen verarbeitet worden sind. Auch dass bei allen Beiträgen Bedeutung und Anwendbarkeit der Erkenntnisse für den praktischen Wetterdienst herausgearbeitet werden, sei besonders hervorgehoben. Kein Meteorologe wird das Werk aus der Hand legen, ohne von ihm angeregt zu sein.

J. C. Thann

Imperfections in Nearly Perfect Crystals. By W. SHOCKLEY, J. H. HOLLOMAN, R. MAURER, and F. SEITZ (John Wiley & Sons, Inc., New York; Chapman & Hall, Ltd., London, 1952). 490 pp.; \$7.50.

Die Eigenschaften von Kristallen hängen weitgehend von der Anordnung der sie aufbauenden Teilchen (Atome, Ionen usw.) und der Art der gegenseitigen Bindung derselben ab. Aber auch der Grad der Idealität des Gitterbaues ist bekanntlich oft von entscheidender Bedeutung, insbesondere bei den sogenannten störungsempfindlichen (= strukturempfindlichen) Eigenschaften, wie zum Beispiel die Festigkeit, die elektrische Leitfähigkeit und anderes mehr. Das vorliegende Buch (Symposium einer vom 12. bis 14. Oktober 1950 abgehaltenen Konferenz des «Committee on Solids» des National Research Council U.S.A.) gibt einen guten Einblick in die Natur der Störungen von Kristallgittern, insbesondere von Metalkristallen. Ein einleitendes Kapitel von F. SEITZ macht den Leser mit den verschiedenen Typen der Gitterunvollkommenheiten bekannt (Phononen, Elektronen und Löcher, Excitonen, Leerstellen und Zwischengitterplatz-Atome, Fremdstoffatome, Versetzungen) und beleuchtet deren Wirkung auf die Kristalleigenschaften. Anschliessend werden die Versetzungen geometrisch charakterisiert (READ und SHOCKLEY) und ihre Bedeutung für die Verformung von Metallen erörtert (BARRETT, READ, MOTT, AVERBACH und andere). In einem weiteren Kapitel wird die Diffusion unter anderen vor allem durch BRECKENRIDGE und ZENER behandelt. Ferner geht eine Reihe von Arbeiten auf die Eigenschaften und Auswirkungen der Korngrenzen ein (insbesondere READ, SHOCKLEY, CHALMERS, wie auch auf die Bewegungen in denselben (SMOLUCHOWSKI). Die Natur der inneren Korngrenzen (Mosaikgrenzen, «subboundaries» usw.) beleuchtet schliesslich GUINIER. Das ganze Buch ist gut illustriert und vermag dem Leser einen guten Überblick über den Stand der heutigen Kenntnisse vom Realbau der Kristalle zu geben. Es kann daher jedem, der sich hierüber informieren möchte, bestens empfohlen werden.

W. Epprecht

C. B. Biezeno, Anniversary Volume on Applied Mechanics (H. Stam, Antwerpen, Djakarta 1953). 328 S.; Hfl. 20.–.

Am 2. März 1953 feierte C. B. BIEZENO seinen 65. Geburtstag. Ein kleiner Kreis von Freunden, Mitarbeitern und Schülern hat ihm die vorliegende Festschrift gewidmet, die einen erfolgreichen Lehrer ehrt, aber auch einen der bedeutendsten Forscher auf dem Gebiete der Elastizitätstheorie, den Mitbegründer der

internationalen Kongresse für theoretische und angewandte Mechanik und nicht zuletzt eine feine und kultivierte Persönlichkeit.

Die Festschrift wird durch eine kurze Lebensbeschreibung des Jubilars sowie durch ein vollständiges Verzeichnis seiner Publikationen eingeleitet. Im weiteren enthält sie die folgenden Beiträge:

W. BOOMSTRA, *Triangles équilatères inscrits dans une conique donnée*; H. BREKAMP, *Sur la théorie de Sturm-Liouville*; TH. VON KÁRMÁN and G. MILLÁN, *The thermal theory of constant pressure deflagration*; J. M. BURGERS, *Some remarks on detonation and deflagration problems in gases*; C. KONING, *Some interference problems*; R. V. SOUTHWELL and G. VAISEY, *A problem suggested by Saint-Venant's Mémoire sur la torsion des prismes*; R. GRAMMEL, *Nichtlineare Schwingungen mit unendlich vielen Freiheitsgraden*; R. J. LEGGER, *The d'Alembert principle*; F. J. PLANTEMA and W. J. VAN ALPHEN, *Compressive buckling of sandwich plates having various edge conditions*; A. D. DE PATER, *La stabilité d'un dicône se déplaçant sur une voie en alignement droit*; A. VAN DER NEUT, *The local instability of compression members, built up from flat plates*; J. A. HARINGX, *Stresses in corrugated diaphragms*; A. VAN WIJNGAARDEN, *Ut tensio sic vis*; D. DRESDEN, *Shrink-fit used to transmit a torque*; W. T. KOITER, *On partially plastic thick-walled tubes*; C. G. J. VREEDENBURGH and O. STOKMAN, *Some new elements in the calculation of flat slab floors*; J. P. MAZURE, *Statistical problems in the code of practice for steel windows*; J. J. KOCH, *The Laboratory for Applied Mechanics at the Technological University of Delft*; R. G. BOITEN, *The design of diaphragms for pressure measuring devices, based on the use of wire-electrical straingauges*. H. Ziegler

Introduction to Measure and Integration. By M. E. MUNROE (Addison-Wesley Publishing Co., Cambridge, Mass., 1953). 310 pp.; \$7.50.

Cet excellent ouvrage s'adresse à des étudiants avancés, ayant déjà suivi un cours sur la théorie des fonctions de variables réelles. Ils y trouveront une exposition didactique de la théorie moderne de la mesure et de l'intégrale. De nombreux exemples et contre-exemples, des problèmes allant du facile au difficile sont insérés dans chaque chapitre. Plusieurs aperçus sur les relations entre la notion de probabilité et celle de la mesure, sur les espaces de HILBERT et de BANACH, sur la moyenne ergodique et sur la mesure de HAAR dans les groupes, donnent une première orientation sur des domaines qui sont encore l'objet de recherches.

Table des matières: I. Point Set Theory (1–71). II. Measure. General Theory (72–114). III. Measure. Specific Examples (115–144). IV. Measurable Functions (145–164). V. Integration (165–218). VI. Convergence Theorems (219–266). VII. Differentiation (267–302). Bibliography, Index of Postulates, Index of Symbols, Index (303–310). M. Plancherel

Inhalt und Mass. Von KARL MAYRHOFFER (Springer-Verlag, Wien 1952). 269 S., 17 Abb.; broschiert sFr. 37.–, Ganzleinenband sFr. 40.–.

Sowohl die klassischen als auch die modernen Integrationstheorien fassen auf der Theorie der Inhalte und Masse (totaladditiver Inhalt auf einem Sigma-mengenkörper). Das Buch von K. MAYRHOFFER gibt einen lückenlosen Aufbau dieser Theorie unter Wahrung der grössten Allgemeinheit. Zunächst wird der abstrakte Inhalts- und Massbegriff axiomatisch eingeführt, um dann, ausgehend vom anschaulichen, elementaren Inhaltsbegriff, den Jordanschen Inhalt sowie das Borelsche und das Lebesguesche Mass zu definieren. Nach einem Kapitel über das Verhalten von Inhalt und Mass bei linearen Transformationen wird die

Masstheorie von CARATHÉODORY axiomatisch dargelegt und der Zusammenhang mit dem abstrakten Mass untersucht. Schliesslich folgt im letzten Kapitel die Verallgemeinerung auf Somenfunktionen.

Das Buch gibt einen trefflichen Überblick über dieses grundlegende Gebiet der Mathematik und führt bis zu den Ergebnissen der aktuellen Forschung. Es zeichnet sich durch einen strengen, klaren Aufbau aus.

E. Roth-Desmeules

Introduction to the Differential Equations of Physics. By L. HOPE translated by W. NEF (Dover Publications, New York, 1948). 154 pp.; \$1.25.

Dans cet ouvrage de 154 pages petit format, dont la lecture n'exige que la connaissance des éléments du calcul différentiel et intégral, l'auteur expose les notions fondamentales de l'analyse vectorielle. Il en donne des applications à la mécanique et à la physique et il intègre dans quelques cas simples les équations différentielles et aux dérivées partielles auxquelles ces applications conduisent.

Comme il convient dans un livre qui ne veut être qu'une « introduction » l'auteur fait davantage appel à l'intuition géométrique et physique qu'à la rigueur du formalisme mathématique (le paragraphe consacré à l'intégrale de FOURIER va cependant trop loin dans ce sens en introduisant sans explication l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \cos x \, dx$$

qui n'a pas de sens). Cette réserve faite, il faut féliciter l'auteur d'avoir réussi à donner sous une forme limpide un exposé dont la lecture peut être recommandée au futur ingénieur ou physicien.

Contenu: I. The Differential Equation as an Expression of a Law of Nature (1-4). II. The Ordinary Differential Equations of the Mechanics of Particles (6-38). III. The Simplest Partial Differential Expressions (39-63). IV. The Simplest Partial Differential Equations (64-83). V. Solution by Eigenfunction (84-123). VI. Solution by Change of Variables (124-137). VII. Solution by the Use of Singularities (138-152). Index (153-154).

M. Plancherel

Signal, Noise and Resolution in Nuclear Counter Amplifiers. By A. B. GILLESPIE (Pergamon Press Ltd., London 1953), 155 pp., 59 figs.; 21s.

In jedem kernphysikalischen Laboratorium ist man heute auf geeignete Verstärker angewiesen, insbesondere wenn Ionisationskammer, Proportionalzählrohr oder Szintillationszähler zum Nachweis und zur Untersuchung von Kernprozessen Verwendung finden. An solche Verstärker sind spezielle Forderungen zu stellen. So soll das Verhältnis von Signal zu Störpegel, bedingt durch Widerstandsrauschen, Schroteffekt, Funkeffekt usw., möglichst gut sein und gleichzeitig ein ausreichendes zeitliches Auflösungsvermögen erreicht werden.

In dem vorliegenden Werke werden zunächst die elektrischen Signale der in Frage kommenden Detektoren zum Nachweis von Partikeln diskutiert und anschliessend die auftretenden Störquellen behandelt. Dies bildet die Grundlage zur zweckmässigen Wahl der ersten Röhre und ihrer Arbeitsbedingungen sowie zur Wahl des Netzwerkes, welches die Übertragungsfunktion des Verstärkers bestimmt.

Das Büchlein bietet eine Übersicht über diese Probleme und ihre Lösung und enthält eine Reihe von experimentellen und theoretischen Ergebnissen, deren Kenntnis allen Physikern und Ingenieuren, die sich mit derartigen Fragen beschäftigen haben, von Nutzen sein werden.

E. Baldinger

Zur Theorie der Mahlvorgänge

Von LUDWIG BASS, Reutte, Tirol¹⁾

Einführung

Die grundlegende Frage der vorliegenden Theorie der Mahlvorgänge besteht darin, bei gegebenen, festgehaltenen Mahlbedingungen die Gewichtsverteilung des Mahlgutes als Funktion der Mahldauer auszudrücken. Es soll also bei bekannter Anfangsverteilung $M(x, 0)$ die Funktion $M(x, t)$ bestimmt werden, die dadurch definiert ist, dass der Ausdruck

$$M(x, t) dx$$

das Gewicht der Körner des Mahlgutes, deren Grössen zwischen x und $x + dx$ liegen, zur Zeit t angibt.

Die vorliegende Theorie ist im wesentlichen eine phänomenologische; nur so konnten die komplizierten und experimentell wenig erforschten Vorgänge in Mühlen verhältnismässig einfach mathematisch erfasst werden. Die Theorie beruht insofern auf statistischer Grundlage, als die dort eingeführten Grössen erst bei einer grossen Anzahl der Körner aller im Mahlgut vorhandenen Grössenbereiche reproduzierbar werden.

Es sei $\varepsilon(\xi, x)$ die Masse der Körner im Grössenintervall $(x, x + dx)$, die beim Mahlen pro Zeiteinheit aus einer Einheitsmasse der Körner des Grössenintervalls $(\xi, \xi + d\xi)$ entstehen. Dieser Definition treten drei Voraussetzungen bei.

1. Bei dem Mahlen geht eine «reine Zerkleinerung» vor sich, das heisst, dass sich kleinere Körner nicht zu grösseren vereinigen. Daraus folgt, dass $\varepsilon(\xi, x)$ nur im Bereich $0 \leq x \leq \xi \leq x_m$ von Null verschieden sein kann (mit x_m wird die maximale im Mahlgut vorhandene Korngrösse bezeichnet).

2. Die Funktion $\varepsilon(\xi, x)$ ist zeitunabhängig. Diese Voraussetzung ist nur dann berechtigt, wenn die durch die Korngrössenveränderungen verursachten Effekte, vor allem das Polstern der Mühle mit sehr kleinen Körnern, vernachlässigt werden können (das Volumen des Mahlgutes muss sehr klein sein gegenüber dem Volumen der Mühle).

¹⁾ Metallwerk Plansee.

3. Die Funktion $\varepsilon(\xi, x)$ ist im Bereich $0 \leq x \leq \xi \leq x_m$ stetig. Die Berechtigung dieser Annahme beruht im folgenden: Es können zwar plötzliche starke Veränderungen von $\varepsilon(\xi, x)$ in solchen Bereichen erscheinen, wo sich die Eigenschaften des Materials und der Mahlvorrichtung, die das Zerspalten der Körner beeinflussen, plötzlich ändern. Ein solches Verhalten von $\varepsilon(\xi, x)$ in der Koordinate x ist zu erwarten, wenn die Körner bis zur Grösse der sogenannten idealen Gitterbereiche¹⁾ zerkleinert werden, bei der ihre Festigkeit stark zunimmt, und ebenfalls in der Koordinate ξ , wenn die Körner die Grösse der Poren der Mahlkörper erreichen. Nun besteht das Mahlgut aus sehr vielen idealen Gitterbereichen, deren Grösse in einem gewissen Intervall schwankt; die Verteilungskurve dieser Gitterbereiche wird deshalb annähernd stetig, so dass, auch wenn die Idealkristalle in der Mühle nicht zerspaltet werden können, $\varepsilon(\xi, x)$ stetig bleibt. Die zahlreichen Poren der Mahlkörper sind ebenfalls nicht alle gleich gross, so dass sie bloss um so stärkere Veränderungen von $\varepsilon(\xi, x)$ in ξ bewirken können, je kleiner ihr Grössenbereich ist.

Ähnliche Überlegungen führen zur Annahme der Stetigkeit von $M(x, t)$. Da $M(x, t)$ im ganzen Korngrössenbereich definiert und endlich ist, sind nur Unstetigkeiten durch endliche Sprünge denkbar. Zu solchen wäre aber eine Anzahl von Körnern genau gleicher Grösse notwendig; dies trifft aber nicht zu, da sich praktisch jedes Korn im Gewicht vom andern etwas unterscheidet und da die Theorie eine grosse Anzahl von Körnern aller vorhandenen Grössenbereiche voraussetzt. Anstatt der Sprungstellen können so nur stellenweise starke Änderungen auftreten. Diese Überlegung gilt für jeden Zeitpunkt.

Der Einfachheit halber wird im weiteren vorausgesetzt, dass sich die Körner bis zu einer beliebig kleinen Grösse zermahlen lassen. Wenn dies nicht zutrifft, etwa wegen der Festigkeit der idealen Gitterbereiche, braucht man im folgenden nur die untere Grenze des gesamten Korngrössenbereiches von Null auf eine minimale Korngrösse zu verändern und zu beachten, dass $\varepsilon(\xi, x)$ nur in dem so beschränkten Bereich von Null verschieden sein kann.

Die Grundgleichung

Die zeitliche Veränderung $\partial M(x, t)/\partial t$ besteht aus den Übergängen zweier Teilchenarten:

- a) Übergänge der Trümmer der Körner, die vor der Zerspaltung grösser als $x + dx$ waren. Die Masse solcher Trümmer, die pro Zeiteinheit in das betrachtete Intervall $(x, x + dx)$ übergehen, beträgt zur Zeit t

$$\int_x^{x_m} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi.$$

¹⁾ W. KLEMM und A. SMEKAL, Naturwissenschaften 29, 688 (1941).

- b) Übergänge der Trümmer der Körner, deren Grösse vor der Zerspaltung im Intervall $(x, x + dx)$ lag. Die Masse der Trümmer, die pro Zeiteinheit dieses Intervall verlassen, beträgt zur Zeit t

$$M(x, t) \int_0^x \varepsilon(x, \alpha) d\alpha.$$

Es gilt daher allgemein

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial t} + M(x, t) \int_0^x \varepsilon(x, \alpha) d\alpha = \int_x^{x_m} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi. \quad (1)$$

Diese partielle Integrodifferentialgleichung ist die Grundgleichung der vorliegenden Theorie.

Da beim Mahlen nur kleinere Teilchen aus grösseren entstehen können («reine Zerkleinerung»), gibt es keine anderen Übergänge als die oben angeführten, vorausgesetzt, dass keine Teilchen aus der Mühle verschwinden. Die Grundgleichung (1) muss deshalb das Prinzip der Erhaltung der gesamten Masse erfüllen. Tatsächlich folgt aus (1)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{x_m} M(x, t) dx = 0,$$

da

$$\int_0^{x_m} dx \int_x^{x_m} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi - \int_0^{x_m} dx \int_0^x \varepsilon(x, \alpha) M(x, t) d\alpha = 0$$

gilt. Da nämlich $\varepsilon(\xi, x)$ im Bereiche $\xi \leq x$ gleich Null ist, verschwinden die Integrale

$$\int_0^x \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi, \quad \int_\xi^{x_m} \varepsilon(\xi, x) dx.$$

Deswegen ist

$$\begin{aligned} \int_0^{x_m} dx \int_x^{x_m} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi &= \int_0^{x_m} dx \int_0^x \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi \\ &= \int_0^{x_m} d\xi \int_0^{x_m} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) dx - \int_0^{x_m} d\xi \int_0^\xi \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) dx, \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Ermittlung der Funktion $\varepsilon(\xi, x)$. Experimentelles

Die Funktion $\varepsilon(\xi, x)$ enthält implizite alle spezifischen Eigenschaften des gemahlten Materials und der Mahlvorrichtung, die mit der Zerkleinerung zusammenhängen. Sie ist viel zu kompliziert, um direkt aus Messungen bestimmt zu werden. Im folgenden wird deshalb gezeigt, wie sie aus einer für Messungen geeigneten Annäherung indirekt bestimmt werden kann.

Der gesamte Korngrössenbereich $0 \leq x \leq x_m$ wird in m Teilbereiche mit den Grenzen $x_0 = 0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m$ unterteilt. Dabei wird vorausgesetzt, dass

$$|x_i - x_{i-1}| \ll \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \quad (2)$$

sei. Durch $M_i(t)$ wird die Masse der Körner bezeichnet, deren Grössen zur Zeit t zwischen x_{i-1} und x_i liegen:

$$M_i(t) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} M(x, t) dx.$$

Durch λ_{ik} wird weiter die Grösse

$$\lambda_{ik} = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon(\xi, x) d\xi$$

bezeichnet. Der physikalische Inhalt der Bedingung (2) besteht in folgendem

1. Die Teilbereiche sind so klein gegenüber den entsprechenden Korngrössen, dass, wenn ein Korn zertrümmert wird, die Masse derjenigen der so entstandenen Trümmer, deren Grössen im Teilbereich des ursprünglichen Kornes bleiben, vernachlässigt werden kann, das heisst

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_{x_{i-1}}^{\xi} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_x^{x_i} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi \approx 0. \end{aligned}$$

Die ersten zwei Gleichheitszeichen folgen aus der Bedingung der reinen Zerkleinerung

$$\varepsilon(\xi, x) = 0, \text{ wenn } \xi \leq x.$$

Hier wurde die Zerkleinerung durch das Reiben und durch Stösse zwischen den Körnern, wodurch von den Körnern sehr kleine Teilchen abgetrennt werden vernachlässigt. Dies ist zulässig, da das Volumen des Mahlgutes klein gegenüber dem Volumen der Mühle vorausgesetzt wird und da ausserdem das Mahlen mit Mahlkörnern wesentlich schneller vor sich geht.

2. Bei der Mittelwertbildung

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} M(\xi, t) d\xi = M(i, x, t) (x_i - x_{i-1}),$$

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi = M(i, x', t) \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon(\xi, x) d\xi \quad (x_{i-1} \leq x \leq x_i)$$

kann wegen der Bedingung (2)

$$M(i, x, t) \approx M(i, x', t)$$

gesetzt werden.

Man integriere nun die Grundgleichung (1) in einem der Teilbereiche, $x_{i-1} \leq x \leq x_i$. Unter Anwendung der Bedingung (2) ergibt sich für die einzelnen Glieder

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-1}}^{x_i} M(x, t) dx = \frac{d}{dt} M_i(t),$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} d\xi \int_0^{x_{i-1}} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) dx = M(i, x, t) \sum_{k=1}^{i-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon(\xi, x) d\xi - \left(\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{ik} \right) M_i(t),$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{x_i}^{x_m} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi = \sum_{k=i+1}^m M(k, x, t) \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varepsilon(\xi, x) d\xi + \sum_{k=i+1}^m \lambda_{ki} M_k(t),$$

so dass die Grundgleichung (1) unter der Voraussetzung (2) in ein System von m gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dM_i}{dt} + \left(\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{ik} \right) M_i = \sum_{k=i+1}^m \lambda_{ki} M_k \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

zerfällt. Die Gesamtheit der Lösungen des Systems (3), die durch die üblichen Integrationsmethoden berechnet werden, stellt schon eine angenäherte Lösung der Grundgleichung (1) dar. Die Anfangsbedingungen $M_i(0)$ ergeben sich aus der bekannten Anfangsverteilung $M(x, 0)$.

Der zeitliche Verlauf der Grössen $M_i(t)$ kann experimentell leicht verfolgt werden, indem das Mahlen in regelmässigen Zeitabständen unterbrochen, das Mahlgut durch Sieben in die Fraktionen M_i getrennt und gewogen wird. Ausserdem wird für jedes M_i ($i \neq 1$) die reine zeitliche Abnahme verfolgt, indem alle Körner grösser als x_i jeweils von vornherein abgesiebt werden; daraus ergeben sich die spezifischen Zerfallsgeschwindigkeiten in den durch das Absieben

vereinfachten Gleichungen (3)

$$-\frac{dM_i}{dt} = \alpha_i M_i, \quad \alpha_i = \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_{ik} \quad (i = 2, 3, \dots, m).$$

Aus diesen beiden Messreihen können alle λ_{ik} berechnet und die Gültigkeit des Systems (3) geprüft werden. In einer Arbeit von SEDLATSCHKE und BASS¹⁾, in der die Näherung (3) direkt aus statistischen Überlegungen abgeleitet und als eine selbständige Theorie dargestellt worden ist, wurde dies durchgeführt. Es ergab sich eine befriedigende Übereinstimmung der berechneten Resultate mit den Messungen. Auf dieser Übereinstimmung beruht auch die experimentelle Bestätigung der vorliegenden Theorie, die ja eine Verfeinerung der ersteren in demselben Gültigkeitsbereich ist, da sie den Grenzfall von (3) für unendlich viele, infinitesimale Teilbereiche darstellt.

Die unter Anwendung der Näherung (3) aus den Messungen ermittelten λ_{ik} werden nun zur Bestimmung der Funktion $\varepsilon(\xi, x)$ benützt, indem man nach der Methode der kleinsten Quadrate fordert, dass der Ausdruck

$$\sum_{i=2}^m \sum_{k=1}^{i-1} \left[\lambda_{ik} (x_i - x_{i-1}) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} dx \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon(\xi, x) d\xi \right]^2 + \lambda \varepsilon(x, x)$$

ein Minimum annimmt. Für praktische Zwecke werden so die Parameter einer geeignet gewählten Interpolationsfunktion bestimmt. Prinzipiell kann $\varepsilon(\xi, x)$ nach dem Satz von WEIERSTRASS mit beliebiger Genauigkeit durch Polynom approximiert werden, wenn man von den mit steigender Anzahl der Teilbereiche zunehmenden experimentellen Schwierigkeiten absieht. In diesem strengen Fall verschwindet jeder der $m(m-1)/2$ Klammerausdrücke, mit der zusätzlichen Bedingung $\varepsilon(x, x) = 0$; aus dem so entstandenen System linearer Gleichungen können $[m(m-1)/2] + 1$ Koeffizienten eines Polynoms bestimmt werden.

Lösungen der Grundgleichung

Die Grundgleichung (1) hat zwei konstante Lösungen. Die triviale Lösung bezieht sich auf eine leer laufende Mühle. Für den Endzustand gilt²⁾

$$M(x, \infty) = \delta(x) \int_0^{x_m} M(x, t) dx, \quad (4)$$

da eine «reine Zerkleinerung» vor sich geht und da die gesamte Masse konstant bleibt. (4) ist tatsächlich eine Lösung, da durch die Substitution in (1) jede

¹⁾ K. SEDLATSCHKE und L. BASS, Powder Metal. Bull. 6, 148 (1953).

²⁾ $\delta(x)$ bedeutet die Diracsche Deltafunktion.

Glied einzeln verschwindet: das erste wegen der Konstanz von (4); das zweite Glied verschwindet bei $x \neq 0$, indem die δ -Funktion verschwindet, bei $x = 0$ wegen der gleichen Integrationsgrenzen. Das Glied auf der rechten Seite von (1) verschwindet ebenfalls, da

$$\int_x^{x_m} \varepsilon(\xi, x) \delta(\xi) d\xi = \varepsilon(0, x) = 0 \quad (x \leq \xi \leq x_m).$$

In geschlossener Form lässt sich auch die angenäherte Lösung für grosse (das heisst von x_m wenig verschiedene) Korngrössen darstellen. Das Integral auf der rechten Seite von (1) kann bei $x \rightarrow x_m$ wegen dem kleinen Integrationsbereich vernachlässigt werden, da der Integrand stetig ist. Integration der so vereinfachten Gleichung (1) ergibt

$$M(x, t) = M(x, 0) e^{-t \int_0^x \varepsilon(x, \alpha) d\alpha}. \quad (5)$$

Diese Lösung entspricht der bekannten halbempirischen Formel von ROSIN und RAMMLER¹⁾, die dadurch zum erstenmal theoretisch begründet und ihr Gültigkeitsbereich festgelegt wird. (O. THEIMER²⁾) leitete diese Formel mit den Methoden der statistischen Mechanik ab, allerdings nur für den Fall einer zeitunabhängigen Gleichgewichtsverteilung; dabei liess er die Bedingung der «reinen Zerkleinerung» fallen und führte vereinfachte Voraussetzungen über die physikalische Beschaffenheit der Körner ein.)

Die Rosin-Rammlersche Formel lautet in der hier benützten Ausdrucksweise

$$M(x, t) = \frac{n}{x} \left(\frac{x}{F} \right)^n e^{-\left(\frac{x}{F} \right)^n}, \quad (6)$$

wobei n und F für jede Mahldauer neu, empirisch und unabhängig voneinander zu bestimmende Konstanten sind, die so implizite die Zeitabhängigkeit der Verteilung enthalten. Man kennt aber keine Verknüpfung dieser zwei Konstanten, obwohl sie offenbar miteinander zusammenhängen müssen; die Anfangsverteilung $M(x, 0)$ bleibt ebenfalls unberücksichtigt, so dass die Formel (6) bestenfalls erst nach einer unbestimmten Mahldauer benützt werden kann, je nachdem, wie ähnlich $M(x, 0)$ einer Verteilung vom Typ (6) ist.

Die im folgenden angegebene angenäherte Lösung für kleine Korngrössen sowie die strenge Lösung des Mahlproblems zeigt, dass $M(x, t)$ nur im Bereiche der grossen Korngrössen in geschlossener Form (mit einem Exponentialterm) dargestellt werden kann. Die theoretische Begründung der Rosin-Rammlerschen Formel ist deshalb nur in diesem Bereiche möglich. Die Anwendung von (6) in den übrigen Bereichen wird dadurch erzwungen, dass die Konstanten n und F

¹⁾ P. ROSIN und E. RAMMLER, Koll.-Z. 67, 16 (1934).

²⁾ O. THEIMER, Koll.-Z. 123, 1 (1952).

zu diesem Zwecke verfügbar gemacht werden, indem ihr Zusammenhang mit ihrer Zeitabhängigkeit unterdrückt werden durch die in jedem Zeitpunkt wiederholte empirische Bestimmung der zwei Konstanten aus dem Verlauf im gesamten Korngrössenbereich. Ausserdem bewirkt diese wiederholte Bestimmung das jeweilige Anpassen der Formel (6) an die zeitabhängigen Auswertungen der Anfangsverteilung, die sonst unberücksichtigt bleibt. Der Vergleich von (5) mit (6) ergibt als entsprechende Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} M(x, 0) &\longleftrightarrow \frac{n(t)}{x} \left[\frac{x}{F(t)} \right]^{n(t)}, \\ t \int_0^x \varepsilon(x, \alpha) d\alpha &\longleftrightarrow \left[\frac{x}{F(t)} \right]^{n(t)}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die Näherung (5) wird bei grossem t genauer. Wegen der Eigenschaft der «reinen Zerkleinerung» wird nämlich bei genügend grossem t

$$M(x_1, t) > M(x_2, t) \quad \text{wenn} \quad x_1 < x_2.$$

Je grösser dann t wird, um so stärker wird diese Ungleichheit und um so kleiner $M(\xi, t)$ im Intervall $x \leq \xi \leq x_m$. Mit dieser Verschärfung der Annäherung (5) wächst ihr Gültigkeitsbereich. Daraus erklärt sich die bekannte Erscheinung bei der Anwendung der Rosin-Rammlerschen Formel, nämlich dass sich die Anwendbarkeit dieser Formel mit wachsender Mahldauer verbessert. Die Formel (6) nähert sich der Formel (5), soweit es die jeweilige Ähnlichkeit der Ausdrücke (7) erlaubt, da die theoretisch unzulässige Anwendung von (6) in immer kleineren Bereichen durch die *ad hoc* getroffene Wahl der zwei Konstanten erzwungen werden muss.

Bei kleinen Korngrössen kann das zweite Glied auf der linken Seite von (1) vernachlässigt werden, da der Integrationsbereich klein wird und der Integrant stetig ist. Es bleibt übrig

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial t} = \int_x^{x_m} \varepsilon(\xi, x) M(\xi, t) d\xi.$$

Die Integration nach der Zeit ergibt

$$M(x, t) - M(x, 0) = \int_x^{x_m} d\xi \int_0^t \varepsilon(\xi, x) M(\xi, \tau) d\tau. \quad (8)$$

Die Substitution

$$x' = x_m - x, \quad \xi' = x_m - \xi$$

transformiert den Integrationsbereich der Variablen ξ in das Dreieck

$$0 \leq \xi' \leq x' \leq x_m.$$

Die vorige Gleichung geht dadurch über in

$$M'(x', t) - M'(x', 0) = \int_0^{x'} d\xi' \int_0^t \varepsilon'(\xi', x') M'(\xi', \tau) d\tau.$$

Der Kern dieser Integralgleichung, $\varepsilon'(\xi', x')$, ist im Bereiche

$$0 \leq \xi' \leq x' \leq b, \quad 0 \leq \tau \leq t \leq b$$

stetig, wobei $b > x_m$ eine endliche Zahl ist. Dies ist eine Volterrasche Doppelintegralgleichung zweiter Art mit der Lösung¹⁾ (die Striche werden im folgenden weggelassen)

$$M(x, t) - M(x, 0) = \int_0^x d\xi \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} K_i(x, t; \xi, \tau) M(\xi, 0) dt, \quad (9)$$

wo K_i die entsprechenden iterierten Kerne sind:

$$K_1 = -\varepsilon(\xi, x), \quad K_i(x, t; \xi, \tau) = - \int_{\xi}^x dy \int_{\tau}^t \varepsilon(y, x) K_{i-1}(y, z; \xi, \tau) dz \quad (10)$$

oder allgemeiner, mit grösserer Freiheit in der Berechnung,

$$K_i(x, t; \xi, \tau) = \int_{\xi}^x dy \int_{\tau}^t K_j(x, t; y, z) K_{i-j}(y, z; \xi, \tau) dz. \quad (11)$$

Unter den vorliegenden Bedingungen ist die resultierende unendliche Reihe immer konvergent²⁾.

Da in diesem Falle der Kern, $\varepsilon(\xi, x)$, nicht von der Zeit abhängt, kann jeder iterierte Kern K_i als Produkt eines rein zeitabhängigen Faktors mit einem zeitunabhängigen Faktor K'_i dargestellt werden. Die zweite der Gleichungen (10) lautet dann

$$K_i(x, t; \xi, \tau) = - \frac{(t - \tau)^{i-1}}{(i-1)!} \int_{\xi}^x \varepsilon(y, x) K'_{i-1}(y, \xi) dy,$$

was durch vollständige Induktion leicht bewiesen werden kann.

Die strenge Lösung des gesamten Mahlproblems hat die Form

$$M(x, t) = f(x, t) e^{-t \int_0^x \varepsilon(x, \alpha) d\alpha}. \quad (12)$$

¹⁾ V. VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégréo-différentielles* (Gauthier-Villars, Paris 1913).

²⁾ V. VOLTERRA, a. a. O.

Um $f(x, t)$ zu berechnen, wird (12) in die Grundgleichung (1) eingesetzt. Es ergibt sich

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} e^{-t \int_0^x \varepsilon(x, \alpha) d\alpha} = \int_x^{x_m} \varepsilon(\xi, x) f(\xi, t) e^{-t \int_0^\xi \varepsilon(\xi, \alpha) d\alpha} d\xi$$

oder, nach Umformung und Integration nach der Zeit,

$$f(x, t) - M(x, 0) = \int_x^{x_m} d\xi \int_0^t \varepsilon(\xi, x) e^{-\tau \left[\int_0^\xi \varepsilon(\xi, \alpha) d\alpha - \int_0^x \varepsilon(x, \beta) d\beta \right]} f(\xi, \tau) d\tau. \quad (13)$$

Die Gleichung (13) unterscheidet sich von (8) nur um den exponentiellen Faktor bei dem Kern. Sie wird deshalb durch dieselbe Transformation wie (8) auf eine Volterrasse Gleichung zweiter Art mit einem stetigen Kern, demselben Integrationsbereich und denselben Konvergenzeigenschaften der Lösung zurückgeführt. Die strenge Lösung ist daher tatsächlich durch (12) gegeben, wobei $f(x, t)$ durch (9) explizite dargestellt ist, wenn dort $M(x, t)$ durch $f(x, t)$ ersetzt wird. Die entsprechenden iterierten Kerne sind durch (10) oder (11) gegeben, wenn man $\varepsilon(\xi, x)$ durch

$$\varepsilon(\xi, x) e^{-\tau \left[\int_0^\xi \varepsilon(\xi, \alpha) d\alpha - \int_0^x \varepsilon(x, \beta) d\beta \right]}$$

ersetzt.

Summary

A mathematical theory of milling processes is developed by deriving and solving a partial integro-differential equation which describes the time-dependent particle size distribution of the milling charge. This basic equation contains a characteristic function of both the mill and the material milled, which is conveniently determined from measurements conducted in accordance with an approximation derived for this purpose from the general theory. This approximation, which can as well be used independently is equally convenient for obtaining experimental evidence of the validity of the general theory. It has been established in a previous paper that this approximation is in agreement with results obtained by experiments.

Several approximate solutions of the basic equation as well as the rigorous one are worked out and an analysis of the semi-empirical Rosin-Rammler formula is given from the point of view of the present theory.

(Eingegangen: 25. September 1953.)

Torsionsschwingungen unter Berücksichtigung der Masse und der Dämpfung der elastischen Glieder¹⁾

Von YIAN-NIAN CHEN, Winterthur²⁾

In gewissen mechanischen Schwingungssystemen mit langen Wellen, die zu Torsionsschwingungen erregt werden, spielen die Massen und Dämpfungen der Wellen selbst eine wesentliche Rolle und dürfen daher nicht vernachlässigt werden. Dieses Problem stellt sich vor allem bei den Schiffsmaschinenanlagen; sie bestehen aus einer Kolbenmaschine, heute meistens einem Dieselmotor, und einem Propeller, die durch eine lange Wellenleitung verbunden sind. In der vorliegenden Arbeit werden Verfahren entwickelt, um solche Probleme zu lösen. Die Wellenleitung wird im folgenden «Zwischenleitung» genannt, um Verwechslungen mit den elastischen Wellen zu vermeiden, die eben in dieser Zwischenleitung hin- und herwandern.

1. Die Torsionsschwingungen der Zwischenleitung

In Figur 1 bedeuten:

- Θ_1, R_1 das Massenträgheitsmoment bzw. den Reibungsbeiwert des Motors;
- Θ_0, R_0 das Massenträgheitsmoment bzw. den Reibungsbeiwert des Propellers;
- ϑ, R das Massenträgheitsmoment bzw. den Reibungsbeiwert je Längeneinheit der Zwischenleitung;
- J_p das polare Flächenträgheitsmoment des Querschnittes der Zwischenleitung;
- G den elastischen Gleitmodul der Zwischenleitung;
- $M \sin \omega t$ bzw. $M e^{i\omega t}$ das erregende Drehmoment des Motors.

Der Flächensatz beschreibt die Bewegung φ des Leitungselementes dx (Figur 2):

$$\vartheta dx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} dx - d\mathcal{M}_R,$$

wobei \mathcal{M} das zu übertragende Drehmoment und \mathcal{M}_R das Dämpfungsmoment darstellen. Drehmoment \mathcal{M} und Verdrehung φ sind durch die Beziehung aus der Elastizitätslehre verknüpft:

$$\mathcal{M} = J_p G \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

¹⁾ Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit verdanke ich Herrn A. KLEINER, Chefingenieur der Forschungsabteilung für Dynamik, Gebrüder Sulzer AG., Winterthur.

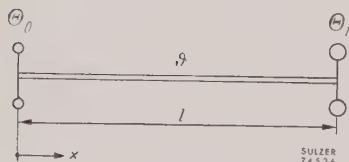
²⁾ Gebrüder Sulzer AG.

Das Dämpfungsmoment M_R wirkt immer der Bewegung entgegen, also in Gegenphase mit der Geschwindigkeit, daher

$$dM_R = R \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx.$$

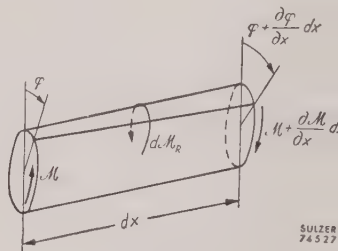
Damit wird

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{R}{\vartheta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{J_p G}{\vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$



Figur 1

Zweimassensystem mit elastischer Zwischenleitung.



Figur 2

Leitungselement.

Die partielle Differentialgleichung wird nach D'ALEMBERT durch die Funktion befriedigt:

$$\varphi = f\{\varepsilon(ct+x)\} + g\{\varepsilon(ct-x)\} \quad [\varepsilon = \text{Konstante}],$$

welche zwei Wanderwellen darstellt, die sich in entgegengesetzten Richtungen mit der Geschwindigkeit c durch die Leitung fortpflanzen. Einsetzen dieses Ausdruckes φ in die partielle Differentialgleichung ergibt

$$\varepsilon \left(c^2 - \frac{J_p G}{\vartheta} \right) [f''\{\varepsilon(ct+x)\} + g''\{\varepsilon(ct-x)\}] + \frac{R}{\vartheta} c [f'\{\varepsilon(ct+x)\} + g'\{\varepsilon(ct-x)\}] = 0,$$

wenn $f'\{\dots\}$ als Abkürzung von $df\{\dots\}/d\{\dots\}$ usw. eingeführt wird. Diese Gleichung kann noch weiter vereinfacht werden, falls folgende Beziehung besteht

$$f''\{\varepsilon(ct+x)\} + g''\{\varepsilon(ct-x)\} = \delta [f'\{\varepsilon(ct+x)\} + g'\{\varepsilon(ct-x)\}]$$

mit δ als Konstante. Man erhält dann

$$[f''\{\varepsilon(ct+x)\} + g''\{\varepsilon(ct-x)\}] \left\{ \varepsilon c^2 - \varepsilon \frac{J_p G}{\vartheta} + \delta \frac{R}{\vartheta} c \right\} = 0$$

er

$$\varepsilon c^2 - \varepsilon \frac{J_p G}{\vartheta} + \delta \frac{R}{\vartheta} c = 0, \quad (2)$$

aus sich die noch unbekannte Geschwindigkeit c ermitteln lässt.

Diese Vereinfachung wird offenbar durch eine Exponentialfunktion für q ermöglicht, die dann die Lösung bildet, nämlich

$$q = A e^{i(c t + x + \alpha') \omega / c} + B e^{i(c t - x + \beta') \omega / c}$$

der

$$q = A e^{i(\omega t + \omega x / c + \alpha)} + B e^{i(\omega t - \omega x / c + \beta)},$$

in ω die Kreisfrequenz des erregenden Drehmomentes und A, B, α, β die Integrationskonstanten sind. Es wird später noch gezeigt, dass die Lösung die aufzustellenden Randbedingungen befriedigt. Die Konstanten ε und δ in der Gleichung (2) sind dann

$$\varepsilon = \frac{i \omega}{c}, \quad \delta = 1,$$

und die Gleichung (2) wird

$$i \frac{\omega}{c} c^2 - i \frac{\omega}{c} \cdot \frac{J_p G}{\vartheta} + \frac{R}{\vartheta} c = 0$$

der

$$c = \sqrt{\frac{J_p G / \vartheta}{1 + R^2 / (\omega^2 \vartheta^2)}} \sqrt{1 + i \frac{R}{\omega \vartheta}}.$$

Der Ausdruck $R / (\omega \vartheta)$ ist immer sehr klein gegen 1, darum lässt sich die Formel der Geschwindigkeit vereinfachen zu

$$c \approx c_r \left(1 + i \frac{R}{2 \omega \vartheta} + \frac{R^2}{8 \omega^2 \vartheta^2} \right) \left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 \vartheta^2} \right)^{-1/2}$$

mit

$$c_r = \sqrt{\frac{J_p G}{\vartheta}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c erscheint in komplexer Form infolge der Wirkung der Dämpfung R . Der reziproke Wert von c :

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_r} (a - i b)$$

enthält zwei Größen

$$a = \left(1 + \frac{R^2}{8 \omega^2 \vartheta^2} \right) \quad \text{und} \quad b = \frac{R}{2 \omega \vartheta},$$

won von a nur wenig von 1 verschieden und b viel kleiner als 1 und hauptsächlich von der Dämpfung $R / (2 \omega \vartheta)$ bestimmt ist.

Die Lösung für φ wird:

$$\varphi(x, t) = A e^{+b \omega x / c_r} e^{i(\omega t + a \omega x / c_r + \alpha)} + B e^{-b \omega x / c_r} e^{i(\omega t - a \omega x / c_r + \beta)}.$$

Wenn der Ausdruck Impedanz z :

$$z = u + i v = \frac{b \omega}{c_r} + \frac{i a \omega}{c_r}$$

eingeführt wird, wird der Winkelausschlag φ am Ort x zur Zeit t :

$$\varphi(x, t) = A e^{u x} e^{i(\omega t + v x + \alpha)} + B e^{-u x} e^{i(\omega t - v x + \beta)}. \quad (3)$$

Wegen der Dämpfung, die sich im reellen Teil u der Impedanz z ausdrückt, ist es nicht möglich, den Winkelausschlag φ auf eine reine Sinusfunktion zurückzuführen.

2. Das Zweimassensystem mit elastischer Zwischenleitung

An beiden Enden der elastischen Zwischenleitung stehen je eine Masse m Trägheits- und Reibungsmoment (Figur 1). Auf der einen Masse Θ_1 wirkt noch eine periodische Erregung $M e^{i \omega t}$.

2.1. Randbedingung an der Stelle $x = l$ (Motorseite)

Die Randbedingung lautet

$$\Theta_1 \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial t^2} + R_1 \frac{\partial \varphi_l}{\partial t} + J_p G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_l = M e^{i \omega t}.$$

Nach Einsetzen der Gleichung (3) ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left\{ -\omega^2 \Theta_1 + i \omega R_1 + J_p G \frac{\omega}{c_r} (b + i a) \right\} A e^{b \omega l / c_r} e^{i(\omega t + a \omega l / c_r + \alpha)} \\ & + \left\{ -\omega^2 \Theta_1 + i \omega R_1 - J_p G \frac{\omega}{c_r} (b + i a) \right\} B e^{-b \omega l / c_r} e^{i(\omega t - a \omega l / c_r + \beta)} = M e^{i \omega t}. \end{aligned}$$

Werden die Impedanz der Masse: $Z_1 = -\dot{p}_1 + i q_1 = -\omega^2 \Theta_1 + i \omega R_1$ und der Profilwert der Zwischenleitung: $k = J_p G$ eingeführt, so erhält man nach Aufheben der Glieder $e^{i \omega t}$ auf den beiden Seiten der Gleichung

$$A e^{i \alpha} (Z_1 + k z) e^{z l} + B e^{i \beta} (Z_1 - k z) e^{-z l} = M. \quad (4)$$

2.2. Randbedingung an der Stelle $x = 0$ (Propellerseite)

Die Bedingung ist hier

$$\Theta_0 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} + R_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} - J_p G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 = 0.$$

Einsetzen der Gleichung (3) ergibt

$$A e^{i\alpha} (Z_0 - k z) + B e^{i\beta} (Z_0 + k z) = 0 \quad (5)$$

mit

$$Z_0 = -\omega^2 \Theta_0 + i \omega R_0 = -p_0 + i q_0.$$

Aus den beiden simultanen Gleichungen (4) und (5) folgen die beiden Unbekannten $A e^{i\alpha}$ und $B e^{i\beta}$ zu

$$\begin{aligned} A e^{i\alpha} &= M(Z_0 + k z) \{ (Z_1 + k z) (Z_0 + k z) e^{z l} - (Z_1 - k z) (Z_0 - k z) e^{-z l} \}^{-1}, \\ B e^{i\beta} &= -M(Z_0 - k z) \{ (Z_1 + k z) (Z_0 + k z) e^{z l} - (Z_1 - k z) (Z_0 - k z) e^{-z l} \}^{-1}, \end{aligned}$$

und der Winkelausschlag:

$$\varphi(x, t) = M \left\{ (Z_0 + k z) e^{u x} e^{i(\omega t + v x)} - (Z_0 - k z) e^{-u x} e^{i(\omega t - v x)} \right\} \times \left\{ (Z_1 + k z) (Z_0 + k z) e^{z l} - (Z_1 - k z) (Z_0 - k z) e^{-z l} \right\}^{-1}. \quad (6)$$

Somit ist erwiesen, dass der Lösungsansatz der Exponentialfunktion die Randbedingungen erfüllt.

Die ganze abgeleitete Beziehung lässt sich im folgenden Abschnitt mit Vektoren noch viel deutlicher darstellen.

3. Vektorielle Darstellungen

Die Randbedingung auf der Propellerseite, Gleichung (5), lässt sich unter Einführung der Vektoren $A = A e^{i\alpha}$ und $B = B e^{i\beta}$ umformen zu¹⁾

$$Z_0 (A + B) - k z (A - B) = 0. \quad (7)$$

Zur vektoriellen Darstellung dieser Gleichung nimmt man zunächst einen Einheitsvektor

$$A_0 + B_0 = \frac{A + B}{|A + B|}$$

an und bildet aus ihm den Vektor $Z_0 (A_0 + B_0)$ (vgl. Figur 3). Mit diesem als Durchmesser zeichnet man einen Halbkreis, dann ist die vom Anfangspunkt O unter Winkel α $[\text{ctg } \alpha = b/a = R/(2 \omega \vartheta)]$ gezogene Sehne der Vektor $k u (A_0 - B_0)$, woraus sich der Vektor $(A_0 - B_0)$ bestimmen lässt. Aus $(A_0 + B_0)$ und $(A_0 - B_0)$ können die beiden Vektoren A_0 und B_0 konstruiert werden (siehe Figur 3).

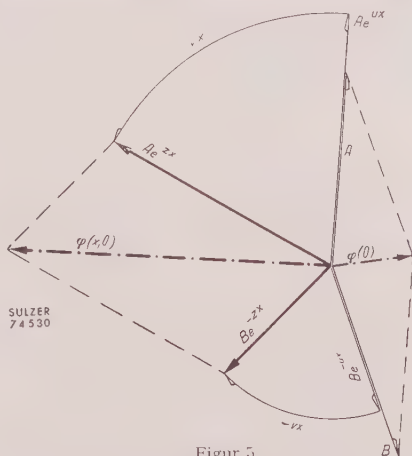
Die Randbedingung auf der Motorseite aus Gleichung (4)

$$\{Z_1 + k z\} A e^{z l} + \{Z_1 - k z\} B e^{-z l} = M \quad (8)$$

kann dann von den beiden Vektoren A_0 und B_0 ausgehend dargestellt werden.

¹⁾ O. LUTZ, *Resonanzschwingungen in den Rohrleitungen von Kolbenmaschinen*, Ber. Labor. Verbrennungskraftmaschinen, Technische Hochschule Stuttgart, Heft 3 (1934).

In Figur 4 wird zunächst aus A_0 der Vektor $(Z_1 + k z) A_0$ konstruiert und dann mit e^{ux} multipliziert. Nach Drehen des neuen Vektors um den Winkel $+v x$ kommt der Vektor $(Z_1 + k z) A_0 e^{zx}$ zustande. Analog bildet man aus Vektor B_0 in der Reihenfolge nach die Vektoren $(Z_1 - k z) B_0$, $(Z_1 - k z) B_0 e^{-ux}$, $(Z_1 - k z) B_0 e^{-zx}$. Aus den beiden Vektoren $(Z_1 + k z) A_0 e^{zx}$ und $(Z_1 - k z) B_0 e^{-zx}$



Figur 5

Bestimmung des Winkelausschlages φ für eine beliebige Stelle x zur Zeit $t = 0$.

lässt sich die Resultierende M_0 bilden. Nach Gleichung (8) besteht dann die Beziehung

$$M_0 = M \frac{A_0}{A} = M \frac{B_0}{B}$$

oder umgekehrt

$$A = A_0 \frac{M}{M_0}, \quad B = B_0 \frac{M}{M_0}. \quad (9)$$

Somit sind die beiden Vektoren A und B bekannt.

Für irgendeine Stelle x lässt sich der Winkelausschlag φ zur Zeit t gemäß Gleichung (3) wie folgt ermitteln. In Figur 5 geht man von den Vektoren A und B aus und bildet $A e^{ux}$ und $B e^{-ux}$, diese werden um den Winkel $+v x$ bzw. $-v x$ gedreht und deren Resultierende gebildet. Dann ist der neue Vektor gleich dem Winkelausschlag φ an der Stelle x zur Zeit $t = 0$:

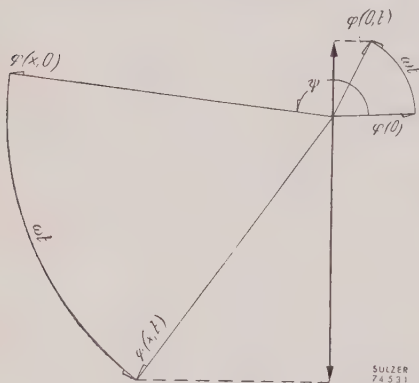
$$\varphi(x, t = 0) = A e^{zx} + B e^{-zx}.$$

Nach weiterer Drehung dieses Vektors um den Winkel ωt erhält man den Ausschlag zur Zeit t : $\varphi(x, t) = \varphi(x, 0) e^{i\omega t}$ (vgl. Figur 6).

Da das erregende Drehmoment $M \sin \omega t$ tatsächlich nur dem imaginären Teil von $M e^{i\omega t}$ entspricht, ist der wirkliche Ausschlag auch nur durch den

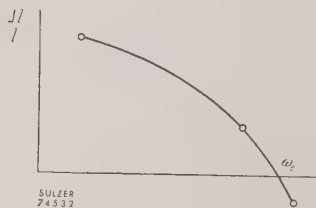
imaginären Teil von $q(x, t)$ dargestellt, also nur durch dessen vertikale Komponente, wie in Figur 6 gezeigt. Der Winkelausschlag an der Stelle $x = 0$ zur Zeit t : $\varphi(0, t) = \varphi(0) e^{i\omega t}$ bzw. $\varphi(0) \sin \omega t$ lässt sich auch zeichnen. Der Winkel zwischen den Vektoren $\varphi(x, 0)$ und $\varphi(0)$ stellt ihre Phasenverschiebung dar. Im dämpfungsfreien Fall ist $\psi = 0$ oder π .

Fallen die beiden Vektoren $(Z_1 + k z) A_0 e^{z l}$ und $(Z_1 - k z) B_0 e^{-z l}$ in Fig. 6 in gleiche Richtung, ist M_0 am grössten, dann sind A, B und damit φ am kleinsten. Das heisst, das System wird sehr schwach zum Schwingen erregt.



Figur 6

Die Winkelausschläge $\varphi(x, t)$ und $\varphi(0, t)$.



Figur 7

Die Restgliedkurve $\Delta l / l = f(\omega)$.

Ein Resonanzfall liegt aber vor, wenn die beiden erwähnten Vektorkomponenten von M_0 entgegengesetzt liegen. Somit lässt sich die Eigenfrequenz folgendem Weg bestimmen. Zunächst wird ein passendes ω als Kreisfrequenz gewählt und diese beiden Vektoren konstruiert. Man ermittelt den nötigen Winkel $\nu \Delta l$, um sie in entgegengesetzte Richtungen zu bringen. Für eine gewisse Länge $l + \Delta l$ der Leitung des Schwingungssystems ist die gewählte Kreisfrequenz ω bereits die Eigenkreisfrequenz. Für eine Länge l wird die Eigenkreisfrequenz

$$\omega_e = \omega \left(\frac{l + \Delta l}{l} \right)^n$$

sein, wobei der Exponent n zwischen 1/2 und 1 liegt und noch abzuschätzen ist. Sind die Massen Θ_0 und Θ_1 überwiegend gross, so ist n ungefähr gleich 1. Sonst wird n bei sehr langer Zwischenleitung nahe 1 liegen. Nach Abschätzung von n erhält man eine neue Kreisfrequenz und wiederholt mit ihr den ganzen Vorgang nochmals, und so weiter. Die so gefundene Grösse $\Delta l / l$ wird über einer Kurve aufgetragen, deren Schnittpunkt mit der ω -Achse die Eigenfrequenz darstellt (siehe Figur 7).

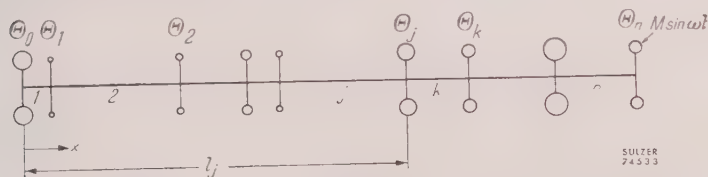
4. Mehrmassensystem mit Erregung an nur einer Endmasse

Figur 8 stellt ein $(n-1)$ -Massensystem dar. Ein Erregungsmoment $M \sin \omega t$ wirkt auf die Endmasse n . Für eine beliebige Masse j mit Massenträgheitsmoment Θ_j gilt folgende Bewegungsgleichung:

$$\Theta_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + R_j \frac{\partial \varphi}{\partial t} + J_{pj} G \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} - J_{pk} G \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \quad (1)$$

$$\varphi_j = A_j e^{u_j x} e^{i(\omega t + v_j x + \alpha_j)} + B_j e^{-u_j x} e^{i(\omega t - v_j x - \beta_j)}$$

den linken Leitungsteil j ;



Figur 8

$(n+1)$ -Massensystem mit Erregung an der Endmasse n .

$$\varphi_k = A_k e^{u_k x} e^{i(\omega t + v_k x + \alpha_k)} + B_k e^{-u_k x} e^{i(\omega t - v_k x + \beta_k)}$$

den rechten Leitungsteil k ;

R_j = Reibungsbeiwert der Masse j ;

J_j = polares Querschnittsträgheitsmoment im Leitungsteil j ;

J_k = polares Querschnittsträgheitsmoment im Leitungsteil k .

Da q_j und q_k werden die Ableitungen nach x und t gebildet und in die obige Differentialgleichung eingesetzt. Unter Berücksichtigung der Kontinuitätsbedingung $\varphi = \varphi_j = \varphi_k$ bei $x = l_j$ erhält man

$$\frac{1}{k_k |z_k|^2} \bar{z}_k \{ (Z_j + k_j z_j) A_j e^{z_j l_j} + (Z_j - k_j z_j) B_j e^{-z_j l_j} \} = A_k e^{z_k l_j} - B_k e^{-z_k l_j}$$

und

$$A_j e^{z_j l_j} + B_j e^{-z_j l_j} = A_k e^{z_k l_j} + B_k e^{-z_k l_j},$$

wobei $\bar{z}_k = u_k - i v_k$ die konjugierte Impedanz von z_k ist. Die beiden Gleichungen stellen die Randbedingung der Masse j dar.

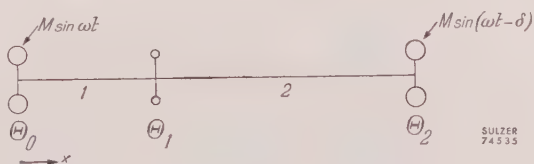
Wären $A_j e^{z_j l_j}$ und $B_j e^{-z_j l_j}$ bekannt, dann könnten $A_k e^{z_k l_j}$ und $B_k e^{-z_k l_j}$ aus dieser Randbedingung bestimmt werden. In Figur 9 wird gezeigt, dass aus $A_j e^{z_j l_j}$ und $B_j e^{-z_j l_j}$ die Vektoren $(Z_j - k_j z_j) A_j e^{z_j l_j}$ und $(Z_j + k_j z_j) B_j e^{-z_j l_j}$ bilden lassen. Multipliziert man deren Resultierende (V) mit

$$\frac{1}{k_k |z_k|^2} u_k \quad \text{bzw.} \quad -i \frac{1}{k_k |z_k|^2} v_k,$$

omit der Winkelausschlag q an dieser Stelle nach Gleichung (3) bestimmt werden kann.

5. Dreimassensystem mit Erregung an beiden Endmassen

Wenn in einem Mehrmassensystem mehr als eine Masse durch äussere Momente erregt wird, dann kann man keine Lösung in analytischer Form erbringen. Es müssen die zeitlichen Fortpflanzungswege der von den erregenden Impulsen ausgelösten Wellen verfolgt werden, bis stationärer Zustand erreicht wird, das heisst, bis sich überall stehende Wellen bilden. Diese Fortpflanzungswege im (x, t) -Diagramm heissen Charakteristiken.



Figur 10

Dreimassensystem mit Erregung an beiden Endmassen.

In Figur 10 wird ein Dreimassensystem gezeigt, an dessen beiden Endmassen die erregenden Drehmomente wirken. Man fängt mit dem Anlaufvorgang an. Von den beiden Endmassen 0 und 2 gehen die erregenden Impulse als wandernde Wellen nach der Masse 1 hin. Die von der Masse 0 ausgehende Welle besteht jetzt aus dem hingehenden Teil allein, also

$$\varphi = B_1 e^{-u_1 x} e^{i(\omega t - v_1 x + \beta_1)}$$

und wird durch die Randbedingung:

$$\Theta_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + R_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - J_{z1} G \frac{\partial \varphi}{\partial x} = M e^{i \omega t}$$

bestimmt. Nach Einsetzen des Ausdruckes φ erhält man

$$B_1 = -M (-Z_0 - k_1 z_1)^{-1}. \quad (10)$$

Diese Beziehung stellt zugleich den momentanen maximalen Schwingungsaus-
schlag der Masse 0, erregt durch das Moment $M e^{i \omega t}$, dar. Es sei angenommen,
die Welle B_1 erreiche die Masse 1 früher als die von der Masse 2 ausgehende und
besitze bei ihrer Ankunft in 1 den Wert:

$$\varphi = B_1 e^{-u_1 l_1} e^{i(\omega t - v_1 l_1 + \beta_1)}.$$

Diese Welle kann nur teilweise über die Masse 1 auf den Leitungsteil 2 über-
gehen, während der übrige Teil in den Leitungsteil 1 zurückreflektiert wird.

Diese beiden Teile sind

$$B_2 e^{-u_2 l_1} e^{i(\omega t - v_2 l_1 + \beta_2)} \quad \text{und} \quad A_1 e^{u_1 l_1} e^{i(\omega t + v_1 l_1 + \alpha_1)}$$

und müssen mit der ursprünglichen Welle folgender Randbedingung an der Masse 1 genügen:

$$\Theta_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + R_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + J_{p1} G \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - J_{p2} G \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 0.$$

Man setzt

$$\varphi_1 = A_1 e^{u_1 l_1} e^{i(\omega t + v_1 l_1 + \alpha_1)} + B_1 e^{-u_1 l_1} e^{i(\omega t - v_1 l_1 + \beta_1)}$$

und

$$\varphi_2 = B_2 e^{-u_2 l_1} e^{i(\omega t - v_2 l_1 + \beta_2)}$$

in die Differentialgleichung ein und erhält

$$(Z_1 + k_1 z_1) A_1 e^{z_1 l_1} + (Z_1 - k_1 z_1) B_1 e^{-z_1 l_1} = k_2 z_2 (-B_2 e^{-z_2 l_1}).$$

Wird das Glied $B_2 e^{-z_2 l_1}$ aus dieser Gleichung und der Kontinuitätsgleichung

$$A_1 e^{z_1 l_1} + B_1 e^{-z_1 l_1} = B_2 e^{-z_2 l_1}$$

eliminiert, so ergibt sich

$$A_1 e^{z_1 l_1} = \frac{Z_1 - k_1 z_1 + k_2 z_2}{-Z_1 - k_1 z_1 - k_2 z_2} B_1 e^{-z_1 l_1}. \quad (11)$$

Figur 11 veranschaulicht die Konstruktion der beiden Wellen $A_1 e^{z_1 l_1}$ und $B_2 e^{-z_2 l_1}$ aus dem erregenden Drehmoment M . Die Nummern im Kreis verfolgen den Vorgang.

1. Gemäss Gleichung (10) ergibt sich B_1 aus $-M$.
2. Aus B_1 wird $B_1 e^{-z_1 l_1}$ gezeichnet.
3. Aus $B_1 e^{-z_1 l_1}$ geht $(Z_1 - k_1 z_1 + k_2 z_2) B_1 e^{-z_1 l_1}$ hervor.
4. Gemäss Gleichung (11) ist der Vektor $(-Z_1 - k_1 z_1 - k_2 z_2) A_1 e^{z_1 l_1}$ bekannt. Damit können seine beiden Komponenten

$$(\rho_1 - k_1 u_1 - k_2 u_2) A_1 e^{z_1 l_1} \quad \text{und} \quad i(-q_1 - k_1 v_1 - k_2 v_2) A_1 e^{z_1 l_1}$$

konstruiert werden, woraus $A_1 e^{z_1 l_1}$ bestimmbar ist.

5. Die Vektoren $A_1 e^{z_1 l_1}$ und $B_1 e^{-z_1 l_1}$ addieren sich schliesslich zu $B_2 e^{-z_2 l_1}$.

Die Welle $B_2 e^{-z_2 l_1}$ wandert nach der Masse 2 fort, trifft unterwegs die von dieser ausgehende Welle

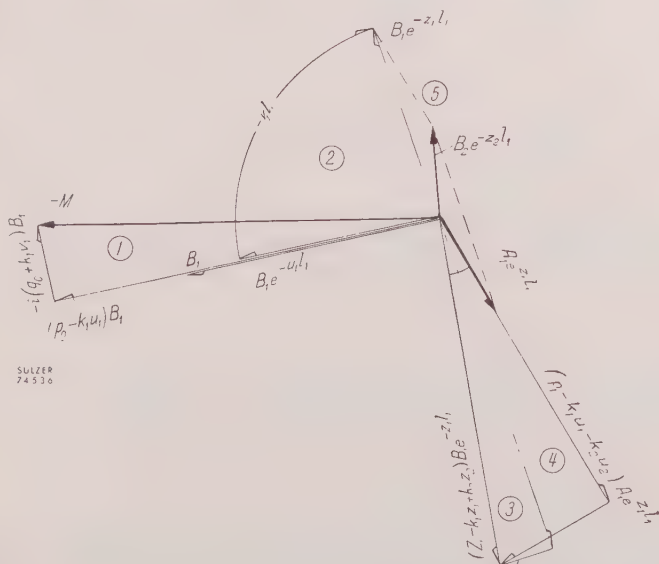
$$\varphi_2 = \frac{-M e^{-i\delta}}{-Z_2 - k_2 z_2} e^{u_2 x} e^{i(\omega t + v_2 x)} \quad [\text{vgl. Gleichung (10)}],$$

reuzt sie, erreicht dann die Masse 2 um die Zeit τ und wird als Welle $A_2 e^{z_2 l} \cdot e^{i\omega \tau}$ reflektiert. Die Randbedingung ist hierbei

$$\Theta_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + R_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + J_{p2} G \frac{\partial \varphi}{\partial x} = M e^{i(\omega t - \delta)}$$

mit

$$q = A_2 e^{z_2 x} e^{i\omega t} + B_2 e^{-z_2 x} e^{i\omega t}, \quad x = l_2 \quad \text{und} \quad t = \tau.$$



Figur 11

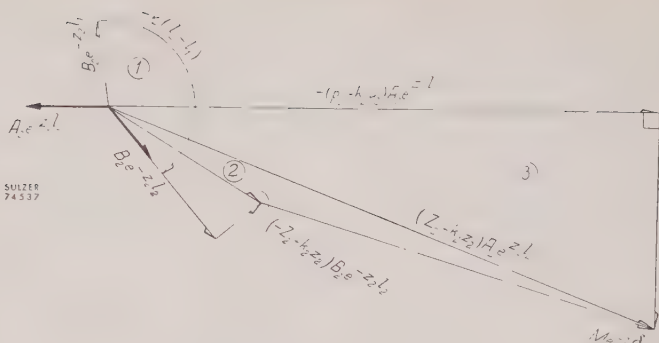
Konstruktion der beiden Vektoren $A_1 e^{z_1 l_1}$ und $B_2 e^{-z_2 l_2}$ aus dem erregenden Drehmoment M .

Nach Einführung des Ausdruckes φ in die Differentialgleichung ergibt sich

$$(-Z_2 + k_2 z_2) B_2 e^{-z_2 l_2} + M e^{-i\delta} = (Z_2 + k_2 z_2) A_2 e^{z_2 l_2}. \quad (12)$$

Der Vorgang der Konstruktion von $A_2 e^{z_2 l_2}$ aus $M e^{-i\delta}$ und $B_2 e^{-z_2 l_2}$ wird in Figur 12 gezeigt.

1. Aus $B_2 e^{-z_2 l_2}$ (von Figur 11 übernommen) wird $B_2 e^{-z_2 l_2}$ konstruiert.
2. Gleichung (12) lässt sich dann darstellen, womit $(Z_2 + k_2 z_2) A_2 e^{z_2 l_2}$ bekannt wird.
3. Aus diesem Vektor findet man $(-p_2 - k_2 u_2) A_2 e^{z_2 l_2}$ und weiter $A_2 e^{z_2 l_2}$.



Figur 12

Konstruktion des Vektors $A_2 e^{z_2 l_2}$ aus $M e^{-i\delta}$ und $B_2 e^{-z_2 l_2}$.

Figur 13a stellt die Fortpflanzungswege oder Charakteristiken der Welle im (x, t) -Diagramm dar. Die Wege sind in jedem Leitungsteil gerade Linien; ihre Neigung bedeutet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, nämlich

$$\operatorname{tg} \alpha_j = \left(\frac{c_r}{a} \right)_j \quad \text{mit } j = 1, 2.$$

Die Wege erfahren eine Knickung, wo sie durch die Mittelmasse 1 gehen. In Figur 13b werden die Amplituden der Wellen in logarithmischem Maßstab dargestellt, zum Beispiel für Welle B:

$$\ln(B e^{-u x}) = \ln B + \ln e^{-u x} = \ln B - u x.$$

Diese Kurven sind wieder Gerade mit Neigungen $\operatorname{tg} \beta = -u$ für die hinlaufenden und $\operatorname{tg} \beta = +u$ für die rücklaufenden Wellen. Für irgendeine Stelle x kann somit die Wellenamplitude abgelesen werden. Sie nimmt mit zunehmendem Wege infolge der Dämpfung b ab.

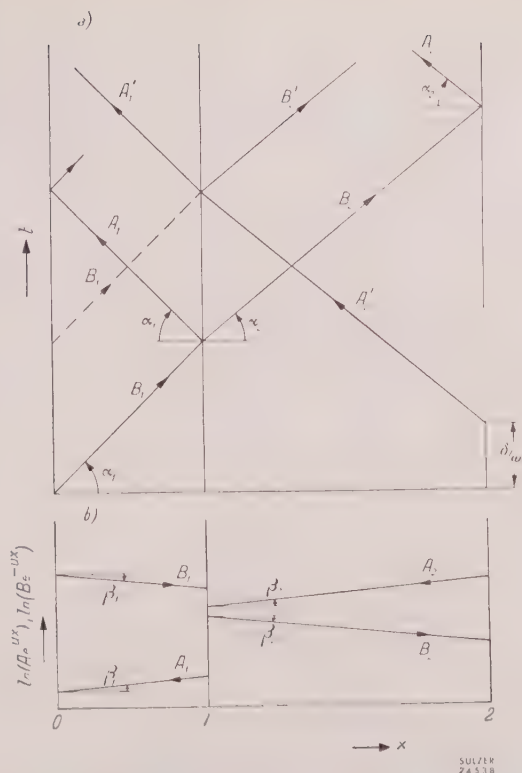
Die oben behandelten Wellen B_1 , A_1 , B_2 und A_2 sind bereits in Figur 13 aufgezeichnet.

Nun kommt man auf die von der Masse 2 ausgelöste Welle A'_2 zurück. Beim Erreichen der Masse 1 hat sie den Wert

$$M e^{-i\delta} - \frac{Z_2}{k_2 z_2} e^{z_2 l_1} e^{i\omega t}.$$

Sie kreuzt hier die von der Masse 0 kommende Welle $B_1 e^{-z_1 l_1} e^{i\omega t}$ und wandert auf den Leitungsteil 1 über, mit veränderter Stärke und unter gleichzeitiger Reflexion. Die beiden neu entstehenden Wellen A'_1 und B'_2 lassen sich aus der Beziehung:

$$\varphi_1 = A'_1 e^{z_1 l_1} e^{i\omega t} + B'_2 e^{-z_1 l_1} e^{i\omega t}$$



Figur 13

a Wellenplan im (x, t) -Diagramm. b Abhängigkeit der Amplituden der Wellen mit dem Weg x .

und

$$\varphi_2 = -\frac{M}{Z_2 - k_2 z_2} e^{z_2 l_1} e^{i\omega(t-\delta)} + B_2' e^{-z_2 l_1} e^{i\omega t}$$

gemäss der Randbedingung an der Masse 1 aus den Wellen B_1 und A_2' ermitteln.

Auf diese Weise können die weiteren Wellen verfolgt werden, bis überall stehende Wellen entstehen.

6. Schwingungssystem mit Verzweigung

Figur 14 zeigt ein Dreimassensystem mit einer angehängten Masse P an der Mittelmasse O durch eine Leitung 3. Man stelle sich etwa vor, die beiden Endmassen M und M' seien zwei Dieselmotoren, welche durch ein gemeinsames

Getriebe O den Propeller P antreiben. An der Masse O müssen folgende Randbedingungen befriedigt werden:

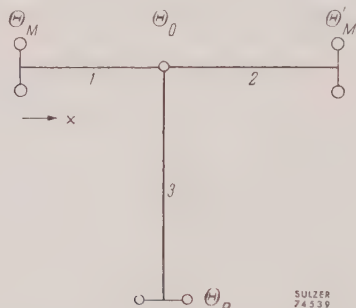
$$\Theta_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + R_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + J_{p1} G \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - J_{p2} G \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - J_{p3} G \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = 0 \quad \text{bei } x = l_1$$

und

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$$

mit

$$\varphi_j = A_j e^{z_j l_1} e^{i \omega t} + B_j e^{-z_j l_1} e^{i \omega t} \quad (j = 1, 2, 3).$$



Figur 14

Dreimassensystem mit einer angehängten Masse.

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} & (Z_0 + k_1 z_1) A_1 e^{z_1 l_1} + (Z_0 - k_1 z_1) B_1 e^{-z_1 l_1} \\ & = k_2 z_2 (A_2 e^{z_2 l_1} - B_2 e^{-z_2 l_1}) + k_3 z_3 (A_3 e^{z_3 l_1} - B_3 e^{-z_3 l_1}). \end{aligned}$$

Aus den drei nach der Masse O wandernden Wellen B_1 , A_2 und A_3 können die reflektierten Wellen A_1 , B_2 und B_3 gemäss dieser Gleichung bestimmt werden. Man fängt ebenfalls mit dem Anlaufvorgang an. Es gehen jetzt die Wellen B_1 und A_2 von der Masse M bzw. M' nach derjenigen O hin, während die Welle A_3 in der Leitung 3 noch fehlt. Erst nachdem eine der beiden vorhergenannten Wellen die Masse O erreicht hat, entstehen im Leitungsteil 1, 2 und 3 die Wellen A_1 , B_2 bzw. B_3 . Wenn die Welle B_3 am Propeller P ankommt, bildet sich als ihre Reflexion die Welle A_3 . Die weitere Behandlung der Wellen erfolgt sinngemäss nach demselben Prinzip wie im vorigen Abschnitt.

7. Zerlegung eines Schwingungssystems in einzelne Teilsysteme

Eine Schiffsdieselanlage wird hier als Beispiel gewählt. Bei der Berechnung der Torsionsschwingungen der Kurbelwelle ist es üblich, ihre Massen und Ela-

tizitäten getrennt zu behandeln. Die Kurbelwelle wird nämlich in einzelne individuelle Massen zerlegt und die dazwischenliegenden elastischen Teile als masselos und dämpfungsfrei angesehen. Anders ist es in einer langen Leitung, welche die Dieselmachine mit dem Propeller verbindet. Ihre Masse muss dann als kontinuierlich verteilt und mit Elastizität und Dämpfung behaftet behandelt werden. Für sie kommt die in der vorliegenden Abhandlung entwickelte Methode zur Anwendung und für die Kurbelwelle die wesentlich einfacheren wohlbekannten Verfahren von HOLZER, BRABEC und andern. Es ist aber schwer, in einem einzigen System zwei Teile nach zwei verschiedenen Methoden zu behandeln. Man sieht sich daher vor die Aufgabe gestellt, die beiden Teile zu trennen.

In Figur 15 stellen Θ_0 bis Θ_n die Dieselmachine dar, Θ_{n+1} das Schwungrad und Θ_{n+m} den Propeller. Zwischen den beiden letzteren liegt die lange Leitung mit lauter angebauten Massen Θ_{n+2} , Θ_{n+3} , ..., Θ_{n+m-1} . Das Schwungrad trennt das System also in zwei Teile verschiedener Natur. Für die $n+m+1$ Massen lassen sich folgende Bewegungsgleichungen anschreiben:

$$\Theta_0 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_0} + R_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_0} - J_{p1} G \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_{l_0} = 0, \quad (0)$$

$$\Theta_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_1} + R_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_1} - J_{p1} G \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_{l_1} - J_{p2} G \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)_{l_1} - M_r e^{i(\omega t + \delta_r)} = 0, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_n \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_n} + R_n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_n} \\ - J_{pn} G \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right)_{l_n} - J_{p(n+1)} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x} \right)_{l_n} = M_v e^{i(\omega t + \delta_n)}, \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{n+1} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_{n+1}} + R_{n+1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_{n+1}} \\ + J_{pn+1} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x} \right)_{l_{n+1}} - J_{p(n+2)} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+2}}{\partial x} \right)_{l_{n+1}} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (n+1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{n+2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_{n+2}} + R_{n+2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_{n+2}} \\ + J_{pn+2} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+2}}{\partial x} \right)_{l_{n+2}} - J_{p(n+3)} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+3}}{\partial x} \right)_{l_{n+2}} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (n+2)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{n+m-1} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_{n+m-1}} + R_{n+m-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_{n+m-1}} \\ + J_{pn+m-1} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+m-1}}{\partial x} \right)_{l_{n+m-1}} - J_{pn+m} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+m}}{\partial x} \right)_{l_{n+m-1}} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (n+m-1)$$

$$\Theta_{n+m} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_{n+m}} + R_{n+m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_{n+m}} + J_{pn+m} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+m}}{\partial x} \right)_{l_{n+m}} = 0, \quad (n+m)$$

wobei $M_\nu e^{i(\omega t - \delta_j)}$ das erregende Moment auf die Masse Θ_j ($j = 1, 2, 3, \dots$), bedeutet und ν seine Ordnungszahl. Spaltet man die Gleichung $(n+1)$ in zwei folgenden

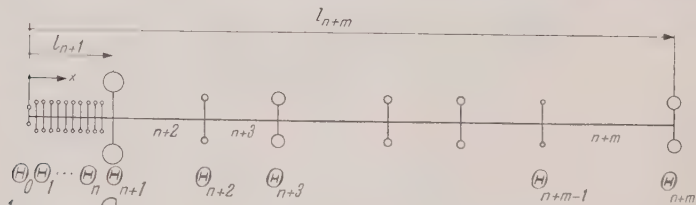
$$\begin{aligned}\Theta_{n+1}^* \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_{n+1}} + R_{n+1}^* \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_{n+1}} + J_{\nu n+1} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x} \right)_{l_{n+1}} &= 0, \quad (n+1)^* \\ \Theta_{n+1}^{**} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{l_{n+1}} + R_{n+1}^{**} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{l_{n+1}} - J_{\nu n+2} G \left(\frac{\partial \varphi_{n+2}}{\partial x} \right)_{l_{n+1}} &= 0, \quad (n+1)^{**}\end{aligned}$$

wobei

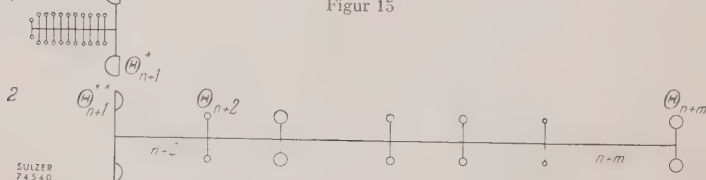
$$\Theta_{n+1}^* + \Theta_{n+1}^{**} = \Theta_{n+1} \quad \text{und} \quad R_{n+1}^* + R_{n+1}^{**} = R_{n+1}$$

sind, so lässt sich das ganze Gleichungssystem in zwei Gruppen zerlegen. Die erste Gruppe umfasst die Gleichungen (0), (1), ..., (n) und $(n+1)^*$, die zweite die Gleichungen $(n+1)^{**}$, $(n+2)$, ..., $(n+m)$. Es ist ersichtlich, dass die erste Gruppe eine einfache Dieselmachine mit dem Schwungrad Θ_{n+1}^* darstellt und die zweite das m -Massen-System Θ_{n+1}^{**} , Θ_{n+2} , ..., Θ_{n+m} . In diesem Sinne kann man sich das ursprüngliche System in die zwei entsprechend Teilsysteme (siehe Figur 16) zerlegt denken. Damit die Schwingungen dann noch unverändert bleiben, muss die Aufteilung von Θ_{n+1} und R_{n+1} nach einer eindeutigen Regel erfolgen.

Das erste Teilsystem führt eine erzwungene Schwingung aus, welche durch $M_\nu e^{i(\omega t - \delta_j)}$ erregt wird. Somit ist ω die Kreisfrequenz dieser erzwungenen



Figur 15

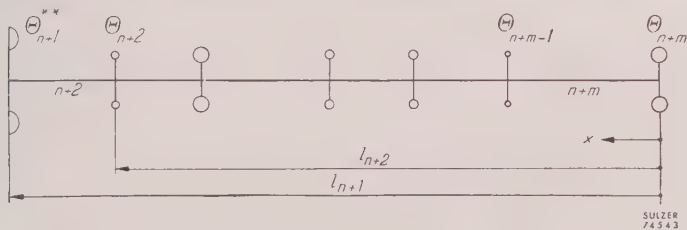


Figur 16

Figur 15. Das $(n+1-m)$ Massen-System stellt eine Schiffsdieselanlage dar; Θ_0 bis Θ_n die Dieselmachine, Θ_{n+1}^* das Schwungrad, Θ_{n+1}^{**} den Propeller und die Leitung zwischen Θ_{n+1}^* und Θ_{n+m} die Zwischenleitung.

Figur 16. - Das System wird in zwei Gruppen zerlegt: Θ_0 bis Θ_{n+1}^* die Dieselmachine mit dem Schwungrad, und Θ_{n+1}^{**} bis Θ_{n+m} die Zwischenleitung mit m Massen.

schwingung. Auf das zweite Teilsystem wirkt keine äussere Kraft, so schwingt es
 frei mit seiner Eigenfrequenz. Da das zweite System in der Tat mit dem ersten fest
 verbunden ist, muss jenes notwendig mit der gleichen Kreisfrequenz schwingen
 wie dieses. Deshalb ist ω zugleich die Eigenkreisfrequenz des zweiten Systems.
 Die Aufgabe besteht also darin, eine Masse Θ_{n+1}^{**} und ihre Dämpfung R_{n+1}^{**} zu
 bestimmen, mit welcher das zweite System eine Eigenkreisfrequenz ω erwerben
 kann. Ist dies getan, so kann das Teilschwingrad Θ_{n+1}^{**} für das erste System
 als $\Theta_{n+1}^{**} = \Theta_{n+1} - \Theta_{n+1}^{**}$ und dessen Dämpfung aus $R_{n+1}^{**} = R_{n+1} - R_{n+1}^{**}$
 bestimmt werden. Da dieses Teilsystem sich mit irgendeinem der üblichen Ver-
 fahren behandeln lässt, ist der Schwingungsausgang von Θ_{n+1}^{**} leicht zu be-



Figur 17

Die Zwischenleitung. Von ihrem rechten Ende aus wird x gerechnet.

stimmen. Darauf wird nicht weiter eingegangen. Dieser Ausschlag wird auf die
 Masse Θ_{n+1}^{**} des zweiten Systemes übertragen, womit die Randbedingung für
 dieses bestimmt ist.

Im folgenden wird die Bestimmung von Θ_{n+1}^{**} und R_{n+1}^{**} erörtert. Um die
 Berechnung zu erleichtern, fängt man bei der Endmasse Θ_{n+m} an, von wo
 aus längs x gerechnet wird (siehe Figur 17), genau so wie im Abschnitt 4 be-
 schrieben. Nach Annahme des Einheitsvektors $A_{(n+m)_0} + B_{(n+m)_0}$ an der Masse
 Θ_{n+m} können über die Massen Θ_{n+m-1} , Θ_{n+m-2} , ..., Θ_{n+2} bis zur Masse Θ_{n+1}^{**}
 die Vektoren $A_{(n+2)_0} e^{z_{n+2} l_{n+1}}$ und $B_{(n+2)_0} e^{-z_{n+2} l_{n+1}}$ bestimmt werden. Für die
 Masse Θ_{n+1}^{**} gilt gemäss Gleichung (7) die Randbedingung

$$\begin{aligned}
 & -Z_{n+1}^{**} (A_{(n+2)_0} e^{z_{n+2} l_{n+1}} + B_{(n+2)_0} e^{-z_{n+2} l_{n+1}}) \\
 & k_{n+2} z_{n+2} (A_{(n+2)_0} e^{z_{n+2} l_{n+1}} - B_{(n+2)_0} e^{-z_{n+2} l_{n+1}})
 \end{aligned}$$

oder, abgekürzt geschrieben,

$$-Z_{n+1}^{**} (A + B) = k_{n+2} z_{n+2} (A - B).$$

Figur 18 stellt diese Gleichung dar. Man bildet aus A und B die Vektoren $A + B$
 und $A - B$. Aus dem letzteren lässt sich der Vektor $k_{n+2} z_{n+2} (A - B)$ konstru-
 eren, von dessen Spitze eine Senkrechte auf den Vektor $A + B$ gerichtet wird.

Dann sind die beiden Strecken

$$\vec{y} = p_{n+1}^{**} (A - B) = \omega^2 \Theta_{n+1}^{**} (A - B)$$

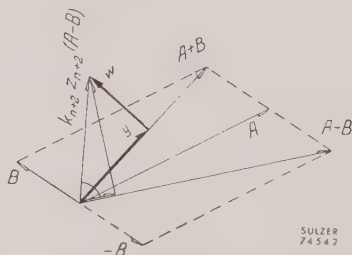
und

$$\vec{w} = -i q_{n+1}^{**} (A + B) = -i \omega R_{n+1}^{**} (A + B)$$

und damit

$$\Theta_{n+1}^{**} = \vec{y} \{ \omega^2 (A + B) \}^{-1} \quad \text{und} \quad R_{n+1}^{**} = i \vec{w} \{ \omega (A + B) \}^{-1}.$$

Die Aufgabe der Zerlegung der Masse Θ_{n+1} und ihrer Dämpfung R_{n+1} damit gelöst.



Figur 18

Bestimmung der Grössen Θ_{n+1}^{**} und R_{n+1}^{**} aus den beiden Vektoren $A = A_{(n+2)_0} e^{z_{n+2} l_{n+1}}$
 $B = B_{(n+2)_0} e^{z_{n+2} l_{n+1}}$.

Θ_{n+1}^{**} kann negativ sein, wenn \vec{y} und $A + B$ entgegengerichtet sind. gegen bleibt die Dämpfung R_{n+1}^{**} immer negativ. Der Ausdruck $i \omega R_{n+1}^{**} q$ stellt dann das vom ersten auf das zweite System übertragene Drehmoment dar. Dieses dient dazu, um die Energiebilanz im zweiten System aufrecht zu erhalten, da seine Dämpfungen mechanische Energie fortwährend vernichten.

Das Ergebnis kann noch anders gedeutet werden: Der Teil rechts vom Schwungrad lässt sich vollständig auf eine einzige Masse mit einer einzigen Dämpfung reduzieren.

8. Torsionsschwingungen ohne Dämpfung

Eine Nockenwelle trägt sehr viel kleine Schwungmassen. Um ihre Eigenfrequenz zu bestimmen, genügt es in den meisten Fällen, die Dämpfung ausser acht zu lassen. In Figur 19 ist eine Nockenwelle mit Antrieb in der Mitte dargestellt. Unter Weglassen ihrer Dämpfungsglieder sind die Randbedingungen für $x = 0$ gemäss Gleichung (7):

$$J_{p1} G \frac{\omega}{c_1} (A_1 - B_1) = 0$$

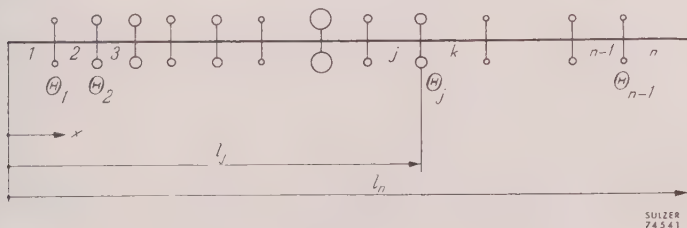
und für eine beliebige Masse j nach Abschnitt 4:

$$\frac{c_k J_{p j}}{c_j J_{p k}} \left\{ \left(i \frac{\omega \Theta_j c_j}{J_{p j} G} + 1 \right) A_j e^{i \omega l_j / c_j} - \left(-i \frac{\omega \Theta_j c_j}{J_{p j} G} + 1 \right) B_j e^{-i \omega l_j / c_j} \right\} \\ = A_k e^{i \omega l_j / c_k} - B_k e^{-i \omega l_j / c_k}$$

und

$$A_j e^{i \omega l_j / c_j} + B_j e^{-i \omega l_j / c_j} = A_k e^{i \omega l_j / c_k} + B_k e^{-i \omega l_j / c_k}.$$

Die Berechnung fängt beim Intervall 1 an, wo $A_1 = B_1$ für $x = 0$ ist. Man wählt ein passendes ω als die gesuchte Eigenkreisfrequenz und nimmt einen beliebigen Wert für die Vektoren $A_1 = B_1$ an. Bis $x = l_1$ gehen sie über in



Figur 19

Das $(n-1)$ -Massen-System stellt eine Nockenwelle dar.

$A_1 e^{i \omega l_1 / c_1}$ bzw. $B_1 e^{-i \omega l_1 / c_1}$ (siehe Figur 20). Man bildet am Vektor $A_1 e^{i \omega l_1 / c_1}$ ein rechtwinkliges Dreieck mit $\operatorname{tg} \psi = \omega \Theta_1 c_1 / J_{p 1} G$; seine Hypotenuse ist dann der Vektor

$$\left(i \frac{\omega \Theta_1 c_1}{J_{p 1} G} + 1 \right) A_1 e^{i \omega l_1 / c_1}.$$

auf gleiche Weise lässt sich

$$\left(-i \frac{\omega \Theta_1 c_1}{J_{p 1} G} + 1 \right) B_1 e^{-i \omega l_1 / c_1}$$

konstruieren. Subtrahiert man diesen von jenem und multipliziert ihr Resultat mit $c_2 J_{p 1} / c_1 J_{p 2}$, so kommt der Vektor

$$A_2 e^{i \omega l_1 / c_2} - B_2 e^{-i \omega l_1 / c_2}$$

zustande. Die Kontinuitätsgleichung liefert ausserdem den Vektor

$$A_2 e^{i \omega l_1 / c_2} + B_2 e^{-i \omega l_1 / c_2},$$

da er gleich

$$A_1 e^{i \omega l_1 / c_1} + B_1 e^{-i \omega l_1 / c_1}$$

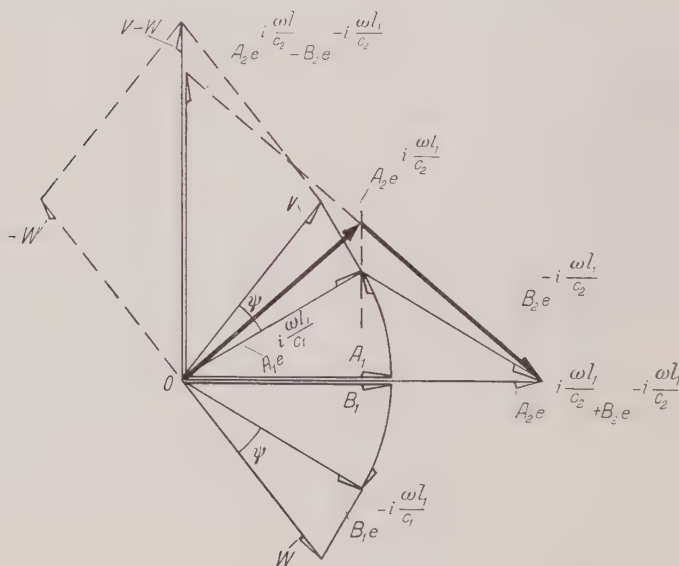
ist. Somit lassen sich $A_2 e^{i \omega l_1 / c_2}$ und $B_2 e^{-i \omega l_1 / c_2}$ aus den beiden zuletzt ge-

wonnenen Vektoren ermitteln (vgl. Figur 20). Sie sind in ihren skalaren Grösse immer gleich und liegen spiegelbildlich um die reelle Achse, mit ihren Pfeilspitzen in demselben Abstand von der imaginären Achse wie die Vektoren $A_1 e^{i\omega l_1/c_1}$ und $B_1 e^{-i\omega l_1/c_1}$.

Da die Vektoren A und B immer symmetrisch in bezug auf die reelle Achse auftreten, genügt es, nur einen von ihnen zu zeichnen, zum Beispiel den Vektor A . Somit kann die Darstellung vereinfacht werden. Man zeichnet in Figur 20 am Vektor $A_1 e^{i\omega l_1/c_1}$ das rechtwinklige Dreieck aOb und zieht die waagrechte Linie \bar{bc} und die lotrechte \bar{ce} durch den Punkt a .

Wird

$$\frac{de}{ce} = \frac{c_2 J_{p1}}{c_1 J_{p2}}$$



$$V = \left(i \frac{\omega \Theta_1 c_1}{J_{p1} G} + 1 \right) A_1 e^{i \frac{\omega l_1}{c_1}}$$

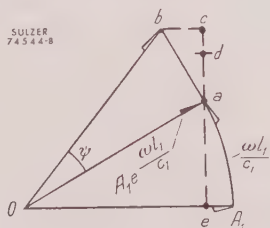
$$W = \left(-i \frac{\omega \Theta_1 c_1}{J_{p1} G} + 1 \right) B_1 e^{-i \frac{\omega l_1}{c_1}}$$

Figur 20

Konstruktion der Vektoren $A_2 e^{i\omega l_1/c_2}$ und $B_2 e^{-i\omega l_1/c_2}$ aus jenen A_1 und B_1 ($A_1 = B_1$).

emacht, dann ist $Od = A_2 e^{i\omega l_1 c_2}$. Aus diesem geht der Vektor $B_2 e^{-i\omega l_1 c_2}$ ohne weiteres hervor. Auf diese Weise geht man von einem Intervall zum nächsten über.

Es ist gewöhnlich $c_j = c_k$, da die Nockenwelle normalerweise aus einem einzigen Material gebaut wird. Ist ausserdem $J_{pj} = J_{pk}$, so fällt der Punkt d mit c

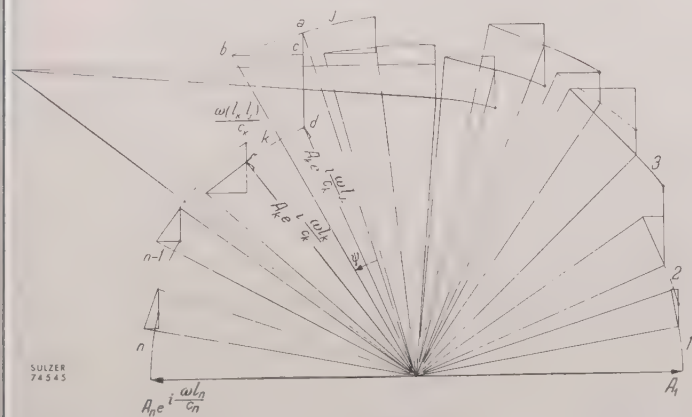


Figur 21

Der vereinfachte Vektorplan für den in Figur 20 dargestellten.

zusammen. Bei einem Übergang zweier Leitungsquerschnitte ohne dazwischenliegende Masse ist $\psi = 0$; dann schrumpft das Dreieck abc zum einzigen Punkt a zusammen. Der Punkt d wird einfach durch das Verhältnis $de/ae = c_2 J_{p1}/c_1 J_{p2}$ bestimmt.

Figur 22 zeigt den ganzen Vektorzug vom Intervall 1 bis n . Wenn ω richtig erraten ist, fällt der letzte Vektor $A_n e^{i\omega l_n c_n}$ in die horizontale Lage. Ist dies nicht der Fall, so muss man es mit einem anderen ω versuchen. Mit etwas Übung kommt man auf diese Weise schnell zum Ziel.



Figur 22

Der ganze Vektorzug vom Intervall 1 bis n für das System der Figur 19.

9. Zusammenfassung

Die partielle Differentialgleichung für ein Torsionsschwingungssystem, unter Berücksichtigung sowohl der Masse wie auch der Dämpfung der elastischen Glieder, lässt sich streng lösen, wobei die Schwingungen als hin- und hergehende Wanderwellen behandelt werden. Die Schwingungen lassen sich wegen der Wirkung der Dämpfung nicht durch reine Kreisfunktionen ausdrücken.

Die erzwungenen Schwingungen mit Erregungen an mehr als einer Schwungradmasse können nur durch das Charakteristikenverfahren gelöst werden. Ein Mehrmassensystem, wie eine Schiffsdieselanlage, lässt sich in zwei Teile zerlegen. In einem Teil sind erregende Kräfte vorhanden, im anderen nicht. Diese Trennung gestattet eine wesentliche Vereinfachung der ganzen Schwingungsberechnung.

Für Systeme ohne Dämpfung wird ein graphisches Verfahren zur Bestimmung der Eigenfrequenz entwickelt, welches einfacher als die bisher bekannten rechnerischen Methoden ist.

Résumé

Un système mécanique composé de masses discrètes reliées entre elles par des arbres élastiques dont ni la masse ni l'amortissement ne sont négligeables, est susceptible de vibrations de torsion. Dans le cas le plus général, le problème se résout – d'après D'ALEMBERT – par deux ondes élastiques opposées dans le sens de propagation. Du fait de la présence d'un amortissement dans les arbres élastiques, les vibrations ne se laissent plus exprimer par de simples fonctions trigonométriques.

Les vibrations forcées entretenues en plusieurs endroits du système se résolvent par la méthode des caractéristiques. Tout système à masses multiples, comme les installations motrices des bateaux, se laisse scinder en deux parties, l'une comprenant toutes les perturbations, l'autre n'en contenant aucune. Cette division amène une simplification appréciable du calcul des vibrations.

Un procédé graphique de calcul de la fréquence propre a été établi pour tous les systèmes à amortissement nul, mais où la masse des arbres élastiques n'est pas négligeable. Ce procédé est plus expéditif que toutes les méthodes analytiques connues.

(Eingegangen: 17. September 1953.)

On the Dynamics of Plastic Circular Plates¹⁾

By H. GEOFFREY HOPKINS and WILLIAM PRAGER, Providence, R.I., U.S.A.²⁾

1. Introduction

The general problem of plastic deformations in structures subjected to dynamic loading is very complex. So far only the simplest possible physical situations have been treated theoretically. These include the propagation of plane waves along a rod ([1] to [4])³⁾, the propagation of spherical waves in an infinite medium [5], and transverse impact on cables and membranes [6], [7], beams ([8] to [10]), and frames [11]. Since an exhaustive bibliography of this work is beyond the scope of this paper, only a few representative references are given.

The only theoretical work on transverse impact on plastic plates of which the authors are aware is that of BAKHSHIYAN [12] and KOCHETKOV [13]. These authors seem to be primarily interested in the piercing of armour plate by a projectile. They neglect all bending stresses in the plate, taking account only of the shearing stresses along the generators of coaxial cylinders around the path of the projectile which is supposed to be normal to the plate. In the present paper, the usual assumption of the theory of thin plates is adopted according to which the bending stresses and shearing stresses parallel to the surface of the plate far exceed the shearing stresses normal to the plate surface. Although the shear force resulting from the latter shearing stresses is taken into account in the equation of dynamic equilibrium, these shearing stresses are neglected in the yield condition.

In a previous paper [14], the authors discussed the load carrying capacities of thin circular plates made of a plastic-rigid material that obeys TRESCA's yield condition and the associated flow rule. Various conditions of rotationally symmetric loading and edge support were considered. In the present paper, the same type of analysis is applied to discuss the dynamic behavior of a simply supported circular plate subjected to a uniformly distributed load which is brought on suddenly and, after being kept constant during a certain interval of time, is removed suddenly.

¹⁾ The results presented in this paper were obtained in the course of research sponsored by the Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground, under Contract DA-19-020-ORD-798.

²⁾ Brown University.

³⁾ Numbers in square brackets refer to the Bibliography, page 330.

2. Equation of Dynamic Equilibrium. Yield Condition and Flow Rule

Let r, φ, z be cylindrical coordinates, the origin being at the center of the undeformed plate's middle surface, and the z -axis pointing vertically downwards. Furthermore, let R be the plate radius, w the deflection, M the bending moment caused by the radial stresses, and N the bending moment caused by the circumferential stresses¹). The variation of the rotationally symmetric states of stress and deflection will then be specified by giving w, M , and N as functions of the radial coordinate r and the time t .

The equation of dynamic equilibrium of the plate is readily obtained simply by including the inertia load in the equation of equilibrium given in the earlier paper [14]. If the mass per unit area of the middle surface is denoted by μ , the inertia load equals $-\mu w_{tt}$, and the equation of dynamic equilibrium takes the form (see equation (6) of [14]):

$$(r M)_t - N = r Q = - \int_0^r (\phi - \mu w_{tt}) r dr, \quad (1)$$

where ϕ is the applied load intensity and Q the shear force transmitted across unit arc length of the cylinder of radius r .

Equation (1) is independent of the mechanical properties of the plate material. As in [14] these properties are specified by the yield condition and flow rule. The yield condition specifies those states of stress M, N under which plastic flow can occur. For each of these 'yield states of stress', the flow rule makes a statement regarding the rates of curvature

$$\kappa = -w_{rrt}, \quad \lambda = -\frac{1}{r} w_{rt} \quad (2)$$

that can occur under the considered yield state.

The following geometrical representation of yield condition and flow rule is convenient. Let the yield state M, N be represented by the point with the rectangular Cartesian coordinates M, N in 'stress space'. The locus of the points representing all possible yield states is called the 'yield locus'; it represents the yield condition. If κ, λ are rates of curvature that are possible under the yield state M, N , associate the 'flow vector' with the components κ, λ along the coordinate axes in stress space with the point M, N on the yield locus. The flow rule then establishes a geometrical relation between the points of the yield locus and the associated flow vectors.

The yield condition and flow rule used in this paper are obtained from TRESCA's yield condition and the associated flow rule. For details of the derivation the reader is referred to [14]; the results are as follows.

¹) Since subscripts will be used in the following to indicate differentiation, the notation M, N seems preferable to the usual notation M_r, M_φ . Similarly, κ, λ will be used instead of κ_r, κ_φ to denote the rates of curvature.

The yield locus is the hexagon $ABCDEF$ in Figure 1 where M_0 denotes the bending moment necessary to bend the plastic plate into a cylindrical surface. If the considered yield state is represented by a point P other than a vertex of the yield hexagon, the flow vector is normal to the side containing P and is directed towards the exterior of the hexagon. If the considered yield state is represented by a vertex Q of the yield hexagon, the flow vector may have the direction of the exterior normal to either of the two sides meeting at Q or to any direction between these two limiting directions.

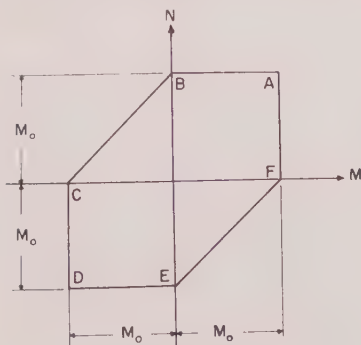


Figure 1
TRESCA yield hexagon.

It will appear later that only yield states represented by points on AB will occur in the problem discussed in this paper. Accordingly, only the following regimes need to be considered (Figure 1):

$$\text{Regime A: } M = N = M_0; \kappa \geq 0, \lambda \geq 0; \quad (3)$$

$$\text{Regime AB: } 0 < M < M_0, N = M_0; \kappa = 0, \lambda \geq 0; \quad (4)$$

$$\text{Regime B: } M = 0, N = M_0; 0 \geq \kappa \geq -\lambda. \quad (5)$$

There is also the possibility that part of the plate is not yielding at the considered instant. Since elastic deformations are neglected in the present analysis, such a part moves instantaneously as a rigid body, i.e. the rates of curvature κ and λ vanish. According to (2) this means that, at the considered instant, the rate of deflection w_t is independent of r .

3. Circles Separating Different Plastic Regimes. Hinge Circles

If the entire plate were at all times in the same regime, the determination of M , N , and w as functions of r and t would not constitute a difficult problem. For most problems, however, the plate is divided into a central circular region

together with a number of surrounding annular regions, each of these regions being in a different regime. Moreover, the number of regions and the position of their boundaries may vary with time. It therefore becomes necessary to establish relations between the mechanical quantities on the two sides of a circle separating two regimes.

Let \mathcal{C} be such a circle. Dynamic equilibrium requires that the radial bending moment M and the shear force Q are continuous across \mathcal{C} , but the circumferential bending moment N may be discontinuous. The cohesion of the plate material requires that the deflection w and the velocity w_t are continuous across \mathcal{C} , but the acceleration w_{tt} may be discontinuous as will be shown below. Moreover, the rates of curvature κ and λ may be discontinuous across \mathcal{C} . If λ , and hence w_{rt} , is discontinuous across \mathcal{C} , this circle is called a 'hinge circle'. In the present analysis hinge circles replace the yield hinges of the corresponding analysis of plastic beams and frames.

A hinge circle may be considered as the limiting case of a very narrow annulus across which w_{rt} varies rapidly although in a continuous manner. As the width of this annulus tends to zero, the ratio $\kappa:\lambda$ in the annulus becomes infinite. Consequently the regime at a hinge circle must be one of the following A, C, D, F, CD , or $F4$. It follows that w_{rt} must be continuous except, at most at circles where $|M| = M_0$.

The preceding discussion shows that in principle a hinge circle need not be a regime boundary and conversely a regime boundary need not be a hinge circle. However, for the example that is to be discussed in the following, it turns out that except at the plate edge all regime boundaries are in fact hinge circles and vice versa. On account of this we shall not trouble to distinguish between regime boundaries and hinge circles in the following.

In general the radius ϱ of a hinge circle \mathcal{C} varies with time; the hinge circle is called 'stationary' whenever $\varrho_t = 0$. To discuss possible discontinuities of the derivatives of w across a hinge circle \mathcal{C} , represent the variation of ϱ by the curve Γ with the equation $r = \varrho(t)$ with respect to rectangular Cartesian coordinates r, t . Since the deflection w must be continuous across Γ , the derivative of w along Γ is also continuous. Thus,

$$[w_t] + \varrho_t[w_r] = 0, \quad (6)$$

where the brackets indicate the discontinuities of the enclosed quantities across the curve Γ . Now w_t is continuous across Γ ; equation (6) therefore shows that the slope w_r can be discontinuous only across a stationary hinge circle. If the hinge circle \mathcal{C} is not stationary, w_r must be continuous across Γ ; hence

$$[w_{rt}] + \varrho_t[w_{rr}] = 0, \quad (7)$$

where by hypothesis $\varrho_t \neq 0$.

Let us now return to the general case of a stationary or nonstationary hinge circle. From the continuity of the velocity w_t across Γ it follows that

$$[w_{tt}] + \varrho_t[w_{rt}] = 0. \quad (8)$$

Thus, the acceleration w_{tt} must be continuous across a stationary hinge circle but discontinuous across a nonstationary hinge circle because λ , and hence w_{rt} , is by definition discontinuous across such a circle.

Dynamic equilibrium requires M to be continuous across Γ ; thus

$$[M_t] + \varrho_t[M_r] = 0. \quad (9)$$

In deriving equations (6) to (9), we have tacitly assumed that ζ is the only hinge circle that occurs in the considered portion of the plate. If we had to deal with two hinge circles ζ and ζ' , one moving faster than the other and eventually catching up with it, we should have to give special consideration to the conditions at the point of intersection of the curves Γ and Γ' that represent the motions of the two hinge circles.

4. The Mathematical Problem

We are now in a position to formulate the mathematical problem of the motion of a circular plate under uniformly distributed, time-dependent loading $p = p(t)$. It is assumed that the plate is initially flat [$w(r, 0) = 0$] and at rest [$w_t(r, 0) = 0$], and the origin of time is so chosen that the plate begins to yield at $t = 0$. The deflection $w(r, t)$ and the bending moments $M(r, t)$ and $N(r, t)$ are then to be determined in such a manner that certain conditions are fulfilled throughout $0 \leq r \leq R$ for all $t \geq 0$. In enumerating these conditions, we shall first assume that $p(t)$ is continuous. We then have the following conditions.

- (i) w and w_t are continuous in r and t ; the derivatives w_r , w_{rr} , w_{rt} , w_{tt} are piecewise continuous in r and continuous in t , r -discontinuities occurring only at hinge circles. Across a stationary hinge circle w_r and hence w_{rr} and w_{rt} may be discontinuous, but w_{tt} must be continuous. Across a nonstationary hinge circle w_r must be continuous, but w_{rr} , w_{rt} , and w_{tt} may have discontinuities satisfying the equations (7) and (8).
- (ii) M is continuous in r and t ; the derivatives M_r and M_t are piecewise continuous in r and t , r -discontinuities occurring only at hinge circles. These discontinuities must satisfy equation (9). N is piecewise continuous in r and continuous in t .
- (iii) w , M , and N satisfy the equation of dynamic equilibrium, equation (1). At the center of the plate $M - N = M_0$ unless a neighborhood of the center moves as a rigid body with $w_{rt} = 0$ identically in r .

- (iv) The point M, N lies inside or on the yield hexagon of Figure 1. In the first case $w_{,rt} = 0$ throughout the region in which the state of stress is represented by interior points of the yield hexagon. In the second case, the rates of curvature and the bending moments must satisfy the flow rule [equation (3) to (5)].
- (v) At the simply supported edge, $M(R, t) = 0$, $w(R, t) = 0$ for all $t \geq 0$.
- (vi) Initially, $w(r, 0) = 0$, $w_t(r, 0) = 0$ for $0 \leq r \leq R$.

When $p(t)$ is allowed to have discontinuities, all quantities considered above except w and w_t , must be allowed to have corresponding discontinuities in

5. Simply Supported Plate under Uniformly Distributed, Rectangular Load Pulse

Consider a simply supported plate under the action of a uniformly distributed load that is brought on suddenly at $t = 0$, maintained at the constant intensity p during $0 < t < \tau$, and suddenly removed at $t = \tau$. It follows from the limit analysis presented in the earlier paper [14], that dynamic plastic action will occur only if

$$p > p_0 = \frac{6 M_0}{R^2}; \quad (1)$$

for $p = p_0$ the plate yields indefinitely slowly and inertia forces do not arise. When (10) is satisfied, the dynamic behavior of the plate is found to have a different character according as the load is 'medium' ($p_0 < p < 2p_0$) or 'high' ($p > 2p_0$).

a) Medium load ($p_0 < p < 2p_0$)

Two phases must be distinguished in which the motion of the plate is governed by different equations.

Phase I ($0 < t < \tau$). In the indefinitely slow yielding under the load p_0 the originally plane middle surface of the plate is transformed into a cone (see [14]). Guided by this fact consider the motion described by

$$w(r, t) = W(t) \left(1 - \frac{r}{R}\right), \quad (11)$$

where $W(t)$ is a function of t as yet undetermined. This motion satisfies the boundary condition $w(R, t) = 0$ [see (v) above], and the initial conditions (v) will be satisfied if

$$W(0) = W_t(0) = 0. \quad (12)$$

According to (2) the rates of curvature associated with (11) are

$$\kappa = 0, \quad \lambda = \frac{W_t}{R}. \quad (13)$$

When $W_t > 0$ the flow rules (3) to (5) therefore require that

$$0 \leq M \leq M_0, \quad N = M_0. \quad (14)$$

With this value of N and the condition that $M = M_0$ for $r = 0$, the equation of dynamic equilibrium (1) furnishes

$$M = M_0 - \frac{1}{6} \dot{p} r^2 + \frac{\mu}{12} W_{tt} r^2 \left(2 - \frac{r}{R} \right). \quad (15)$$

At the simply supported edge $M(R, t) = 0$ [see (v)]. This condition and the initial conditions (12) will be fulfilled if

$$W(t) = \frac{\dot{p} - \dot{p}_0}{\mu} t^2. \quad (16)$$

Note that this gives $W_t > 0$ as was assumed above. Substitution of (16) into (15) yields

$$\frac{M}{M_0} = 1 - \frac{\dot{p} r^2}{\dot{p}_0 R^2} + \left(\frac{\dot{p}}{\dot{p}_0} - 1 \right) \frac{r^2}{R^2} \left(2 - \frac{r}{R} \right). \quad (17)$$

As r varies from 0 to R , the bending moment (17) is found to decrease monotonically from M_0 to 0 if $\dot{p}_0 < \dot{p} < 2\dot{p}_0$. The first relation (14) is therefore satisfied, and w as given by (11) and (16), $N = M_0$, and M as given by (17) constitute a solution of the problem for $0 < t < \tau$ and $\dot{p}_0 < \dot{p} < 2\dot{p}_0$.

Phase II ($\tau < t < T$). At $t = \tau$ the load \dot{p} is suddenly removed, but the plate will not cease moving until the kinetic energy acquired under the action of \dot{p} has been dissipated in plastic work. The instant at which the plate comes to rest will be denoted as $t = T$. During this second phase of the motion, $\dot{p} = 0$.

It so happens that all conditions of the problem can be satisfied by assuming w to have the form (11) and M to have the form (15) with $\dot{p} = 0$. The function $W(t)$ for the second phase is determined from the conditions that w and w_t are continuous at $t = \tau$ and that $M(R, t) = 0$ for $\tau < t < T$. Thus

$$W(t) = \frac{\dot{p}}{\mu} \tau (2t - \tau) - \frac{\dot{p}_0}{\mu} t^2, \quad (18)$$

$$\frac{M}{M_0} = 1 - \frac{r^2}{R^2} \left(2 - \frac{r}{R} \right). \quad (19)$$

The expression (19) satisfies the first relation (14) for $0 \leq r \leq R$, and equation (18) shows that $W_t > 0$ only when

$$t < T = \frac{\dot{p} \tau}{\dot{p}_0}. \quad (20)$$

At the instant $t = T$ the entire plate comes to rest. The final permanent deflection of the plate is found by replacing t in (18) by T as given in (20) and

substituting the result into (11). Thus

$$w(r, T) = \frac{p(p - p_0)}{\mu p_0} \tau^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right). \quad (22)$$

In particular the central permanent deflection is given by

$$w(0, T) = \frac{I I^*}{\mu p_0}, \quad (23)$$

where $I = p\tau$ is the total pressure impulse acting on the plate, and $I^* = (p - p_0)\tau$ may be called the 'excess pressure impulse', the term 'excess pressure' referring to the excess of the pressure p over the minimum pressure p_0 required to produce plastic deformation.

b) High load ($p > 2 p_0$)

Equation (17) yields

$$M_r(0, t) = 0, \quad M_{rr}(0, t) = 2 \frac{M_0}{R^2} \left(\frac{p}{p_0} - 2 \right). \quad (24)$$

These relations show that the value $M(0, t) = M_0$ is a maximum only if $p < 2 p_0$, but becomes a minimum when $p > 2 p_0$. In the latter case, the bending moment M would assume values in excess of M_0 in the neighborhood of $r = 0$. Since this would violate the yield condition, the expression (17) no longer represents a solution when $p > 2 p_0$. Since M has the tendency of increasing beyond M_0 near the center of the plate, but is prevented from doing this by the yield condition, we must expect that $M = M_0$ over a central circular region $0 \leq r < \rho_0$ when $p > p_0$. Thus the regime *A* applies for the part $0 \leq r < \rho_0$, and the regime *AB* for the rest of the plate. Since $M = N = M_0$ for the regime *A*, the equation of dynamic equilibrium (1) shows that

$$w_{tt} = \frac{p}{\mu}, \quad 0 \leq r < \rho_0. \quad (25)$$

All points of this central region thus move with an acceleration which is independent of r and t .

In the present case the motion of the plate consists of three phases.

Phase I ($0 < t < \tau$). The preceding discussion suggests that in this phase the deflection is of the form

$$w(r, t) = \begin{cases} W(t), & 0 \leq r \leq \rho_0, \\ W(t) \frac{R - r}{R - \rho_0}, & \rho_0 \leq r \leq R, \end{cases} \quad (26)$$

where ϱ_0 is independent of t but depends on \dot{p} in a manner that has yet to be determined. The deflection (25) satisfies the boundary condition $w(R, t) = 0$ and also the initial conditions $w(r, 0) = w_t(r, 0) = 0$ provided that $W(t)$ is chosen so as to satisfy (12).

The rates of curvature associated with (25) are

$$\left. \begin{aligned} \kappa = \lambda = 0, \quad 0 \leq r < \varrho_0, \\ \kappa = 0, \quad \lambda = \frac{W_t(t)}{(R - \varrho_0)r}, \quad \varrho_0 < r \leq R. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Thus λ is discontinuous at $r = \varrho_0$, and the circle $r = \varrho_0$ is a stationary hinge circle. Equations (26) are compatible with the assumption that the regime A applies inside, and the regime AB outside, this circle, except for the boundary circle $r = R$ which is in the regime B because $M(R, t) = 0$. We therefore have

$$\left. \begin{aligned} M = N = M_0, \quad 0 \leq r < \varrho_0, \quad 0 < M < M_0, \\ N = M_0, \quad \varrho_0 < r < R, \quad M = 0, \quad N = M_0, \quad r = R. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

From (24), the first equation (25), and the initial conditions (12), it follows that

$$W(t) = \frac{\dot{p} t^2}{2\mu}. \quad (28)$$

The bending moment M must be continuous across the hinge circle $r = \varrho_0$. Thus $M(\varrho_0, t) = M_0$; moreover, $M(R, t) = 0$. With these boundary conditions and with $w(r, t)$ as specified by (28) and the second equation (25), the equation of dynamic equilibrium (1) applied to $\varrho_0 \leq r \leq R$ yields

$$\frac{\dot{p}}{2\dot{p}_0} = \frac{R^3}{(R - \varrho_0)^2(R + \varrho_0)} \quad (29)$$

and

$$\frac{M}{M_0} = 1 - \frac{R(r - \varrho_0)^3(r + \varrho_0)}{r(R - \varrho_0)^3(R + \varrho_0)}, \quad \varrho_0 \leq r \leq R. \quad (30)$$

According to (30), M decreases monotonically from M_0 to 0 as r increases from ϱ_0 to R . The continued inequality for M in (27) is therefore fulfilled.

Equation (29) determines ϱ_0/R as a function of $\dot{p}/(2\dot{p}_0)$. The value of ϱ_0/R corresponding to a given value of $\dot{p}/(2\dot{p}_0)$ can be read off Figure 2. As \dot{p} increases indefinitely, ϱ_0 is seen to tend towards R .

Phase II ($\tau < t < T_1$). During this phase the radius $\varrho = \varrho(t)$ of the hinge circle is found to decrease from $\varrho(\tau) = \varrho_0$ to $\varrho(T_1) = 0$. Indeed if we assume that the regime A continues to apply near the center of the plate the reasoning which led to equation (28) shows that the diminishing central portion of the plate must preserve whatever velocity it had at $t = \tau$. If the radius of the hinge circle remained constant under these circumstances, the kinetic energy of the

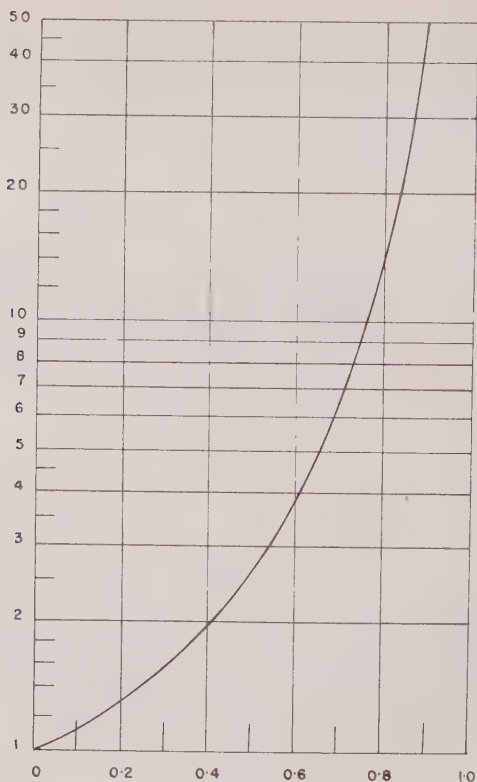


Figure 2

Variation of $p/(2p_0)$ or T_1/t (ordinate) with ρ_0/R or $\rho(t)/R$ (abscissa), respectively.

plate would remain constant in contradiction of the fact that energy is dissipated in plastic deformation. In view of (28), these remarks suggest that the velocity during the second phase is of the form

$$w_t(r, t) = \begin{cases} \frac{p\tau}{\mu}, & 0 \leq r \leq \rho(t), \\ \frac{p\tau}{\mu} \cdot \frac{R-r}{R-\rho(t)}, & \rho(t) \leq r \leq R, \end{cases} \quad (31)$$

where $\rho(t)$ remains to be determined. The reasoning which led to the equation

(9) and (30) now yields the following relations:

$$\varrho_t (R^2 + 2 R \varrho - 3 \varrho^2) = - \frac{2 p_0 R^3}{p \tau}, \quad (32)$$

and

$$\frac{M}{M_0} = 1 + \frac{R (r - \varrho)^2 [r^2 - 2 (R - \varrho) r - \varrho (4 R - 3 \varrho)]}{r (R - \varrho)^2 (R + 3 \varrho)}, \quad \varrho(t) \leq r \leq R. \quad (33)$$

Equation (32) must be integrated under the initial condition that $\varrho(\tau) = \varrho_0$. With the use of (29), we thus obtain the following cubic equation for $\varrho = \varrho(t)$:

$$\left(\frac{\varrho}{R}\right)^3 - \left(\frac{\varrho}{R}\right)^2 - \frac{\varrho}{R} = \frac{2 p_0 t}{p \tau} - 1. \quad (34)$$

Since $\varrho(T_1) = 0$, by the definition of T_1 , equation (34) yields

$$T_1 = \frac{p \tau}{2 p_0}, \quad (35)$$

and the right-hand side of (34) can be written as $(t/T_1) - 1$. It is then seen that equation (34) establishes exactly the same relation between T_1/t and ϱ/R as does equation (29) between $p/(2 p_0)$ and ϱ_0/R . Thus a simple relabeling of the coordinate axes in Figure 2 will enable us to find, from this figure, the value of ϱ/R that corresponds to a given value of T_1/t .

For a fixed value of t , and hence of ϱ , the bending moment (33) decreases monotonically from $M(\varrho, t) = M_0$ to $M(R, t) = 0$. The continued inequality for M in (27) is therefore satisfied.

Finally the deflection $w(r, t)$ remains to be determined. We shall here be concerned only with the deflection $w(r, T_1)$ at the end of the second phase, and we shall determine this by making use of the jump condition (7).

Equations (25) and (28) show that, at the end of the first phase, the middle surface of the plate has the shape of a truncated cone, the deflection of the points inside the hinge circle $r = \varrho_0$ being $p \tau^2/(2 \mu)$. At the end of the first phase, a discontinuity in slope has therefore developed at $r = \varrho_0$:

$$w_r(\varrho_0 + 0, \tau) - w_r(\varrho_0 - 0, \tau) = - \frac{p \tau^2}{2 \mu (R - \varrho_0)}. \quad (36)$$

During the second phase the hinge circle is contracting. Since the velocity \dot{w}_t must be continuous across this nonstationary hinge circle, equation (6) shows that new discontinuities in slope cannot develop during the second phase. According to the first equation (31), the contracting hinge circle moves into a region in which $w_{rr} = 0$. Consider a fixed circle C of the radius r . As the contracting hinge circle \mathcal{H} moves across C , it produces there a curvature w_{rr} of the plate meridian which can be found from equations (7) and (31). Indeed,

according to (31), we have at \mathcal{H}

$$[w_{rt}] = - \frac{p \tau}{\mu (R - \varrho)}, \quad (3)$$

and hence, by (7) and (32),

$$[w_{rr}] = - \frac{p \tau^2}{2 \mu} \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{R + 3 \varrho}{R^3}. \quad (3')$$

Since \mathcal{H}' moves into a region in which the plate has performed a vertic translation only, w_{rr} vanishes inside \mathcal{H}' . The jump (38) thus equals the value of w_{rr} just outside \mathcal{H}' . The second equation (31) shows that $w_{rr} = 0$ outside \mathcal{C} , so that no further change in the curvature w_{rr} occurs at \mathcal{C} once \mathcal{H}' has moved across \mathcal{C} . Thus,

$$w_{rr}(r, t) = - \frac{p \tau^2}{2 \mu} \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{R + 3 r}{R^3}, \quad \varrho(t) < r < \varrho_0. \quad (3'')$$

At the end of the second phase, equation (39) applies right up to the centre of the plate. Since

$$w_r(0, T_1) = 0, \quad w(0, T_1) = \frac{p \tau^2}{2 \mu} \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right), \quad (4)$$

by (28) and the first equation (31), integration of (39) with the initial condition (40) yields

$$w(r, T_1) = \frac{p \tau^2}{2 \mu} \left[\frac{p}{2 p_0} \left(2 - \frac{r^2}{R^2} - \frac{r^3}{R^3} \right) - 1 \right], \quad 0 \leq r \leq \varrho_0. \quad (4')$$

Outside the circle of radius r_0 , the middle surface of the plate assumes the shape of a right circular cone. This is determined by the deflection $w(\varrho_0, T_1)$ found from (41) and the condition that $w(R, T_1) = 0$. We leave it to the reader to check that the discontinuity in the slope w_r of the middle surface at $r = \varrho_0$ when $t = T_1$ has the value (36).

Phase III ($T_1 < t < T_2$). At the end of the second phase the entire plate except the center and the edge is in the regime *AB*. The subsequent motion of the plate is therefore described by equation (11) in which $W(t)$ must be suitably determined. The analysis of this third phase of the motion proceeds along similar lines as the analysis of the second phase in the case of medium load. We leave it to the reader to work out the details and state only the following facts.

The plate comes to rest at the time

$$T_2 = 2 T_1. \quad (4'')$$

the deflection at this instant inside the circle of radius ϱ_0 is given by

$$w(r, T_2) = \frac{p \tau^2}{2 \mu} \left[\frac{p}{2 p_0} \left(3 - \frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2} - \frac{r^3}{R^3} \right) - 1 \right], \quad 0 \leq r \leq \varrho_0, \quad (43)$$

and outside this circle is linear in r ($\varrho_0 \leq r \leq R$), vanishing of course at the plate edge. In particular it follows that the final central deflection is

$$w(0, T_2) = \frac{I^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{p_0}{p} \right)}{2 \mu p_0}, \quad (44)$$

where $I = p \tau$ is the total impulse acting on the plate.

It should be noted that the meridian of the permanently deformed plate is curved for $0 < r < \varrho_0$ and straight for $\varrho_0 < r \leq R$ with nonvanishing slope at $r = 0$ and a discontinuity of slope at $r = \varrho_0$.

In Figure 3, the variation of $w(r, T_2)$, $w(0, T_2)$ with r/R is shown for some representative values of p ($2 p_0$); as p ($2 p_0$) increases the central curved part of the permanently deformed plate is seen to increase in size.

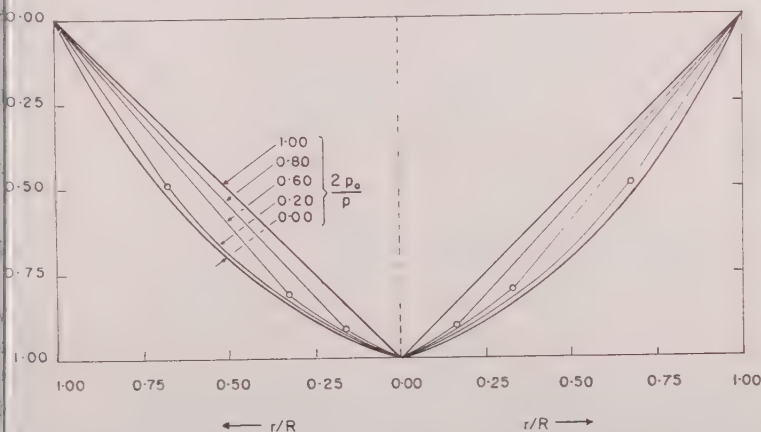


Figure 3

variation of final deflection across plate, expressed in terms of central deflection, with pressure intensity. (The circles indicate the positions of the hinge circles in phase I.)

Abstract

The paper is concerned with the dynamics of a thin circular plate made of a plastic-rigid material that obeys the yield condition of TRESCA and the associated flow rule. The basic equations are established in the case of rotational symmetry, and their complete solution is given for a simply supported plate subjected to a uniformly distributed load which is brought on suddenly and, after a certain time interval, removed suddenly.

BIBLIOGRAPHY

- [1] L. H. DONNELL, Trans. Amer. Soc. mech. Eng. 50, 153 (1930).
- [2] G. I. TAYLOR, British Official Report, R. C. 70 (1940).
- [3] TH. VON KÁRMÁN and P. E. DUWEZ, J. appl. Phys. 21, 987 (1950).
- [4] H. A. RAKHMATOLIN, Prikl. Mat. Mekh. 10, 333 (1946).
- [5] F. A. BAKHSHIYAN, Prikl. Mat. Mekh. 12, 281 (1948).
- [6] D. M. GRIGORYAN, Prikl. Mat. Mekh. 13, 277 (1949).
- [7] J. W. CRAGGS, Proc. Roy. Soc. Edinburgh [A] 63, 359 (1952).
- [8] P. E. DUWEZ, D. S. CLARK, H. F. BOHNENBLUST, J. appl. Mech. 17, 27 (1950).
- [9] M. F. CONROY, J. appl. Mech. 19, 465 (1952).
- [10] E. H. LEE and P. S. SYMONDS, J. appl. Mech. 19, 308 (1952).
- [11] S. L. PAN, L. E. GOODMAN, and N. M. NEWMARK, ONR Technical Report N6ori-77, Task Order VI, Project NR-035-183 (1951).
- [12] F. A. BAKHSHIYAN, Prikl. Mat. Mekh. 12, 47 (1948).
- [13] A. M. KOCHETKOV, Prikl. Mat. Mekh. 14, 203 (1950).
- [14] H. G. HOPKINS and W. PRAGER, J. Mech. Phys. Solids 2, 1 (1953).

Résumé

Cet article étudie la dynamique d'une plaque circulaire infiniment mince fabriquée avec un matériau plastique qui obéit à la condition de plasticité de TRESCA et à la loi d'écoulement associée. Les équations fondamentales sont établies dans le cas où existe une symétrie de révolution. Leur solution complète est donnée pour une plaque reposant sur des appuis simples, soumise à une charge uniformément répartie qui est appliquée rapidement et demeure constante pendant un certain temps, après lequel elle est rapidement retirée.

(Received: October 2, 1953.)

Stress Distributions in Semi-Infinite Solids of Revolution

By ANTONY J. A. MORGAN¹⁾, Pasadena, California

Introduction

All of the problems presented in this paper are solved by reducing the governing partial differential equations to ordinary differential equations for which closed solutions are found. This reduction is accomplished by the application of a recently developed theory [1]²⁾ for obtaining *similarity solutions*³⁾ of systems of partial differential equations. The term *invariant solutions* is suggested in place of *similarity solutions* because this terminology reveals their underlying mathematical nature [1], [2], [3].

The solution to the problem of obtaining the stress distribution in a solid bounded by two concentric cones with a common apex, under external loading

¹⁾ Aercon, Inc.

²⁾ Numbers in brackets refer to the References, page 340.

³⁾ This terminology is used in aerodynamics (laminar boundary layer, conical flow, etc.).

which vary as an arbitrary real number power of the distance from the apex, has not been previously reported in the literature. Solutions of this problem are presented in this paper.

If $\alpha > \beta$ are the semi-vertex angles of the two bounding cones, three cases are distinguished:

- (i) $\alpha > \pi/2 > \beta$: this can be considered as a circular plate of infinite radius;
- (ii) $\pi/2 > \alpha > \beta$: corresponds to a semi-infinite conical shell, and
- (iii) $\pi/2 < \alpha < 0$, one bounding cone: is equivalent to a semi-infinite solid cone.

In all of these cases the thickness increases linearly from the apex. These distinctions, (i), (ii), and (iii) (Figures 1, 2, 3), are of importance since they dictate different choices for the form of the stress-function solution.

Nomenclature

The following notation is used in the paper:

- η numerical parameter in a group of transformations;
- C_1, \dots, C_4 constants of integration;
- $d/d\eta$ differential operator $= d/d\eta$ if η is the independent variable;
- r, z greatest value of r or z , at which one of the proportional limits of the material is attained;
- r_0, z_0 least value of r or z , at which one of the proportional limits of the material is attained;
- ξ dependent variable of equation (15), defined by equation (12);
- ${}_2F_1(\sigma, \tau; z)$ hypergeometric function of real argument z ;
- η new dependent variable for equation (15), defined by equation (22);
- α $\tan \alpha$;
- β $\tan \beta$;
- n, n, p numerical constants associated with the group in which a is the parameter;
- P normal loading (force/unit area) on upper face of semi-infinite solid of revolution;
- $P_\mu(\xi)$ Legendre function of the first kind of order μ and argument ξ ;
- l a real number exponent denoting the type of variation of the external normal and tangential loads;
- $Q_\mu(\xi)$ Legendre function of the second kind of order μ and argument ξ ;
- l tangential (shear) loading (force/unit area) on upper surface of semi-infinite solid of revolution;
- η new dependent variable for equation (15), defined by equation (1.2);
- r, θ, z cylindrical coordinates;
- z angle of upper surface of semi-infinite solid of revolution with respect to r - or z -axes (Figures 1, 2, 3);

- β angle of lower surface of semi-infinite solid of revolution with respect to r - or z -axes respectively (Figures 1, 2);
- γ $q + 3$;
- Γ the gamma function;
- ξ $\xi (1 + \xi^2)^{-1/2}$, for circular plates;
 $(1 + \eta^2)^{-1/2}$, for conical shells and solid cones;
- η (r/z) — similarity variable used in semi-infinite solid of revolution (conical shell) problem;
- μ $q + 1$;
- ν POISSON'S constant;
- ξ (z/r) — second similarity variable used in semi-infinite solid of revolution (circular plate) problem;
- $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ stresses, cylindrical coordinates (axial symmetry);
- $\Phi(r, z)$ stress function in cylindrical coordinates (axial symmetry);
- ω angle of ray within semi-infinite solid of revolution with respect to r - or z -axes (Figures 1, 2, 3).

Primed quantities denote external loadings on lower surface of semi-infinite solid of revolution.

Dashes denote differentiation with respect to independent variable indicated by the context.

Circular Plates of Infinite Radius and Linearly Varying Thickness

This corresponds to case (i) (Introduction), an axially symmetric problem where the external loadings are as shown in Figure 1.

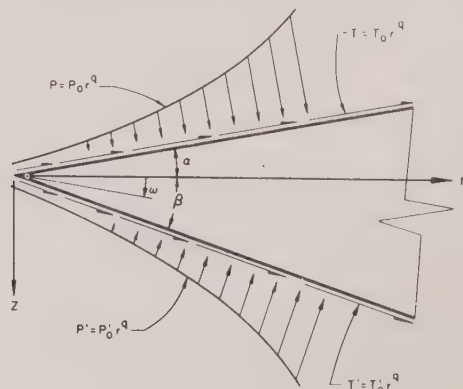


Figure 1

The Circular Plate of Infinite Radius and Linearly Varying Thickness.

The stress distribution within the plate is determined by a solution of the partial differential equation [4], [5]

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = 0, \quad (1)$$

where Φ is the stress function in cylindrical coordinates and the stresses are given by:

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right], \quad (2)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \left[\nu \nabla^2 \Phi - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right], \quad (3)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], \quad (4)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]. \quad (5)$$

The desired solution of equation (1) must satisfy the boundary conditions:

$$P - T k = -\sigma_z - \tau_{rz} k, \quad (6)$$

$$P k + T = -\sigma_r k - \tau_{rz}, \quad (7)$$

on the upper face ($\omega = -\alpha$), and

$$P' - T' k' = -\sigma_z + \tau_{rz} k', \quad (8)$$

$$P' k' + T' = -\sigma_r k' + \tau_{rz}, \quad (9)$$

on the lower face ($\omega = \beta$) of the plate. Note that the angle ω is measured with respect to the r -axis.

The form of the solution is deduced as follows: Equation (1) is unchanged (constant conformally invariant) under the transformations¹⁾

$$\bar{r} = a^m r, \quad \bar{z} = a^n z, \quad \bar{\Phi} = a^p \Phi, \quad (10)$$

where $a (\neq 0)$ is a numerical parameter and m, n, p are real constants, if $(n/m) = 1$ and (p/m) is arbitrary. Two absolute invariants of the transformations (10) are

$$\frac{z}{r^{n/m}} \quad \text{and} \quad \frac{\Phi}{r^{p/m}}. \quad (11)$$

Hence, the substitution of

$$\Phi = r^{p/m} F(\xi), \quad \xi = \frac{z}{r} \quad (12)$$

¹⁾ Mathematically, this is a continuous one-parameter group of transformations. See [1], [2], and [3] for terminology used in group theory.

into equation (1) will, by a known theorem [1], reduce it to an ordinary differential equation with $F(\xi)$ and ξ as dependent and independent variables respectively.

Equation (12) gives the desired form of the solution, if the external loading are of the form:

$$P = P_0 r^q, \quad T = T_0 r^q, \quad P' = P'_0 r^q, \quad T' = T'_0 r^q, \quad (13)$$

when

$$\frac{p}{m} = q + 3. \quad (14)$$

This is seen on substituting equations (10) in equations (2) to (5) and then substituting the results, together with equations (13), in equations (6) to (9).

The substitution of equations (12) into equation (1) gives the ordinary differential equation

$$\left. \begin{aligned} & (\xi^2 + 1)^2 F^{IV}(\xi) - 2(2q + 1)\xi(\xi^2 + 1)F'''(\xi) \\ & + [2(q + 1)^2(3\xi^2 + 1) - \xi^2]F''(\xi) - [2(q + 1)(q + 2) - 1](2q + 3)\xi F'(\xi) \\ & + (q + 1)^2(q + 3)^2 F(\xi) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

whose general solution (Appendix I) is:

$$F(\xi) = (1 - \xi^2)^{-(q/2)} [C_1 P_\mu(\zeta) + C_2 Q_\mu(\zeta) + C_3 P_\nu(\zeta) + C_4 Q_\nu(\zeta)], \quad (16)$$

where

$$\zeta = \xi(1 + \xi^2)^{-(1/2)} \quad (0 \leq |\zeta| < 1),$$

$$\mu = q + 1,$$

$$\nu = q + 3,$$

$P_\mu(\zeta)$ = Legendre Function of the first kind of order μ with argument ζ , and

$Q_\mu(\zeta)$ = Legendre Function of the second kind of order μ with argument ζ .

By direct calculation, on substituting equations (12) and (14) into equations (2) to (5), the stresses, in terms of q , ξ , and $F(\xi)$, are given by the following expressions:

$$\left. \begin{aligned} r^{-q} \sigma_r &= (q + 2)[\nu(q + 2) - (q + 1)]F'(\xi) \\ &+ [2(q + 1) - \nu(2q + 3)]\xi F''(\xi) + [\nu(1 + \xi^2) - \xi^2]F'''(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} r^{-q} \sigma_\theta &= (q + 2)[\nu(q + 2) - 1]F'(\xi) - \nu(2q + 3)\xi F''(\xi) \\ &+ [(2 - \nu)(1 + \xi^2) - 1]F'''(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} &= (2 - \nu) (q + 2)^2 F'(\xi) - (2 - \nu) (2q + 3) \xi F''(\xi) \\ &+ [(2 - \nu) (1 + \xi^2) - 1] F'''(\xi), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} &= (1 - \nu) (q + 1) (q + 3)^2 F(\xi) - (1 - \nu) (3q^2 + 11q + 9) \xi F'(\xi) \\ &+ [(1 - \nu) (3q + 4) \xi^2 - \nu (q + 1)] F''(\xi) \\ &+ [1 - (1 - \nu) (\xi^2 + 1)] \xi F'''(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Equations (13) and (17) to (20) can be used to express the boundary conditions (6) to (9) in terms of $P_0, T_0, P'_0, T'_0, k, k', F(\xi)$ and the derivatives of F . The stress distribution within the circular plate (Figure 1), under external loadings given by equation (13), is then completely determined by the solution of equation (15).

Several cases must be considered:

Case A, $q > 0$. Here the stresses, equations (17) to (20), become infinite as $r \rightarrow 0$ for any fixed ξ within the body. The proportional limits of the material (in shear or tension) are then attained at some values of $r > 0$. Let $r = c$ be the least such r . The problem will retain physical significance if the plate is cut crosswise at some $r < c$ and the stresses given by equations (17) to (20) are applied at the cut as external forces.

Case B, $q < 0$. The stresses are infinite at the origin ($r = 0$). Let $r = d$ be the least value of r at which one of the proportional limits of the material is reached. Physical significance is retained on cutting a hole, of radius $> d$, in the center of the plate and applying an appropriate system of stresses [given by equations (17) to (20)] at the cut as external forces.

The case $q = 0$ (uniform loading) does not yield infinite stresses at any point in the plate. The restrictions outlined under *cases A* and *B* will also apply to subsequent considerations.

Semi-Infinite Conical Shells of Linearly Varying Thickness

This corresponds to case (ii) (Introduction). The situation is illustrated by Figure 2. The solution (16) could also be used for this case if the external loadings were expressed as a power of r . For ease of application it is convenient to seek a solution which allows the external loadings to be written as proportional to a power of z and the cone vertex angles to be measured with respect to the z -axis. This is possible since equations (12) and (14) indicate that the stress function $\Phi(r, z)$ may be written as:

$$\Phi = z^\nu \eta^\nu F\left(\frac{1}{\eta}\right), \quad \eta = \frac{1}{\xi} = \frac{r}{z}, \quad (21)$$

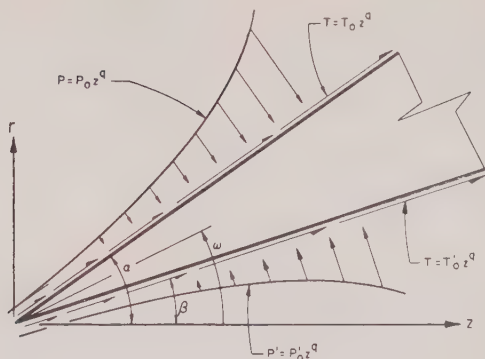


Figure 2

The Semi-Infinite Conical Shell of Linearly Varying Thickness.

where $F(\xi)$ is the solution (16) and γ is any real number. Thus the required solution is

$$G(\eta) = \eta^\gamma F\left(\frac{1}{\eta}\right), \quad (2)$$

where $\gamma = q + 3$. Hence, by equation (16),

$$G(\eta) = \xi^{-\gamma} [C_1 P_\mu(\xi) + C_2 Q_\mu(\xi) + C_3 P_\nu(\xi) + C_4 Q_\nu(\xi)], \quad (2)$$

where, now

$$\xi = (1 + \eta^2)^{-1/2} \quad (0 \leq |\eta| < 1),$$

and the other quantities remain as previously defined.

Since $\Phi = z^\gamma G(\eta)$ the stresses, equations (2) to (5), can be written in terms of $G(\eta)$, and its derivatives as follows:

$$z^{-q} \sigma_r = \nu(q+1)(q+2)(q+3)G(\eta) - \nu(q+2)[3(q+1)\eta^2 - 1]\eta^{-1}G'(\eta) + [3\nu(q+1)\eta^2 + q\nu - (q+1)]G''(\eta) - [\nu(1+\eta^2) - 1]\eta G'''(\eta), \quad (2)$$

$$z^{-q} \sigma_\theta = \nu(q+1)(q+2)(q+3)G(\eta) - (q+2)[3\nu(q+1)\eta^2 + (1-\nu)]\eta^{-1}G'(\eta) + [3\nu(q+1)\eta^2 + q\nu + 1]G''(\eta) - \nu\eta(\eta^2 + 1)G'''(\eta), \quad (2)$$

$$z^{-q} \sigma_z = (1-\nu)(q+1)(q+2)(q+3)G(\eta) - [3(1-\nu)(q+1)(q+2)\eta^2 - (2-\nu)(q+2)]\eta^{-1}G'(\eta) + [3(1-\nu)(q+1)\eta^2 + (2-\nu)q]G''(\eta) - \eta[(1-\nu)\eta^2 + (2-\nu)]G'''(\eta), \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rz} = -[v(q+1)(q+2)\eta^2 + (1-v)]\eta^{-2}G'(\eta) \\ + [2v(q+1)\eta^2 + (1-v)]\eta^{-1}G''(\eta) + [1-v(1+\eta^2)]G'''(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

where the dashes denote differentiation with respect to η , and q is any real number.

The boundary conditions are:

$$P - Tk = -\sigma_r + \tau_{rz}k, \quad (28)$$

$$Pk + T = -\sigma_z k + \tau_{rz} \quad (29)$$

at the outer surface ($\omega = \alpha$) and

$$P' + T'k' = -\sigma_r + \tau_{rz}k', \quad (30)$$

$$P'k' - T' = -\sigma_z k' + \tau_{rz} \quad (31)$$

at the inner surface ($\omega = \beta$) of the shell.

Comparison of equations (24) to (27) and (28) to (31) shows that the boundary conditions can be written entirely in terms of η , $G(\eta)$ and the derivatives of $G(\eta)$ if the external loadings are of the form:

$$P = P_0 z^q, \quad T = T_0 z^q, \quad P' = P'_0 z^q, \quad T' = T'_0 z^q. \quad (32)$$

Thus the problem can be solved entirely in terms of the solution (23) of equation (1).

The Semi-Infinite Cone

The problem is that of obtaining the stress distribution within a semi-infinite cone (Figure 3). This can be accomplished by placing certain 'over-all'

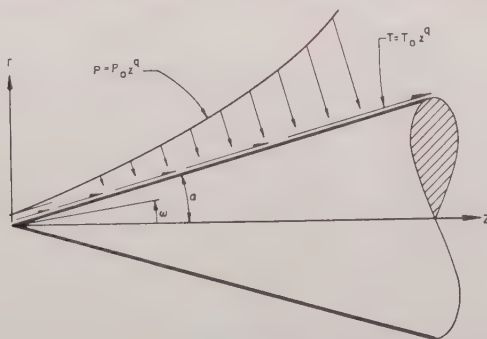


Figure 3
The Semi-Infinite Cone.

restrictions on the solution (23). Note that only two boundary conditions, equations (28) and (29), are at our disposal, and hence the solution can only contain two arbitrary constants. To eliminate the two additional constants occurring in equation (23) the physically reasonable 'over-all' condition that 'the stresses must be finite on the z -axis' is imposed. This requires an examination of the singularities of the solution (23) as $\zeta \rightarrow 1$, $\eta \rightarrow 0$.

A suitable representation of the Legendre functions, in terms of the hypergeometric function [6], $F(\varrho, \sigma; \tau; z)$, is

$$P_\mu(\zeta) = F\left(\mu + 1, -\mu; 1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\zeta\right) \quad (-1 < \zeta < 3), \quad (3)$$

and

$$Q_\mu(\zeta) = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(\mu + 1)}{2^{\mu+1} \Gamma(\mu + 3/2)} \zeta^{-\mu-1} F\left(\frac{1}{2}, \mu + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \mu + 1; \mu + \frac{3}{2}; \zeta^2\right) \quad (\zeta > 1), \quad (3)$$

similar expressions holding for $P_\gamma(\zeta)$ and $Q_\gamma(\zeta)$. The functions $Q_{\mu,\gamma}(\zeta)$ have logarithmic singularity at $\eta = 0$ ($\zeta = 1$) and so will their derivatives with respect to ζ [6]. The $P_{\mu,\gamma}(\zeta)$ and their derivatives, on the other hand, are regular at $\zeta = 1$. This eliminates the functions $Q_{\mu,\gamma}(\zeta)$ from the solution (23).

It remains to be verified that the functions $P_{\mu,\gamma}(\zeta)$ do not yield infinite stresses at the z -axis. Such a situation is possible if $\eta^{-1} G'(\eta)$, contained in equations (24) to (27), is singular at $\eta = 0$, but the expression

$$\eta^{-1} G'(\eta) \sim -\zeta^3 \frac{d}{d\zeta} P_{\mu,\gamma}(\zeta)$$

is not singular as $\zeta \rightarrow 1$. Hence the stresses σ_r , σ_θ , σ_z are regular on the z -axis. It can be shown, on expressing the derivatives of $G(\eta)$ in terms of derivatives with respect to ζ , that the terms $\eta^{-2} G'(\eta)$ and $\eta^{-1} G''(\eta)$ do not make τ_{rz} , equation (27), singular as $\eta \rightarrow 0$. In fact the singularities contributed by these two terms cancel out identically.

With the above verification the desired solution is immediately seen to be

$$G(\eta) = \zeta^{-\gamma} \left[C_1 F\left(\mu + 1, -\mu; 1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\zeta\right) + C_2 F\left(\gamma + 1, -\gamma; 1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\zeta\right) \right] \quad (3)$$

where, now

$$0 \leq \eta \leq \infty, \quad 0 \leq \zeta \leq 1,$$

$$F(\varrho, \sigma; \tau; z) = \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(\varrho) \Gamma(\sigma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\varrho + n) \Gamma(\sigma + n)}{\Gamma(\tau + n)} \cdot \frac{z^n}{n!} \quad (|z| < 1),$$

and the other quantities remain as previously defined in equations (16), (23) and (33).

The problem of determining the stress distribution within a semi-infinite solid cone, under external loadings of the type given by equation (32), can then be solved in terms of the solution (35) of equation (1).

Conclusions and Suggestions for Further Research

The solutions of the problems posed can be extended in several ways. By superposition it is possible to obtain solutions for cases where the external loadings are expressed as power series in the distance from the apex (Figures 1 to 3). The stress distributions for solids which are the finite counterparts of those shown in Figures 1 to 3 might also be determined, for certain types of boundary conditions at the crosswise surfaces, by superposition of the solutions given in this paper. Note that the superposition is made by using the stress functions and not the solutions of the ordinary (similarity) differential equation corresponding to the governing partial differential equation.

Invariant (similarity) solutions of the non-homogeneous biharmonic equation can also be obtained by use of the methods illustrated in this paper [7].

As suggested by TRANTER's [8] success in the case of the semi-infinite wedge, it is possible to generalize the problems solved herein to include boundary conditions composed of piecewise continuous external loadings. This is done by application of the Mellin transform to equation (1), when expressed in spherical coordinates. Of course, the loadings are arbitrary to the extent that their Mellin transform must exist. The results of such an investigation will be presented at a later date.

APPENDIX I

The Solution of Equation (15)

Equation (15) can be split into the operator factors

$$\left. \begin{aligned} & [(\xi^2 + 1) D^2 + 2(q + 1) \xi D + (q + 1)^2] \\ & \times [(\xi^2 + 1) D^2 - (2q + 5) \xi D + (q + 3)^2] F(\xi) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.1})$$

where

$$D = \left(\frac{d}{d\xi} \right).$$

Two solutions of equation (15) are obtained by setting the second of the operator factors in equation (I.1) equal to zero and applying the following transformations of dependent and independent variables:

$$F(\xi) = (\xi^2 + 1)^{(q+3)/2} v(\zeta), \quad \zeta = \xi (1 + \xi^2)^{-1/2}. \quad (\text{I.2})$$

The new dependent variable $v(\zeta)$ satisfies the Legendre differential equation[6]:

$$(\zeta^2 - 1) v''(\zeta) + 2\zeta v'(\zeta) - \gamma(\gamma + 1) v(\zeta) = 0 \quad (\gamma = q + 3), \quad (\text{I.3})$$

which has as two independent solutions the Legendre functions of the first kind, $P_\gamma(\xi)$, and of the second kind, $Q_\gamma(\xi)^{1,2}$.

On applying the transformations (I.2) to equation (15), the following operator representation of the transformed equation is obtained:

$$[(\xi^2 - 1) D^2 + 2 \xi D - \mu(\mu + 1)][(\xi^2 - 1) D^2 + 2 \xi D - \gamma(\gamma + 1)] v(\xi) = 0, \quad (\text{I.4})$$

where

$$D = \frac{d}{d\xi}, \quad \mu = q + 1, \quad \text{and} \quad \gamma = q + 3.$$

It is a simple matter to verify that the two operator factors in equation (I.4) are commutative. Now, since each of these operator factors is a Legendre differential equation it is immediately seen that the general solution of equation (15) is given by equation (16).

Abstract

The problem of obtaining the stress distribution within semi-infinite solid bounded by two concentric cones with a common apex is formulated in terms of a fourth order ordinary differential equation. This is accomplished by using a recently developed theory for obtaining similarity solutions of partial differential equations. Such a formulation is valid when the external loadings are proportional to an arbitrary real number power of the distance from the apex. Closed solutions are given for these equations.

For certain ranges of the cone vertex angles these solids, all of linearly varying thickness, can be descriptively classified as: (i) circular plates of infinite radius (ii) semi-infinite conical shells, and (iii) semi-infinite solid cones.

Acknowledgments

The author is indebted to Dr. H. LURIE for having generously given of his time in the discussion of certain aspects of the problems contained in this paper.

REFERENCES

- [1] MORGAN, A. J. A., *The Reduction by One of the Number of Independent Variables in Some Systems of Partial Differential Equations*, Quart. J. Math. Oxford Second Series, 3, No. 12, 250-259 (1952).
- [2] EISENHART, L. P., *Continuous Groups of Transformations* (Princeton University Press, Princeton, 1933).
- [3] MORGAN, A. J. A., *A General Similarity Theory of Partial Differential Equations and its Use in the Solution of Problems in Aeronautics*, Ph.D. Thesis California Institute of Technology (June 1951).
- [4] TIMOSHENKO, S., *Theory of Elasticity* (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1934).
- [5] LOVE, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Fourth revised edition (Dover Publications, New York, 1944), pp. 274-276.

¹ Further properties of Legendre functions are given in [9], [10], and [11].

² Note that $\xi = \cos \omega$.

6. INCE, E. L., *Ordinary Differential Equations* (Dover Publications, New York), pp. 164–168.
7. MORGAN, A. J. A., *Uniformly Loaded Semi-Infinite Wedge-Shaped Plates*, *J. aeron. Sci.* 18, 845 (1951).
8. TRANTER, C. J., *The Use of the Mellin Transform in Finding the Stress Distribution in an Infinite Wedge*, *Quart. J. Mech. applied Math.* 1, Part. 2, 125–130 (1948).
9. WHITTAKER, E. T., and WATSON, G. N., *A Course of Modern Analysis*, American Edition (The Macmillan Company, New York, 1946), p. 194.
10. KAMKE, E., *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Reprint (Edwards Brothers, Ann Arbor, Michigan, 1945), Equation 2.377, p. 494.
11. MACROBERT, T. M., *Spherical Harmonics*, Second Revised Edition (Dover Publications, New York, 1948).

Résumé

Le problème de déterminer la distribution de la tension dans les solides semi-infinis délimités par deux cônes concentriques ayant un sommet commun est exprimé sous forme d'équation différentielle ordinaire du quatrième degré. Ceci est fait par l'application d'une théorie récemment énoncée pour l'obtention de solutions similaires des équations différentielles partielles. Une telle expression est valide quand les forces appliquées extérieurement sont proportionnelles à une puissance d'indice réel, choisie arbitrairement, de la distance au sommet. Des solutions exactes de ces équations sont données dans le texte.

Pour certaines limites des angles du sommet d'un cône, ces solides, tous d'épaisseur à variation linéaire, peuvent être classés descriptivement comme suit : 1° plaques circulaires de rayon infini; 2° enveloppes coniques semi-infinies, et 3° cônes solides semi-infinis.

Received: July 25, 1953.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

Die Berechnung einiger komplexer Werte auf einer Multipliziermaschine mit nur einem Multiplizierwerk

VON WALTER BOESCH, Zürich

I.

Auf einer Multipliziermaschine mit $3n - 1$ Stellen im Multiplizierwerk und $2 \cdot (3n - 1)$ Stellen im Resultatwerk können Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl mit n Stellen durch einen Abstand von $n - 1$ Stellen getrennt werden. (Addition und Subtraktion sind trivial¹⁾).

¹⁾ Regelungstechnik 1953, H. 12, S. 269–292. Zitiert als [1].

II. Multiplikation komplexer Zahlen

$$a) \underline{\dot{F}_1 \dot{F}_2} \quad (\dot{F}_1 = \tilde{F}_1 = \text{komplexe Zahl})$$

$$\dot{F}_1 \dot{F}_2 = (a_1 + b_1 i) (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i - b_1 b_2. \quad (1)$$

$$\text{Vergleiche } (a_1 + b_1) (a_2 + b_2) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + b_1 b_2. \quad (2)$$

Durch Koeffizientenvergleich wird ersichtlich, dass man von der Gleichung (1) das zweite Glied mit i und das dritte Glied mit -1 multiplizieren muss, um die Gleichung (2) zu erhalten. Unter Berücksichtigung des unter I erwähnten Stellenabstandes der Zahlen ergibt sich auf einfache Weise die Multiplikation komplexer Zahlen.

$$b) \underline{\dot{F} \dot{F}^x} \quad (\dot{F} \text{ und } \dot{F}^x = \text{konjugiert komplexe Werte})$$

$$\dot{F}_1 \dot{F}_1^x = (a_1 + b_1 i) (a_1 - b_1 i); \quad (3)$$

$$\dot{F}_1 \dot{F}_1^x = a_1^2 - a_1 b_1 i + a_1 b_1 i + b_1^2. \quad (4)$$

Aus [1] geht hervor, dass die Zahlen, die diesem Produkt entsprechen, im Produktzählwerk der Multipliziermaschine in der Reihenfolge der Gleichung (4) erscheinen.

Um unmittelbar die Summe $(a_1^2 + b_1^2)$ ablesen zu können, wird umgeformt:

$$\dot{F}_1 \dot{F}_1^x = -(a_1 + b_1 i) (b_1 + a_1 i), \quad (5)$$

$$\dot{F}_1 \dot{F}_1^x = -a_1 b_1 i + (a_1^2 + b_1^2) + a_1 b_1 i. \quad (6)$$

Aus [1] geht wiederum hervor, dass die Zahlen auf dem Produktzählwerk in dieser Reihenfolge erscheinen.

Damit kann aber ganz allgemein auf der Multipliziermaschine die Summe der Kathetenquadrate eines rechtwinkligen Dreieckes direkt abgelesen werden.

Andere Funktionen von ähnlichem Aufbau sind analog berechenbar.

III. Division komplexer Zahlen

$$a) \frac{\dot{F}_1}{\dot{F}_2}$$

$$\dot{F}_3 = \frac{\dot{F}_1}{\dot{F}_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = - \frac{(a_1 + b_1 i) (a_2 + b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} i. \quad (7)$$

Der Nenner wird wie $\dot{F}_1 \dot{F}_1^x$ berechnet. Damit ist die Division komplexer Zahlen auf eine Multiplikation zurückgeführt.

$$b) \frac{\dot{F}_1}{\dot{F}_1^x}$$

$$\frac{\dot{F}_1}{\dot{F}_1^x} = \frac{\dot{F}_1 \dot{F}_1}{\dot{F}_1 \dot{F}_1^x} = \frac{\dot{F}_1^2}{a_1^2 + b_1^2}. \quad (8)$$

Damit ist die Division konjugiert komplexer Zahlen in eine Multiplikation (Quadrat) komplexer Zahlen übergeführt worden.

IV. Der Kettenbruch mit komplexen Zahlen

$$\dot{F}_4 = \frac{1}{\frac{1}{\dot{F}_1} + \frac{1}{\dot{F}_2}}; \quad (9)$$

$$\dot{F}_4 = - \frac{[(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)][(b_1 + b_2) + (a_1 + a_2)i]}{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} i. \quad (10)$$

Der Nenner wird analog $\dot{F}_1 \dot{F}_2$ berechnet, damit ist der Kettenbruch auf eine Multiplikation komplexer Zahlen $\dot{F}_4 = (1/k) \dot{F}_1 \dot{F}_2 \dot{F}_6$ vereinfacht.

V. Praktische Hinweise

Die praktische Ausführung einer Multiplikation komplexer Werte ist in [1] beschrieben. Die hier neu angeführte Multiplikation komplex konjugierter Werte ist nach Studium obiger Literaturstelle ohne weiteres auszuführen.

Summary

It is explained how a normal mechanical calculator can be used in a very time-saving manner for all four basic forms of calculation with complex numbers, and also a short method of calculating the squares of catheds in a right angled triangle.

Eingegangen: 22. März 1954.)

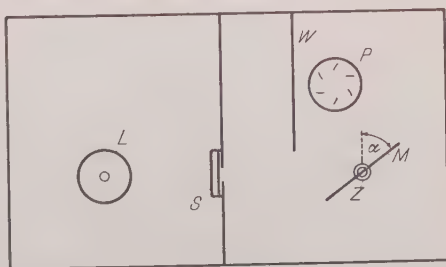
Prüfgerät für Photomultiplier

Von EDGAR LÜSCHER, Lausanne¹⁾

Für spektrometrische Anwendungen der Photomultiplier müssen diese zunächst geprüft werden, bevor man sie zu Messzwecken brauchen kann. Im folgenden ist eine einfache Apparatur beschrieben, die gestattet, den Dunkelstrom und die Empfindlichkeit von Photomultipliern zu messen. Das Gerät wurde vor allem zur raschen Prüfung von grossen Serien von Vervielfacherröhren entwickelt, zum Zwecke, diese Röhren zu klassieren. Die optische Messanordnung ist in Figur 1 dargestellt.

Konstantes Licht von der Lampe L tritt durch die Mattscheibe oder den Spalt auf den um die Achse Z drehbaren Lichtdiffuser, welcher das Licht auf den Vervielfacher streut. Diese Anordnung erlaubt, die totale Empfindlichkeit der Photomultiplier in Funktion des Drehwinkels α zu bestimmen. Der Lichtdiffuser M ist mit einer Schicht Magnesiumoxyd versehen, um eine möglichst gute Lichtzerstreuung zu erhalten. Die Wände des Prüfgehäuses sind schwarz.

Konstantes Licht von der Lampe L tritt durch die Mattscheibe oder den Spalt auf den um die Achse Z drehbaren Lichtdiffuser, welcher das Licht auf den Vervielfacher streut. Diese Anordnung erlaubt, die totale Empfindlichkeit der Photomultiplier in Funktion des Drehwinkels α zu bestimmen. Der Lichtdiffuser M ist mit einer Schicht Magnesiumoxyd versehen, um eine möglichst gute Lichtzerstreuung zu erhalten. Die Wände des Prüfgehäuses sind schwarz.

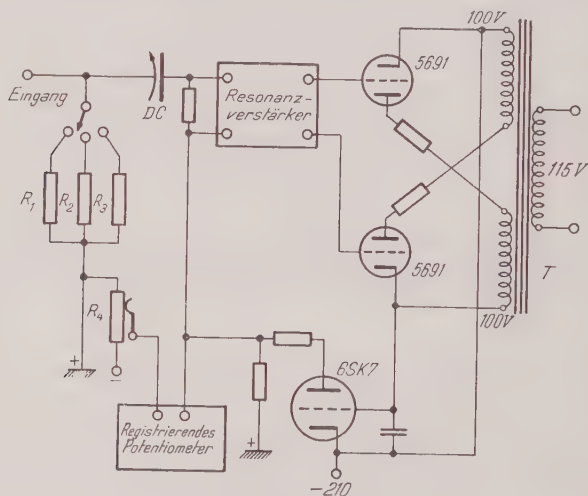


Figur 1

L Wolframlampe; S Mattscheibe oder beweglicher Spalt; W Trennwand; M Lichtdiffuser; P Photomultiplier; Z Drehachse der Diffuserscheibe.

¹⁾ Applied Research Laboratories, Lausanne.

Besondere Beachtung muss der Speisung der Lampe L geschenkt werden. Die Spannung wird mittels eines Sörensen-Regulators stabilisiert. Zusätzlich sind noch zwei Stabilisatoren OA3 geschaltet. Die Intensität der Lampe kann mit einem Widerstand variiert werden. Wird die selektive Empfindlichkeit gemessen, kann eine Spektrallampe benutzt werden und an Stelle von S eine entsprechende Filteranordnung. Ein Elektrometervverstärker mit dynamischem Kondensator in einem Potentiometerschreiber am Ausgang dient als Messeinheit. Das prinzipielle Schema der Messanordnung ist in Figur 2 wiedergegeben.



Figur 2

Schema der Messanordnung.

Mit den Widerständen R_1 , R_2 , R_3 kann die Empfindlichkeit des Verstärker eingestellt werden. Zur Konvertierung der Gleichspannung in Wechselspannung dient der elektromagnetisch angetriebene Plattenkondensator DC .

Die Doppeltriode 5691 mit dem Transformator T dient zur Phasengleichrichtung. Die Röhre 6SK7 dient zur Rückkopplung. Mit dem Potentiometer R kann der Nullpunkt des registrierenden Potentiometers verschoben und somit dem Messbereich angepasst werden.

Mit einer Eichspannung am Verstärkereingang kann das Gerät geeicht werden; damit kann nachher die absolute Grösse des Dunkelstromes bei maximaler Dynodenspannung gemessen werden.

Der Bestimmung der totalen Empfindlichkeit muss eine Eichung für der Drehwinkel α vorausgehen. Der Ausschlag am Potentiometerschreiber wird in Funktion des Drehwinkels bestimmt und die Röhren danach klassiert.

Summary

Equipment for testing photo-multipliers with diffused light and with a special electrometer amplifier with dynamic condenser is described.

(Eingegangen: 20. Februar 1954.)

asymptotische Entwicklungen für Fresnelsche Integrale und verwandte Funktionen und ihre Anwendungsmöglichkeiten bei der Berechnung spezieller Raketenbahnen

Von JOSEF ZBORNIK, Chur¹⁾

Wie H. HÖSLI in einer bemerkenswerten Arbeit zeigte²⁾, lässt sich unter den üblichen Annahmen der Windeinfluss auf Raketenbahnen verhältnismässig einfach mathematisch erfassen. Die numerische Auswertung allerdings bereitet insofern einige Schwierigkeiten, als die Lösungen auch Integrale der Form

$$\int_0^x e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt \quad (i = \sqrt{-1}, 0 \leq k \leq 1, 10 \leq x \leq 100) \quad (\text{A})$$

aufweisen, deren mögliche Bestimmung mittels der üblichen Potenzreihenentwicklungen praktisch versagt, weil man in Anbetracht des gegebenen Bereiches von x eine beträchtliche Anzahl von Gliedern berechnen müsste, um die gewünschte Genauigkeit³⁾ von $\pm 2 \cdot 10^{-4}$ zu erreichen.

Diese Schwierigkeit kann durch Entwicklung des Integrals (A) in eine asymptotische Reihe vermieden werden, wie die nachstehenden Ausführungen zeigen.

1.

Das Doppelintegral

$$J(\infty) \equiv \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(y^2+k-i)} dy dt \quad (k \geq 0, \text{ reell}),$$

in dem die Integrationen vertauschbar sind, ergibt, je nachdem man die innere oder äussere Integration zuerst ausführt:

$$\begin{aligned} J(\infty) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2} \pi} \int_0^\infty e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot 1 \int_0^\infty \frac{dy}{y^2 + (k-i)} = \frac{1}{\sqrt{2} (k-i)}, \end{aligned}$$

¹⁾ Calanda S.A., Domat/Ems; Hispano-Suiza (Suisse) S.A., Genève.

²⁾ H. HÖSLI, *Störungen des Raketenfluges durch Windeinwirkung und verwandte Einflüsse*, Flugwehr und Technik 1952, 177 ff.

³⁾ Das heisst eine relative Genauigkeit von 10^{-4} für alle vorgesehenen Werte von k .

oder, wenn $k = \operatorname{ctg} w$, das heisst

$$k - i = \operatorname{ctg} w - i = \frac{1}{\sin w} (\cos w - i \sin w) = \frac{e^{-iw}}{\sin w}$$

gesetzt wird,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt = J(w) = \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} e^{iw/2}.$$

Es ist somit

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt - \int_{-\infty}^0 e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt \right) \\ &= J(\infty) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt \\ &= \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} e^{iw/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N_0(x); \quad N_0(x) = \int_{-\infty}^0 e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt. \end{aligned}$$

Das Integral

2.

$$N_n(x) = \int_{-\infty}^0 e^{-t(k-i)} t^{-(2n-1)/2} dt,$$

welches für $n=0$ mit $N_0(x)$ übereinstimmt, geht durch partielle Integration mit $u = t^{-(2n-1)/2}$, $du = e^{-t(k-i)} dt$ über in

$$\begin{aligned} N_n(x) &= -\frac{1}{k-i} e^{-x(k-i)} x^{-(2n-1)/2} - \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{1}{k-i} \int_{-\infty}^0 e^{-t(k-i)} t^{-(2n+1)/2} dt \\ &= -\frac{1}{k-i} e^{-x(k-i)} x^{-(2n-1)/2} - \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{1}{k-i} N_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$N_0(x) = -\frac{1}{k-i} e^{-x(k-i)} x^{-1/2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k-i} N_1(x),$$

$$N_1(x) = -\frac{1}{k-i} e^{-x(k-i)} x^{-3/2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k-i} N_2(x),$$

$$N_n(x) = -\frac{1}{k-i} e^{-x(k-i)} x^{-(2n-1)/2} - \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{1}{k-i} N_{n-1}(x)$$

Multipliziert man in diesem Gleichungssystem die erste Zeile mit

$$(-1)^0 \cdot 1,$$

die zweite mit

$$(-1)^1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k-i},$$

die dritte mit

$$(-1)^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(k-i)^2} \text{ usw.}$$

und die letzte mit

$$(-1)^n \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \dots \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{1}{(k-i)^n}$$

und summiert hierauf sämtliche Zeilen, so verschwinden alle Glieder, die $N_1(x)$, $N_2(x)$, ..., $N_n(x)$ enthalten, und man erhält:

$$N_0(x) = + e^{-x(k-i)} \sum_{m=0}^n \left\{ (-1)^m \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \dots \frac{2m-1}{2} \cdot \frac{1}{(k-i)^{m+1}} x^{-(2m+1)/2} \right\} \\ - 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{(k-i)^{n+1}} \int_x^{\infty} e^{-t(k-i)} t^{-(2n+3)/2} dt.$$

oder mit Berücksichtigung von (1) und der Identität

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2m-1}{2} \equiv 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2m-1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{4}{4} \dots \frac{2m}{2m} \equiv \binom{2m}{m} m! \frac{1}{2^{2m}}, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} R_0(x) &= -e^{-x(k-i)} \sum_{m=0}^n \left\{ (-1)^m \binom{2m}{2} m! \frac{1}{2^{2m}} \sin^{m+1} w e^{(m+1)wi} x^{-(2n+1)/2} \right\} \\ &\quad \left(\binom{2n+2}{n+1} (n+1)! \frac{1}{2^{2n+2}} \sin^{n+1} w e^{(n+1)w} \int_x^{\infty} e^{-t(k-i)} t^{-(2n+3)/2} dt \right. \\ &= + e^{-kx} x^{-1/2} \sum_{m=0}^n \left\{ (-1)^m \binom{2m}{m} m! \frac{1}{2^{2m}} \sin^{m+1} w e^{[(m+1)w+x]i} x^{-m} \right\} \\ &\quad \left. - R_n(x) = + S_n(x) - R_n(x) \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

$S_n(x)$ wird offensichtlich für jedes feste n gleich Null, wenn x gegen Unendlich geht. Um zu zeigen, dass unter den gleichen Bedingungen auch das Restglied $R_n(x)$ verschwindet, genügt es, zu beweisen, dass für $n = 1, 2, \dots$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{\infty} e^{-t(k-i)} t^{-(2n+3)/2} dt = 0$$

ist, womit dann feststeht, dass $S_{\infty}(x)$ eine asymptotische Reihe darstellt.

Es gilt nun wegen $|e^{it}| = 1$ und $x > 1$

a) für $k \neq 0$:

$$\left| \int_x^{\infty} e^{-t(k-i)} t^{-(2n+3)/2} dt \right| < \left| \int_x^{\infty} e^{-kt} x^{-(2n+3)/2} dt \right| = x^{-(2n+3)/2} \frac{e^{-xk}}{k} = L_1 \quad \text{und}$$

b) für $k=0$

$$\int_0^{\infty} e^{-\pi t(k-1)} t^{-(2n-2)} dt \leq \int_0^{\infty} t^{-(2n-2)} dt = \frac{2}{2n-1} x^{-(2n-1)} = L_2.$$

Da L_1 und L_2 als auch L_3 bei $t \rightarrow \infty$ gleich Null wird, konvergiert $R_n(x)$ gegen Null, wenn $x \rightarrow \infty$ geht, was zu beweisen war.

3.

Die Substitutionen von 5 in 3 liefert demnach die gesuchte asymptotische Darstellung:

$$J(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\pi t(k-1)} t^{-1} dt \approx \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} e^{i\pi/2} - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (-1)^m \binom{2m}{m} m! \frac{1}{2^{2m}} \sin^{m-1} w e^{[(m-1)\pi - x]i} x^{-m} \right\}.$$

Durch Trennung von $J(x)$ in Real- und Imaginärteil ergeben sich die asymptotischen Entwicklungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos(\pi t(k-1)) t^{-1} dt &\approx \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (-1)^m \binom{2m}{m} m! \frac{1}{2^{2m}} \sin^{m-1} w \cos[(m-1)\pi - x] x^{-m} \right\} \\ &= \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} - e^{-ix} (2\pi x)^{-1/2} \left\{ \sin w \cos(w-x) \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 w \cos(2w-x) \frac{1}{2x} - \sin^3 w \cos(3w-x) \frac{3}{4x^2} \right. \\ &\quad \left. - \sin^4 w \cos(4w-x) \frac{15}{8x^3} - \sin^5 w \cos(5w-x) \frac{105}{16x^4} - \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \sin(\pi t(k-1)) t^{-1} dt &\approx \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (-1)^m \binom{2m}{m} m! \frac{1}{2^{2m}} \sin^{m-1} w \sin[(m-1)\pi - x] x^{-m} \right\} \\ &= \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} - e^{-ix} (2\pi x)^{-1/2} \left\{ \sin w \sin(w-x) \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 w \sin(2w-x) \frac{1}{2x} - \sin^3 w \sin(3w-x) \frac{3}{4x^2} \right. \\ &\quad \left. - \sin^4 w \sin(4w-x) \frac{15}{8x^3} - \sin^5 w \sin(5w-x) \frac{105}{16x^4} - \dots \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Setzt man $k = 0$, das heißt $\pi = \pi/2$, so erhält man die entsprechenden asymptotischen Reihen für die Fresnelschen Integrale:

$$\left. \begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi/2}} \int_0^x \cos t \, t^{-1/2} dt \approx \frac{1}{2} + (2\pi x)^{-1/2} \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{2m}{m} m! \frac{1}{2^{2m}} \sin \frac{x+m\pi}{2} x^{-m} \\ &= \frac{1}{2} + (2\pi x)^{-1/2} \left\{ \sin x \frac{1}{2x} - \cos x \frac{3}{4x^2} + \sin x \frac{15}{8x^3} \right. \\ &\quad \left. - \cos x \frac{105}{16x^4} - \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und

$$\left. \begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sin t \, t^{-1/2} dt \approx \frac{1}{2} - (2\pi x)^{-1/2} \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{2m}{m} m! \frac{1}{2^{2m}} \cos \frac{x+m\pi}{2} x^{-m} \\ &= \frac{1}{2} - (2\pi x)^{-1/2} \left\{ \cos x \frac{1}{2x} - \sin x \frac{3}{4x^2} + \cos x \frac{15}{8x^3} \right. \\ &\quad \left. - \sin x \frac{105}{16x^4} - \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

4.

Da in asymptotischen Reihen das Restglied bzw. dessen Absolutwert $|R_n(x)|$ des letzten Gliedes der Reihe $S_n(x)$ nicht übersteigen kann, so gilt mit Beachtung von (3), (4), (5) und $k \geq 0$, $x > 0$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq e^{-kx} (2\pi x)^{-1/2} (-1)^n \binom{2n}{n} n! \frac{1}{2^{2n}} e^{[(n+1)x-x]i} \sin^{n+1} w x^{-n} \\ &\leq \left| e^{-kx} (2\pi x)^{-1/2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2n-1}{2} x^{-n} \right| \\ &\leq \left| (2\pi x)^{-1/2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{2n-1}{2} x^{-n} \right|. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun für

$$x = 10, n = 4: |R_4(10)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot 10^{-4,5} \approx 8 \cdot 10^{-5}$$

und für

$$x = 20, n = 2: |R_2(20)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 20^{-2,5} \approx 1,7 \cdot 10^{-4}.$$

Tabelle 1
Hilfswerte zur numerischen Bestimmung der Integrale (7) bis (10)

k	w	$2w$	$3w$	$4w$	$5w$	$\log \sin w$	$\cos \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2}$	$\frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2}$
0,0	90 0' 0"	180 0' 0"	270° 0' 0"	360° 0' 0"	450 0' 0"	0,00000	0,50000	0,50000
0,1	84° 17' 21,6"	168 34' 43"	252° 52' 5"	337° 9' 26"	421 26' 48"	0,99784 1	0,52300	0,47329
0,2	78° 41' 24,5"	157 22' 49"	236° 4' 14"	314 45' 38"	393 27' 3"	0,99148 1	0,54150	0,44392
0,3	73 18' 2,6"	146 36' 5"	219 54' 8"	293 12' 10"	366 30' 13"	0,98129 1	0,55523	0,41309
0,4	68° 11' 54,8"	136 23' 50"	204 35' 44"	272° 47' 39"	340 59' 34"	0,96777 1	0,56421	0,38198
0,5	63 26' 5,7"	126 52' 11"	190 18' 17"	253° 44' 23"	317 10' 29"	0,95155 1	0,56888	0,35158
0,6	59° 2' 14,2"	118° 4' 28"	177° 6' 43"	236° 8' 57"	295 11' 11"	0,93334 1	0,56981	0,32262
0,7	55 0' 29,0"	110° 0' 58"	165 1' 27"	220° 1' 56"	275 2' 25"	0,91340 1	0,56768	0,29557
0,8	51° 20' 25,5"	102 40' 51"	154° 1' 16"	205 21' 42"	256° 42' 8"	0,89258 1	0,56319	0,27068
0,9	48 0' 46,5"	96° 1' 33"	144 2' 20"	192 3' 6"	240 3' 53"	0,87116: 1	0,55689	0,24802
1,0	45 0' 0"	90° 0' 0"	135° 0' 0"	180° 0' 0"	225° 0' 0"	0,84949 1	0,54035	0,22755

Tabelle 2
Umrechnung der in Frage kommenden x -Werte ins Winkelmaß

$x = \arccos \varphi$	$\varphi = n \cdot 180^\circ + \alpha$	$x = \arccos \varphi$	$\varphi = n \cdot 180^\circ + \alpha$
1	+ 57° 17' 44,8"		6 · 180° + 65° 54' 56,1"
2	+ 114° 35' 29,6"	20	9 · 180° + 98° 52' 24,2"
3	+ 171° 53' 14,4"	30	12 · 180° + 131° 49' 52,3"
4	1 · 180° + 49° 10' 59,2"	40	15 · 180° + 164° 47' 20,3"
5	1 · 180° + 106° 28' 44,0"	50	19 · 180° + 17° 44' 48,4"
6	1 · 180° + 163° 46' 28,9"	60	22 · 180° + 50° 42' 16,5"
7	2 · 180° + 41° 4' 13,7"	70	25 · 180° + 83° 39' 44,5"
8	2 · 180° + 98° 21' 58,5"	80	28 · 180° + 116° 37' 12,6"
9	2 · 180° + 155° 39' 43,3"	90	31 · 180° + 149° 34' 40,6"
10	3 · 180° + 32° 57' 28,1"	100	

Die geforderte Genauigkeit von $\pm 2 \cdot 10^{-4}$ wird somit bei sämtlichen Reihen (7) (10) erreicht, wenn man für $10 \leq x \leq 20$ bei $m = 4$ und für $x > 20$ bei $m = 2$ wählt.

Für sehr grosses x gelten gemäss (7) bis (10) die Approximationen

$$\begin{aligned} &= \int_0^x \cos t e^{-kt} t^{-1/2} dt \approx \cos \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} - e^{-kx} (2\pi x)^{-1/2} \sin w \cos(w+x), \\ &= \int_0^x \sin t e^{-kt} t^{-1/2} dt \approx \sin \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} - e^{-kx} (2\pi x)^{-1/2} \sin w \sin(w+x), \\ &\quad (w = \text{arccotg } k); \end{aligned}$$

$$C(x) \approx \frac{1}{2} (2\pi x)^{-1/2} \sin x \quad \text{und} \quad S(x) \approx \frac{1}{2} (2\pi x)^{-1/2} \cos x.$$

Die Nullstellen der Funktion $C(x) - 1/2$ bzw. $S(x) - 1/2$ liegen somit für $x \ll \pi$ in einer beliebig kleinen Umgebung von $N\pi$ bzw. $(N+1/2)\pi$ ($N =$ natürliche Zahl).

In analoger Weise nehmen die Funktionen (7) und (8) die konstanten Werte

$$\cos \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} \quad \text{bzw.} \quad \sin \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2}$$

für sehr grosses x an, wenn dieses in einer beliebig kleinen Umgebung von $\pi + (\pi/2) - w$ bzw. von $N\pi - w$ liegt.

5.

Die nebenstehenden Tabellen geben die Werte von

$$\cos \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} \quad \text{und} \quad \sin \frac{w}{2} \left(\frac{\sin w}{2} \right)^{1/2} \quad \text{für } k = 0; 0,1; 0,2; \dots; 1,0$$

und die Umrechnung von x in Grade für $x = 1, 2, \dots, 10, 20, \dots, 100$ an.

Summary

Calculating the influence of the wind on the trajectories of rockets (see footnote 2) we find functions of the form

$$f(x) = \int_0^x e^{-t(k-i)} t^{-1/2} dt \quad (i = \sqrt{-1}),$$

where, in general, $0 \leq k \leq 1$ and $x \geq 10$. The present article shows that integrals of such a kind can be represented by asymptotic series convenient for the numerical evaluation with regard to the large values of x . The results are given by formulae (6) to (8). Putting $k = 0$ we get the analogous formulae (9) and (10) or FRESNEL's integrals. To facilitate the computation, two auxiliary tables are added to this paper.

Eingegangen: 26. Oktober 1953.)

Erratum

Boundary Layer on Rotating Spheroids. By BHASKAR SADASHIV FAD Kharagpur, India (ZAMP 5, Fasc. 2, 156 [1954]). Equations (2.1), (2.2), and (2.3) obviously contain many more terms on their right-hand side and this should be indicated by + ... In fact, equations (2.1), (2.2), and (2.3) are written down for the vector equation

$$v \times w = \text{grad} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nu \text{curl } w,$$

where v and w are the velocity and the vorticity vectors respectively.

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Collected Papers of Peter W. J. Debye. (Interscience Publishers, Inc., New York, 1954.) 700 pp., \$9.50.

Es ist einem ehemaligen Schüler nach Durchsicht der Gesammelten Schriften Prof. DEBYES, die anlässlich seines 70. Geburtstages (24. März 1954) von seinen Freunden und Mitarbeitern herausgegeben wurden, selbstverständlich eine fröhliche Pflicht, die Aufgabe des Rezensenten übernehmen zu dürfen. Er erinnert sich dabei wieder der begeisternden Vorlesungen, welche DEBYE in den zwanzig Jahren in Zürich an der ETH. gehalten hat, ihrer bewundernswürdigen Klarheit und Sachlichkeit und ihrer schöpferischen Mittelbarkeit. Was aber vor allem in den Gesammelten Werken des Gefeierten spricht, ist die erstaunliche Vielseitigkeit des Gelehrten, der es auf den verschiedensten Gebieten der Physik und Chemie verstand, neue Erkenntnisse zu vermitteln.

Die Gesammelten Schriften sind in fünf Abschnitte gegliedert. Im ersten finden sich die Arbeiten aus dem Gebiete der Röntgenstrahlen. Als Kernpunkt steht das mit SCHERRER entwickelte Verfahren zur Bestimmung der Kristallstruktur aus den Interferenzen von Röntgenlicht an regellos orientierten Teilchen, welches Verfahren unter dem Namen Debye-Scherrer-Methode für die Röntgenometrie von ausschlaggebender Bedeutung wurde. Im zweiten Abschnitt folgen die Veröffentlichungen, die im Zusammenhang mit dem Begriff des elektrischen Momentes der Moleküle stehen. Sie spielen für den Chemiker in Fragen des strukturellen Aufbaus der Moleküle eine massgebende Rolle.

Der dritte Abschnitt umfasst die Schriften über Elektrolyte, welche grösstenteils in Zusammenarbeit mit andern Autoren entstanden sind. Sie führten vornehmlich zur Klarstellung der fundamentalen Begriffe und bilden mit ihren Modellvorstellungen die Basis der modernen Elektrolytchemie. Der vierte Teil bringt Arbeiten über Lichtstreuung in hochpolymeren Lösungen und kolloidalen Systemen. Diese Mitteilungen sind ausschliesslich neuesten Datums; sie gelangten aber rasch in der Physik der Hochmolekularen zu anerkannter Bedeutung und führten unter anderem zu einer einwandfreien Bestimmung des Molekulargewichtes. Im letzten, fünften Abschnitt sind endlich jene Veröffentlichungen DEBYES wiedergegeben, die sich nicht in ein bestimmtes Erscheinungsgebiet einordnen lassen.

nen lassen. Unter ihnen finden wir die Arbeit über Lichtstreuung durch Schallwellen, welche die heute unter dem Namen Debye-Sears-Effekt bekannte Erscheinung behandelt.

Das umfangreiche Sammelwerk wird nicht nur den ehemaligen Schülern und Mitarbeitern eine grosse Freude bereiten, sondern auch jedem interessierten Leser, da es einen Einblick in das Leben und Wirken einer Persönlichkeit bietet, die es verdient hat, einerseits in meisterhafter und gütiger Weise den Nachwuchs von Lehrern und Forschern zu fördern und anderseits ein bleibendes Werk eigener wissenschaftlicher Erkenntnisse zu schaffen.

R. Sängler

Progress in Nuclear Physics, Vol. 2. By O. R. FRISCH (Pergamon Press Ltd., London, 1952). 295 pp.; £3/3/0.

Die Kernphysik hat in jüngster Zeit so ungeheure Fortschritte gemacht, sowohl auf experimentellem wie auch auf theoretischem Gebiet, dass es für den einzelnen Forscher unmöglich geworden ist, alle Teilgebiete in gleicher Weise zu beherrschen. Deshalb ist auch dieses Buch sehr zu begrüßen, in welchem ausgesprochene Fachleute ihre Kenntnisse in einzelnen Artikeln zur Darstellung bringen. Dabei handelt es sich um eine Auswahl besonders aktueller Probleme:

The Electron Optical Properties of Magnetic Beta Ray Spectrometers (N. F. VERSTER);

Nuclear Paramagnetic Resonance (R. V. POUND);

Luminescent Materials For Scintillation Counters (G. F. J. GARLIK);

The Neutron Proton Interaction (G. L. SQUIRES);

Fission (W. J. WHITEHOUSE);

The Low-Lying Excited States of Light Nuclei (W. E. BURCHAM);

The Nuclear Shell Modell (B. H. FLOWERS);

Ionisation by Fast Particles (T. E. CRANSHAW).

Dieses Buch gibt einen ausgezeichneten Überblick über den heutigen Stand der Physik auf diesen Gebieten und vermittelt am Ende jeden Kapitels Literaturangaben über die einschlägigen Arbeiten des betreffenden Wissensgebietes. Es ist jedem Kernphysiker, der sich für die theoretische Deutung experimenteller Ergebnisse interessiert, sicher eine wertvolle Lektüre.

O. Huber

Nomogramme zum praktischen Rechnen. Von E. VÖLLM, Zürich. Herausgegeben von ED. AERNI-LEUCH, Bern. Preis pro Blatt 35 Rp.

Von den zwei gedruckten Rechenblättern handelt es sich beim ersten um eine sehr zweckmässige Tafel zur Bestimmung von logarithmischen Leitern beliebigen Moduls in der Nomographie. Die zweite Tafel stellt ein Nomogramm für den Sinussatz der ebenen und der sphärischen Trigonometrie dar.

Das erste Blatt wird jedem willkommen sein, der praktische Nomogramme zeichnet, während beim zweiten besonders auf den didaktischen Wert für den Unterricht hingewiesen sei.

H. Künzi

Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics. By S. BERGMAN and M. SCHIFFER (Academic Press Inc., Publishers, New York, 1953).

In den letzten Jahren hat die von BERMAN und BOCHNER 1922 eingeführte Kernfunktion unter der Zusammenarbeit von BERGMAN und SCHIFFER bei Randwertproblemen elliptischer Differentialgleichungen eine zentrale Stellung erobert. Ist die zu einer elliptischen Differentialgleichung in einem Gebiet ge-

hörige Kernfunktion bekannt, so lassen sich die Lösungen der Randwertaufgaben erster, zweiter und dritter Art sowie die Greensche, Neumannsche und Robins Funktion durch Quadraturen herstellen. Der erste Teil des Buches gibt eine Übersicht über die bei verschiedenen Gegenständen (Wärmeleitung, Hydrodynamik, Elektro- und Magnetostatik und Elastizitätstheorie) vorkommenden Randwertprobleme als Motivierung und Illustration der im zweiten Teil behandelten Theorie.

A. Pflü

Aerodynamics of Propulsion. By D. KÜCHEMANN and J. WEBER. (McGraw-Hill Publishing Co. Ltd., London 1953). 331 pp., 150 figs.; \$9.—.

Mit ihrer Publikation fügen die Verfasser der Schriftenreihe J. C. HUNSAKER «McGraw-Hill Publications in Aeronautical Science» einen weiteren Band bei und geben damit einem neuen Zweiggebiet der Aerodynamik den Namen. Die bisherigen Gesamtdarstellungen der Aerodynamik befassen sich vorwiegend mit der Erzeugung des Auftriebs, während hier die Strömungsprobleme der Erzeugung des Vortriebs erstmals zusammengefasst werden.

Dem Kernproblem der Vortriebserzeugung, der mechanischen und thermischen Energiezufuhr an Gasströme sind die allgemeinen Kapitel gewidmet. Wesentlich ist nun aber, dass in die Vortriebsaerodynamik die zahlreichen Probleme der Luftführungen, Kanalströmungen, Einlaufformen, Mündungen, wie sie in Luftentnahmen, Tunnelschrauben, Kühlern und bei jeder Triebwerksinstallation in Flugzeugen zahlreich auftreten, eingeschlossen werden. Was nur mühsam und weit verstreut in der Literatur der Luftfahrttechnik aufgefunden werden kann, wird hier in verwertbarer Form und reich belegt durch zum Teil unveröffentlichte Messungen geordnet wiedergegeben. Das Buch begrenzt das neue Teilgebiet einerseits mit der Strahlausbreitung der Strahlantriebe und andererseits mit der Vortriebserzeugung des Insektenfluges.

Die aerodynamischen Probleme der Turbomaschinen und Propeller sind nunmehr recht ausserhalb der Betrachtungen gestellt, und die Propulsionsaerodynamik bei Überschall als noch zu unerforscht nicht in die Arbeit aufgenommen. Eine passive Form der Vortriebserzeugung, die Grenzschichtabsaugung, tritt hier nur als Hintergrund, wahrscheinlich weil sie ebenso sehr mit der Profilaerodynamik wie mit der Vortriebserzeugung verknüpft ist.

W. Spillmann

Proceedings of the Western Computer Conference. Held by the Joint AIRE-AIEE-ACM Computer Conference Committee Los Angeles, California, November 4 to 6, 1953. (Published by The Institute of Radio Engineers, Inc., New York, 1953). 231 pp., 135 figs.; \$3.50.

Die überaus schnelle, an vielen verschiedenen Orten betriebene Entwicklung der elektronischen Rechengерäte macht einen regelmässigen Gedankenaustausch der beteiligten Forscher zu einer Notwendigkeit. Der vorliegende Band ist das Protokoll einer solchen Tagung. Digitale und Analogierechengерäte sind in gleicher Weise berücksichtigt. Das Hauptgewicht liegt hier nicht so sehr auf den technischen Details der Rechengерäte als auf organisatorischen Fragen des Einsatzes ferner auf den Erfahrungen bei der Lösung praktischer Probleme, die zum Teil dem Flugzeugbau entstammen. Interessant sind verschiedene Verfahren zur Umwandlung zwischen digitalen und Analogiegrössen sowie die ständig zunehmende Verwendung von Netzwerken für partielle Differentialgleichungen. Das Buch vermittelt dem Leser einen überaus wertvollen Einblick in eine grosse Menge praktischer Erfahrungen.

A. Speiser

Theorie und Anwendungen des echten Kugelgetriebes

VON THEODOR ERISMANN, Schaffhausen¹⁾

Problemstellung

Reibungsgetriebe mit kugelförmigen Übertragungsgliedern werden in der Technik zu verschiedenen Zwecken verwendet, wobei die besonderen Eigenschaften kugel- und kugelkalottenförmiger Körper vor allem für die Erzielung stufenloser Drehzahländerung herangezogen werden. Kaum eine dieser Konstruktionen ist als konsequenter Ausfluss eines das ganze in Frage stehende Gebiet umfassenden Wissens anzusehen; vielmehr herrscht der Charakter der Erfindung ad hoc vor, bei der nur ein einzelnes konkretes Problem angegangen und nach dessen Lösung die Forschungsarbeit abgebrochen wird. Dieser Zustand ist bedauerlich, denn es wird dabei immer wieder eine grosse Menge an Scharfsinn und Gedankenarbeit für die Lösung von Einzelaufgaben verwendet, wobei jedes Problem fast gänzlich von Grund auf neu beackert werden muss, weil den vorhergehenden Arbeiten der Anspruch auf allgemeine Gültigkeit fehlt.

Die vorliegende Studie stellt einen Versuch dar, diesen Mangel – wenigstens für ein wichtiges Teilgebiet – durch Schaffung einer universell anwendbaren Theorie zu beseitigen. Dass dies nicht schon früher geschehen ist, erscheint nach den hervorragenden Ansätzen von HELE SHAW [1]²⁾ sehr bedauerlich. Denn das zur Diskussion stehende Gebiet birgt eine Reihe unausgeschöpfter praktischer Möglichkeiten, wie sich der Leser leicht an Hand der Anwendungsbeispiele in den beiden letzten Abschnitten dieser Arbeit überzeugen kann. Es kommt jedenfalls nicht von ungefähr, dass der Verfasser gerade durch intensive praktische Beschäftigung mit Kugelgetrieben zu einer theoretischen Durchleuchtung des Gebietes angeregt wurde.

Grundbegriffe

Es soll im weiteren nur von *echten Kugelgetrieben* die Rede sein, deren Definition folgende *Hauptsätze* umfassen möge:

1. Das Getriebe besteht aus einer und nur einer Kugel und mehreren Rollen in der Form beliebiger Rotationskörper, die die Kugel in je einem Punkt berühren und den Kugelmittelpunkt in einer unveränderlichen Lage festhalten.

¹⁾ Alfred J. Amsler & Co.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 388.

2. Die Kugel ist mit der Umwelt ausschliesslich durch die Rollen verbunden und erhält von diesen eine eindeutig bestimmte Drehbewegung.
3. Bei sämtlichen vorkommenden Bewegungen dürfen im Rahmen der fabrikatorisch bedingten Genauigkeiten nur abrollende, nicht aber gleitende Relativbewegungen zwischen der Kugel und den Rollen auftreten.
4. Die Rollendrehachsen dürfen keine Bewegungen ausführen, bei denen sich ihre Abstände vom Kugelmittelpunkt verändern.
5. Kugel und Rollen bestehen aus Materialien, deren Härte nennenswerte Deformationen durch die auftretenden Kräfte ausschliesst.

Ferner ist noch ein wesentlicher Ausdruck zu definieren, der in der Folge immer wieder Verwendung finden soll: Als *homoplane Ebene* einer Geraden s bezeichnet man die von dieser Geraden und dem Kugelmittelpunkt aufgespannte Ebene h bezeichnet. Zwei Gerade heissen homoplan, wenn sie in einer gemeinsamen homoplane Ebene liegen; zwei Rollen heissen homoplan, wenn ihre Drehachsen homoplan sind.

Es gibt nur drei Typen von Rollenarrangements, die dem vierten der obigen Hauptsätze genügen. Es sind dies:

1. Die *feste Rolle*, deren Drehachse ein für allemal in ihrer Lage im Raum festgelegt ist.
2. Die *Steuerrolle*, deren Drehachse um eine durch den Kugelmittelpunkt gehende Schwenkachse schwenkbar angeordnet ist, wobei diese beiden Achsen homoplan sind.
3. Die *Schlepprolle*, deren Drehachse um eine durch den Kugelmittelpunkt gehende Schwenkachse schwenkbar angeordnet ist, wobei diese beiden Achsen nicht homoplan sind.

Wie später gezeigt wird, müssen Steuerrollen stets durch äussere Einwirkung geschwenkt werden. Man kann sie daher für jeden Zeitquerschnitt in gleicher Weise betrachten wie die festen Rollen. So rechtfertigt sich eine Zusammenfassung dieser beiden Typen unter dem Sammelbegriff *Leitrolle*.

Dass die so definierten Getriebe in der Tat die Bezeichnung «echte» Kugelgetriebe verdienen, ergibt sich nicht nur aus dem Umstand, dass hier eine und nur eine Kugel im Zentrum der Betrachtung steht. Vielmehr kommen bei diesen Getrieben alle spezifischen Eigenschaften der Kugel bereits restlos zur Geltung, und man darf wohl die Behauptung wagen, dass durch eine weitere Fassung des Begriffes an technischen Möglichkeiten nicht viel gewonnen wäre (abgesehen natürlich vom Aneinanderreihen mehrerer derartiger Getriebe, das selbstverständlich neue Kombinationen bietet). Ohne auf die tieferen Zusammenhänge einzugehen, kann man jedenfalls feststellen, dass die Kugel – wie die Ebene – sich durch die gänzliche Abwesenheit singulärer Punkte auf ihrer Oberfläche auszeichnet und dass man daher auf einer Kugelfläche mit weniger Ausnahmen alle Operationen auf beschränktem Raum durchführen kann, die sonst nur zu verwirklichen wären, wenn eine unendlich grosse ebene Fläche

Verfügung stünde. Es sei dem aufmerksamen Leser überlassen, zu jedem weiter unten folgenden Beispiele einen Analogiefall auf der Ebene zu konstruieren.

Theorie des idealen Kugelgetriebes

Unter einem *idealen Kugelgetriebe* wollen wir ein echtes Kugelgetriebe verstehen, dessen Definition durch folgende Zusätze ergänzt ist:

Der fünfte Hauptsatz wird dahingehend verschärft, dass ein unendlich hartes Material für Kugel und Rollen angenommen wird, so dass die Berührungspunkte unendlich klein sind.

Der Reibungskoeffizient zwischen Kugel und Rollen soll so gross sein, dass die übertragbaren Drehmomente stets grösser sind als die tatsächlich auftretenden.

Wo von homoplanen Rollen die Rede ist, werden mathematisch genau homoplane Achsen verlangt.

Wie man im Laufe der Untersuchung sehen wird, vereinfacht der erste der Zusätze die Theorie in hohem Masse, wobei er aber des zweiten – und seinerseits wiederum des dritten – bedarf, um sinnvoll zu sein.

Nachdem man sich so über die Voraussetzungen der Theorie klar geworden muss zuerst die Frage beantwortet werden, welche Bewegungen die Kugel überhaupt ausführen kann und welchen Einfluss die einzelnen Rollentypen diese Bewegungen ausüben.

Eine Kugel, deren Mittelpunkt in seiner Lage festgehalten wird, besitzt offenbar noch drei Drehungs-Freiheitsgrade. Eine um ihre Drehachse reibungsgelagerte Leitrolle zwingt den Berührungspunkt, sich senkrecht zu ihrer homoplanen Ebene zu bewegen. Dies ist nur möglich, wenn die Kugel- und die Rollendrehachse homoplan sind. Daraus ergibt sich eine Reihe trivialer Beispiele, deren Beherrschung den Überblick über einen konkret gegebenen Fall in hohem Masse erleichtert:

Die Kugeldrehachse ist homoplan zu allen vorhandenen Leitrollendrehachsen.

Eine frei laufende Leitrolle vermindert im allgemeinen die Zahl der Freiheitsgrade der Kugel um eins (festgelegt ist dabei die Ebene, in der die Kugeldrehachse liegt, frei bleibt noch deren Richtung innerhalb dieser Ebene sowie die Winkelgeschwindigkeit der Drehung).

Zwei zueinander inhomoplane, frei laufende Leitrollen bestimmen die Lage der Kugeldrehachse eindeutig.

Untereinander homoplane, frei laufende Leitrollen sind bezüglich ihres Einflusses auf die Lage der Kugeldrehachse gleichwertig.

Es können beliebig viele untereinander homoplane frei laufende Leitrollen an der Kugel angreifen, ohne je durch ihre Vielzahl eine Überbestimmtheit der Kugelbewegung zu bewirken.

Eine angetriebene Leitrolle zwingt dem Berührungspunkt nicht nur bestimmte Richtung, sondern auch eine bestimmte Geschwindigkeit auf. Daraus ergeben sich die Sätze:

Eine angetriebene Leitrolle vermindert im allgemeinen die Zahl der Freiheitsgrade der Kugel um zwei (festgelegt ist die Ebene der Kugeldrehachse und die Winkelgeschwindigkeitskomponente der Kugel um die zur Verbindungsgeraden vom Kugelmittelpunkt zum Berührungspunkt senkrecht zur Drehachse, frei bleibt noch die Winkelgeschwindigkeitskomponente um die erwähnte Verbindungsgerade).

Der Einfluss einer angetriebenen Leitrolle auf die Kugeldrehung ist bestimmt durch ihre homoplane Ebene sowie durch die Lage und Umfang der Winkelgeschwindigkeit ihres Berührungspunktes mit der Kugel.

Neben einer angetriebenen Leitrolle können beliebig viele dazu homoplane freilaufende Leitrollen an der Kugel angreifen, ohne die Zahl ihrer Freiheitsgrade weiter zu beeinflussen.

Es muss hier noch auf eine Besonderheit der Steuerrolle hingewiesen werden: Ihr Berührungspunkt liegt — wie bei jeder Rolle — stets auf dem Schwenkkreis ihrer homoplanen Ebene mit der Kugel, und die Bewegung dieses Punktes erfolgt senkrecht zur homoplanen Ebene. An einer freilaufenden Rolle kann nur eine Kraft offenbar nur in achsparalleler Richtung durch den Berührungspunkt übertragen werden. Somit liegt bei der frei laufenden Steuerrolle sowohl die Wirkungslinie der übertragenen Kraft als auch die Schwenkachse in der homoplanen Ebene, und es kann von dieser Kraft kein Moment um die Schwenkachse erzeugt werden. Bei einer angetriebenen Steuerrolle entsteht ein solches Moment zwar durch das Antriebsmoment; dies führt aber nicht zu einer eindeutigen Lage der homoplanen Ebene, sondern zu einer ständigen Drehbewegung um dieselbe Achse. Hier liegt der Grund, weshalb eine um ihre Schwenkachse frei schwenkbare Steuerrolle keine Bedeutung für die weiteren Untersuchungen hat.

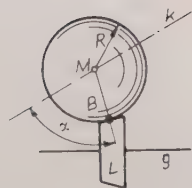
Gerade umgekehrt verhält es sich bei der Schlepprolle. Hier erzeugt eine in Richtung der Rollendrehachse wirkende Kraft stets ein Moment um die Rollachse, oder es kommt — wenn die Rolle reibungsfrei schwenkbar ist — zu einer Schwenkung, die so lange andauert, bis die Rolle zur Kugeldrehachse homoplan geworden ist. Durch die Möglichkeit einer gleichzeitigen Roll- und Schwenkbewegung gestattet die freilaufende und frei schwenkbare Schlepprolle dem Berührungspunkt eine Bewegung mit beliebiger Geschwindigkeit und in beliebiger Richtung, und man kann feststellen:

Eine frei schwenkbare und frei laufende Schlepprolle vermindert die Zahl der Freiheitsgrade der Kugel nicht.

Es können also beliebig viele frei schwenkbare und freilaufende Schlepprollen an der Kugel angreifen, ohne je eine Überbestimmtheit der Kugelbewegung zu bewirken.

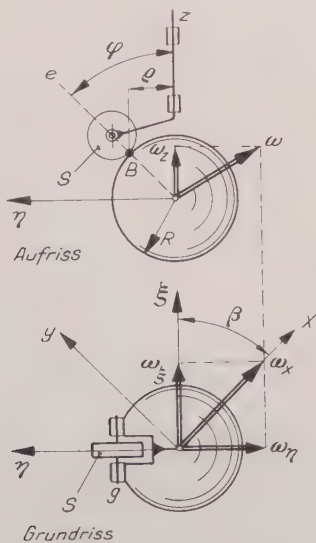
Eine frei schwenkbare angetriebene Schlepprolle vermindert im allgemeinen die Zahl der Freiheitsgrade der Kugel um eins (festgelegt ist die Winkelgeschwindigkeitskomponente um die zur Verbindungsgeraden vom Kugelmittelpunkt zum Berührungspunkt senkrechte Achse, frei bleibt die durch einen Freiheitsgrade gekennzeichnete Lage der Kugeldrehachse).

Die durch äussere Einflüsse geschwenkte Schlepprolle wirkt im wesentlichen als Leitrolle. Während aber eine Steuerrolle beim Schwenken nur die Lage der Kugeldrehachse verändert, der Kugel aber keine zusätzliche Drehung aufzuerlegen (sie kann auch bei stillstehender Kugel geschwenkt werden), entsteht andererseits eine parasitäre Kugeldrehung. Dieser scheinbar unwesentliche Unterschied ist so folgenswer, dass eine von aussen geschwenkte Schlepprolle zusätzlich als uninteressant bezeichnet werden kann. Unter einer Schlepprolle wird daher in der Folge stets eine frei schwenkbare Schlepprolle, unter einer Steuerrolle stets eine von aussen geschwenkte Steuerrolle verstanden.



Figur 1

Verhalten einer festen Rolle auf der Kugel.



Figur 2

Verhalten einer Schlepprolle.

Die numerischen Verhältnisse sind bei einer Leitrolle ausserordentlich einfach. Betrachtet man die homoplane Ebene einer um die Achse g rotierenden Rolle L (Figur 1), so stellt man fest, dass die Umfangsgeschwindigkeit V_B am Berührungspunkte B bei einem Kugelradius R , einer Winkelgeschwindigkeit ω der Kugel um die Achse k und bei einem Winkel α zwischen k und der

Verbindungsgeraden vom Kugelmittelpunkt M nach B durch die Beziehung

$$V_B = R \omega \sin \alpha$$

gegeben ist.

Wesentlich unübersichtlicher sind die Verhältnisse bei der Schlepprolle vorab weil sich hier das Hauptinteresse nicht auf die Dreh-, sondern auf die Schwenkbewegung der Rolle richtet. Mit Vorteil betrachtet man zunächst einen orthogonalen Sonderfall, der sich nachträglich ohne grosse Mühe zu allgemeiner Gültigkeit ausbauen lässt.

Die in Figur 2 dargestellte Schlepprolle S zeichnet sich dadurch aus, dass ihre Drehachse g senkrecht zur Schwenkachse z steht und dass der Berührungspunkt B der höchste Punkt des Schnittkreises der homoplanen Ebene e mit der Kugel ist. Der Kugelradius wird mit R angesetzt. Zwischen e und z liegt der «Schleppwinkel» φ .

Es werden zwei kartesische Koordinatensysteme, x, y, z und ξ, η, z , eingeführt. x, y, z ist zunächst raumfest. ξ, η, z macht die Schwenkungen der Schlepprolle mit, so dass ξ stets parallel zu g bleibt und mit x den Winkel β einschliesst. Die Kugeldrehachse liegt in der (x, z) -Ebene.

Nun wird die Winkelgeschwindigkeit ω der Kugel nach den mitbewegten Koordinaten $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_z$ zerlegt. Unter dem Einfluss von ω_ξ dreht sich die Rolle mit der Umfangsgeschwindigkeit

$$V_{B\xi} = R \omega_\xi = R \omega_x \cos \beta,$$

erhält aber keine Schwenkbewegung. ω_η bewirkt in B eine Umfangsgeschwindigkeit

$$V_{B\eta} = R \omega_\eta \cos \varphi = R \omega_x \sin \beta \cos \varphi,$$

die eine Schwenkung hervorruft, und zwar – da sich B dabei auf einem Radius

$$\varrho = R \sin \varphi$$

dreht – mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega_{z\eta} = \frac{V_{B\eta}}{\varrho} = \omega_x \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi.$$

Dieser Drehung überlagert sich die durch einfache Mitnahme entstehende Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega_{zz} = \omega_z,$$

so dass die Schwenkung durch

$$\Omega_z = \Omega_{z\eta} + \Omega_{zz} = \omega_x \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi + \omega_z$$

gekennzeichnet ist.

Das Schwenkverhalten einer Schlepprolle ist durch die Beziehungen (5), (6, 7) restlos umschrieben, und es lohnt sich, kurz die wesentlichsten Punkte dieses Verhaltens festzustellen.

Fragt man sich nach den Gleichgewichtslagen, so findet man, dass diese durch das Verschwinden von Ω_z und somit durch

$$\omega_z = -\omega_x \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi \quad (8)$$

kennzeichnet sein müssen, was offenbar nur möglich ist, wenn

$$\frac{\omega_z}{\omega_x} \leq \operatorname{ctg} \varphi \quad (9)$$

Für den praktisch wichtigen Fall der nur aus der einen Komponente ω_x bestehenden Kugeldrehung erhält man für die Schwenkung

$$\Omega_z = \Omega_{z\eta} = \omega_x \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi. \quad (10)$$

aber bei feststehendem (x, y, z) -System

$$\Omega_z = -\frac{d\beta}{dt} \quad (11)$$

erhält man für den Verlauf des «Einschleppens» die Differentialgleichung

$$\frac{d\beta}{dt} = -\omega_x \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi, \quad (12)$$

deren Lösung für den wiederum praktisch wichtigen Sonderfall einer konstanten Kugelwinkelgeschwindigkeit und eines kleinen Winkels β die einfache Exponentialbeziehung

$$\beta = \beta_0 e^{-\omega_x \operatorname{ctg} \varphi t} \quad (13)$$

liefert. Im übrigen ist es klar, dass bei Abwesenheit einer ω_z -Komponente die Gleichgewichtslagen $\beta = 0$ und $\beta = \pi$ vorliegen, wobei die erste stabil, die zweite labil ist.

Ein weiterer Fall von praktischer Bedeutung ist, wiederum bei Abwesenheit der ω_z -Komponente, durch den Übergang von einem feststehenden auf ein mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω_0 um die z -Achse rotierendes (x, y, z) -System gegeben, also durch eine in der (x, y) -Ebene gleichförmig rotierende Kugeldrehachse. Hier gilt

$$\frac{d\beta}{dt} = \Omega_0 - \omega_x \operatorname{ctg} \varphi \sin \beta, \quad (14)$$

und das Gleichgewicht stellt sich für

$$\beta = \arcsin \left(\frac{\Omega_0}{\omega_x} \operatorname{tg} \varphi \right) \quad (15)$$

ein. Um diesen Winkel bleibt also die homoplane Ebene der Rollendrehachse dauernd hinter der Kugeldrehachse zurück.

Um den Nachweis zu erbringen, dass das dargelegte Schwenkverhalten nicht nur für die bis dahin betrachtete orthogonal angeordnete Schlepprolle, sondern auch für jede andere hierzu homoplane Schlepprolle mit gleicher Schwenkachse gilt, braucht man nur für einen Augenblick anzunehmen, das (ξ, η, z) -System (und mit ihm die homoplane Ebene der Rolle) werde nicht geschwenkt, sondern bleibe raumfest. Dagegen führe die Kugel eine derartige Drehbewegung aus, dass sich zwischen ihr und der Rolle dieselben Relativbewegungen abspiele wie bei dem geschilderten Einschleppvorgang. Alle zur ersten Rolle homoplanen und um die gleiche Schwenkachse schwenkbaren, frei laufenden Rollen haben in diesem transformierten System die Bedeutung einer Anzahl homoplaner frei laufender fester Rollen. Da eine von ihnen die Kugeldrehung gestattet, gestatten sie auch alle anderen. Damit ist gezeigt, dass diese ganze Rollenfamilie nach Rückkehr in das geschwenkte (ξ, η, z) -System die Schwenkungen der ersten Rolle sperrungsfrei mitmacht und dass – da die Bewegung jeder Schlepprolle durch die Kugeldrehung eindeutig festgelegt ist – das Schwenkverhalten aller betrachteten Rollen gleich dem der ersten Rolle ist. Man kann also die Sätze festhalten:

Das Schwenkverhalten einer Schlepprolle für eine gegebene Kugeldrehung ist eindeutig gegeben durch die Lage ihrer Schwenkachse und ihrer homoplanen Ebene. Es ist unabhängig von der Lage der Rollendrehachse in der homoplanen Ebene sowie von der Lage ihres Berührungspunktes auf dem Schnittkreis ihrer homoplanen Ebene mit der Kugel.

Es können daher die Drehachsen beliebig vieler untereinander homoplaner freilaufender Schlepprollen starr miteinander verbunden um eine gemeinsame Schwenkachse schwenkbar angeordnet werden, ohne einander zu stören.

Für den Fall der Kugeldrehung um eine feststehende Achse erreicht jede beliebige Schlepprolle dann eine Gleichgewichtslage, wenn ihre Drehachse zur Kugeldrehachse homoplan wird.

Nachdem man sich nunmehr über das Verhalten der einzelnen Rollentypen in grossen Zügen Klarheit verschafft hat, ist es keine schwierige Aufgabe mehr, die Rollenkombinationen festzustellen, die zu einer eindeutig bestimmten Kugeldrehung führen. Die folgende Zusammenstellung ist natürlich als Minimal-schema zu betrachten, da darin nur von den *Arbeitsrollen* die Rede ist, die für die eindeutige Bestimmung der Kugeldrehung unbedingt erforderlich sind. Darüber hinaus kann noch eine beliebige Zahl weiterer Rollen an der Kugel anliegen, sofern dadurch keine weitere Einschränkung der Freiheitsgrade der Kugel erfolgt. Dass die Anordnung solcher weiterer *Stützrollen* – wie die vorangehenden Überlegungen zeigen – möglich ist, darf als Glück bezeichnet werden. Denn einerseits genügen zwei bis drei Rollen zur Festlegung der Kugeldrehung,

andererseits sind ihrer mindestens vier erforderlich, um den Kugelmittelpunkt seiner Lage festzuhalten und für die nötige Anpressung aller beteiligten Rollen zu sorgen.

Die drei Freiheitsgrade der Kugel werden durch folgende Rollenkombinationen vollständig aufgebraucht:

Eine angetriebene Leitrolle und eine hierzu inhomoplane freilaufende Leitrolle.

Eine angetriebene Leitrolle und eine angetriebene Schlepprolle.

Zwei zueinander homoplane angetriebene Leitrollen.

Zwei zueinander inhomoplane freilaufende Leitrollen und eine angetriebene Schlepprolle.

Eine freilaufende Leitrolle und zwei angetriebene Schlepprollen mit verschiedenen Schwenkachsen.

Drei angetriebene Schlepprollen mit verschiedenen Schwenkachsen.

Dass selbst bei unvollständiger Ausnutzung dieser sechs Kombinationsmöglichkeiten eine grosse Anzahl von Problemen gelöst werden kann, soll in den Abschnitten über die Anwendungen dargelegt werden.

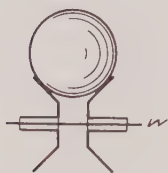
Theorie des technischen Kugelgetriebes

Wir kommen nun auf die drei Zusatzbedingungen zurück, die wir am Beginn des vorhergehenden Abschnittes zur Definition des idealen Kugelgetriebes formuliert hatten. Es ist offensichtlich, dass an einem praktisch ausgeführten Getriebe weder der erste noch der dritte dieser Zusätze vollkommen verwirklicht werden kann und dass man es in Wirklichkeit stets nur mit mehr oder weniger guten Annäherungen zu tun hat. Zweck der folgenden Überlegungen ist, Kriterien für die Güte dieser Annäherungen ausfindig zu machen und Richtlinien für eine optimale Ausnützung der dabei erworbenen Kenntnisse in der konstruktiven Praxis zu gewinnen.

Am leichtesten ist der dritte Zusatz zu behandeln, der absolute Genauigkeit der vorkommenden homoplanen Beziehungen verlangt. Tatsache ist, dass man einerseits konstruktiv nicht ohne homoplane Rollengruppen oder wenigstens Rollenpaare auskommt, dass andererseits die technische Verwirklichung einer guten Annäherung hohe Anforderungen an die Fabrikationsmethoden stellt und dass schliesslich von dem Augenblick an, wo die Kugeldrehung eindeutig gegeben ist, der Ersatz auch nur eines homoplanen Rollenpaares durch ein leicht inhomoplanes zu einer Überbestimmtheit der Kugeldrehung führt. Diese Drehung kann dann nur noch aufrechterhalten werden, wenn mindestens eine der beteiligten Rollen neben der abrollenden eine gleitende Bewegung auf der Kugelfläche ausführt. Der im zweiten Zusatz geforderte hohe Reibungskoeffizient führt, indem er eine solche gleitende Relativbewegung ausschliesst, zum Blockieren des Getriebes. Praktisch kann sowohl eine Gleitbewegung als auch

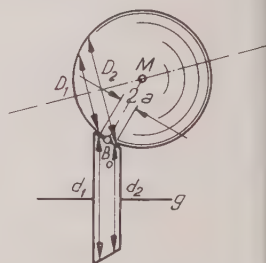
dieses Blockieren auftreten. Man hat also alles Interesse an einer möglichst weitgehenden Verbesserung der homoplanen Beziehungen.

Die Schwierigkeit bei der Verwirklichung ist eine doppelte: Erstens müsse die Achsen der beiden Rollen in eine Ebene gebracht werden; zweitens ist dafür zu sorgen, dass der Kugelmittelpunkt in diese Ebene zu liegen kommt. Hier hilft in vielen Fällen ein einfacher Kniff: Selbstredend liegen die Achsen zweier koaxial angeordneter Rollen von selber «in einer Ebene», und zwar, wenn man sie im Sinne von Figur 3 unabhängig voneinander auf einer gemeinsamen Welle W lagert, mit der höchsten fabrikatorisch überhaupt erreichbaren Genauigkeit.



Figur 3

Homoplanes Rollenpaar auf gemeinsamer Achse.



Figur 4

Erklärung des mahrenden Abrollens.

Die gemeinsame Achse spannt aber noch gar keine eindeutig bestimmte Ebene auf, so dass sich die gemeinsame homoplane Ebene automatisch und unabhängig von kleinen Abweichungen des Kugelmittelpunktes von seiner Sollag als Verbindungsebene zwischen der Rollachse und dem Kugelmittelpunkt ergibt. Diese Lösung mit koaxialen Rollen auf gemeinsamer Welle ist also eine fast vollkommene Annäherung an die idealen Verhältnisse überall dort anzustreben, wo homoplane Rollen nicht zu vermeiden sind.

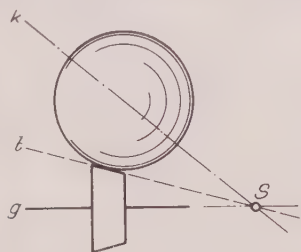
Wesentlich schwieriger liegen die Verhältnisse beim ersten Zusatz, da die Härte der Materialien naturgemäss Grenzen gesetzt und hohe Anpresskräfte zur Übertragung möglichst grosser Momente meist erwünscht sind. Hier muss man etwas tiefer in die Vorgänge eindringen, die sich in der Berührungsfläche zwischen Rolle und Kugel bei der Übertragung einer Umfangskraft abspielen.

Figur 4 zeigt eine Kugel, die sich um eine Achse k dreht und auf der einen Rolle abrollt, deren Drehachse durch g gegeben ist. Die Berührungsfläche stellt sich im gezeichneten homoplanen Schnitt als annähernd gerades Kurvenstück der Länge $2a$ dar. Auf dieser Berührungsfläche rollt die Kugel mit wirksamen Durchmessern zwischen D_1 und D_2 , die Rolle mit Durchmessern zwischen d_1 und d_2 ab. Man erkennt sofort, dass innerhalb der Berührungsfläche eine Unbestimmtheit der Bewegung und damit ein internes Gleiten auftreten muss.

sofern nicht

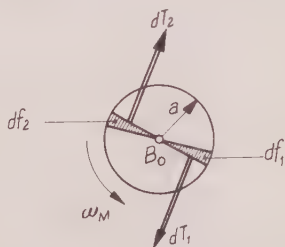
$$\frac{D_1}{d_1} = \frac{D_2}{d_2} \quad (16)$$

ist. Dies wäre aber nur der Fall, wenn die gemeinsame Tangentialebene t der beiden Körper durch den Schnittpunkt S ihrer beiden Drehachsen g und h im Sinne von Figur 5 ginge und damit ein Abrollen entstünde, das mit Recht als *ideales Abrollen* bezeichnet werden darf. Dieses ideale Abrollen ist natürlich überall dort, wo es konstruktiv möglich ist, anzuwenden, da es einerseits ein auch in zweiter Näherung eindeutiges Übersetzungsverhältnis zwischen Rolle



Figur 5

Beispiel für ideales Abrollen.



Figur 6

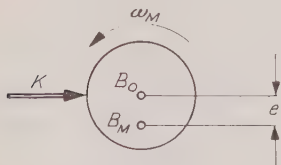
Symmetrien in der Berührungsfläche bei kräftefreiem Abrollen.

und Kugel ergibt und andererseits ein Minimum an Leistungsaufwand und Verschleiss sicherstellt. Leider lässt sich dieses Abrollen – da es eine bestimmte Lage der Kugeldrehachse erfordert – nur in gewissen Fällen verwirklichen, und man muss sich daher eingehender mit dem durch internes Gleiten belasteten *mahlenden Abrollen* befassen.

Für eine kleine Drehung könnte man sich auch in Figur 4 ein Abrollen ohne Gleiten vorstellen, nur müsste man zulassen, dass während dieser Drehung eine kleine Verwindung der beiden Achsen g und h zueinander entstünde, so dass sie am Ende nicht mehr in einer Ebene lägen. In einer zweiten Bewegungs-etappe könnte diese Verwindung durch eine gegenseitige Schwenkung der beiden Achsen um die Verbindungsgerade MB_0 (wobei B_0 der Mittelpunkt der Berührungsfläche ist) wieder korrigiert werden. Nach dem Überlagerungsprinzip kann man sich also das mahlende Abrollen als Summe eines idealen Abrollens und einer mahlenden Drehbewegung der Berührungsfläche denken.

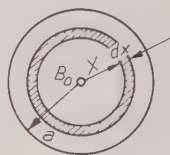
Um die weiteren Überlegungen zu vereinfachen, ist es von Vorteil, für die Rolle eine kugelig bombierte Oberfläche anzunehmen. An den wesentlichen Verhältnissen ändert sich beim Übergang auf zylindrische oder konische Rollen nicht viel, so dass nicht von einer grundsätzlichen Einschränkung gesprochen werden kann. Die Relativbewegung der beiden nunmehr kreisrunden Kontakt-

oberflächen besteht also nach dem bisher Gesagten lediglich in einer Drehbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit ω_M um den Mittelpunkt B_0 (Figur 6) als Momentanzentrum. Da es sich aber um einen vollständig rotationssymmetrischen Fall handelt, findet sich zu jedem elementaren Kreissektor df_1 , der durch seine Reibung eine elementare Tangentialkraft dT_1 in einer bestimmten Richtung liefert, ein symmetrisch gelegener Sektor df_2 , der eine gleich grosse entgegengesetzt gerichtete Kraft dT_2 abgibt, so dass im Endresultat nur ein Moment um MB_0 , aber keine übertragene Umfangskraft sich einstellt. Eine Kraftübertragung beim mahlenden Abrollen ist also nur möglich, wenn eine Unsymmetrie in der Berührungsfläche auftritt, das heisst, wenn das Mahlen



Figur 7

Verschiebung des Mahlzentruns bei Übertragung einer Kraft K .



Figur 8

Zur Berechnung der Druckverteilung verwendete Grössen.

nicht um B_0 , sondern um ein Mahlzentrum B_M (Figur 7) als Momentanzentrum erfolgt, das gegenüber B_0 um einen kleinen Betrag e ausgelenkt ist. B_0 gleitet dann translatorisch mit der Geschwindigkeit $e \omega_M$. Die von der gesamten Fläche übertragene Umfangskraft K ist dann durch Integration aus den elementaren Reibungskräften der Flächenelemente zu ermitteln.

Die Anpresskraft P entsteht durch eine elliptische Verteilung des Druckes p in Funktion des Radius $0 \leq x \leq a$ nach den Beziehungen

$$p = \frac{p_{max}}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (17)$$

und

$$P = 2\pi \int_0^a x p \, dx \quad (18)$$

wie dies leicht aus Figur 8 abgelesen werden kann. Die Integration ergibt

$$P = \frac{2}{3} \pi a^2 p_{max} \quad (19)$$

und somit

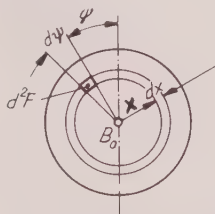
$$p = \frac{3P}{2\pi a^3} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (20)$$

Bei einem Reibungskoeffizienten μ erhält man damit für das in Figur 9 dargestellte Flächenelement

$$d^2 F = d\psi \, x \, dx \quad (21)$$

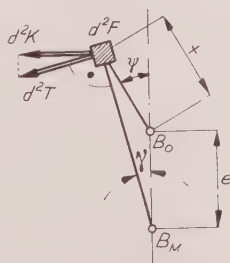
eine Reibungskraft

$$d^2 T = \frac{3 \mu P}{2 \pi a^3} \sqrt{a^2 - x^2} \, x \, dx \, d\psi. \quad (22)$$



Figur 9

Lage des untersuchten Flächenelementes $d^2 F$.



Figur 10

Kräfte am Flächenelement $d^2 F$.

Man führt hier mit Vorteil die dimensionslose Grösse

$$\xi = \frac{x}{a} \quad (23)$$

ein und schreibt

$$d^2 T = \frac{3 \mu P}{2 \pi} \xi \sqrt{1 - \xi^2} \, d\xi \, d\psi. \quad (24)$$

Das Kraftelement $d^2 T$ wirkt in der Bewegungsrichtung, also senkrecht zum Radius $B_M d^2 F$ (Figur 10). Aus Symmetriegründen fallen bei der Integration die zu $B_0 B_M$ parallelen Komponenten aus, so dass nur die dazu senkrechten Komponenten $d^2 K$ von Interesse sind.

Aus der Figur kann man ablesen, dass

$$d^2 K = d^2 T \cos \gamma \quad (25)$$

ist, wobei sich aus den trigonometrischen Verhältnissen unter Einführung der Grösse

$$\varepsilon = \frac{e}{a} \quad (26)$$

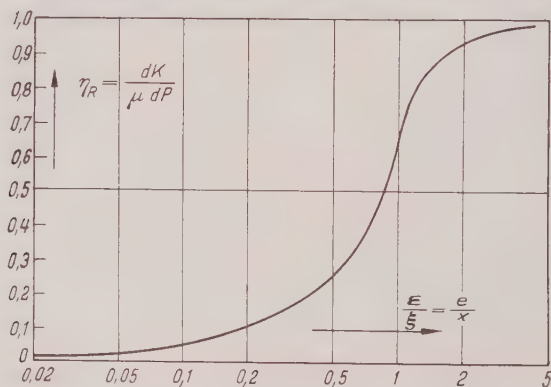
die Beziehung

$$\cos \gamma = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{\xi} \right) \cos \psi}{\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\xi} \right)^2 + 2 \left(\frac{\varepsilon}{\xi} \right) \cos \psi + 1}} \quad (27)$$

ergibt. Der «Reibungsgrad» η_R eines Ringes nach Figur 8 ist nun offenbar durch das Verhältnis

$$\eta_R = \frac{\int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} d^2 K}{\int_{\psi=0}^{\psi=2\pi} d^2 T} = \frac{dK}{dT} = \frac{dK}{\mu dP} = \frac{1}{\pi} \int_{\psi=0}^{\psi=\pi} \cos \gamma d\psi \quad (28)$$

gegeben. Figur 11 zeigt den durch Planimetrieren ermittelten Verlauf von η_R



Figur 11

Reibungsgrad η_R des Ringes dF in Funktion der Auslenkung ϵ des Mahlzentruns.

in Funktion der hier mit Vorteil verwendeten Variablen ϵ, ξ . Damit ergibt sich die übertragene Kraft des Ringes

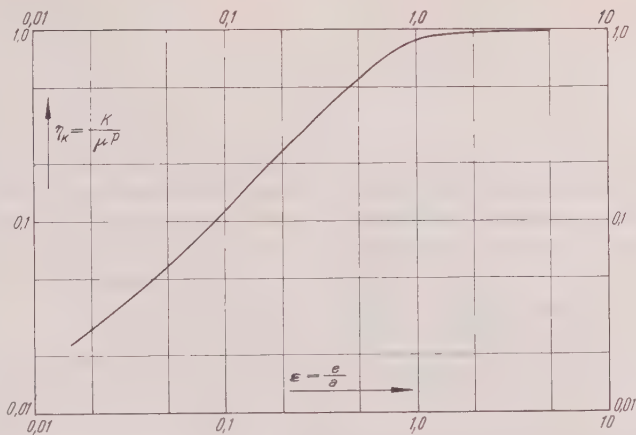
$$dK = 3 \mu P \eta_R \xi \sqrt{1 - \xi^2} d\xi \quad (29)$$

und die Gesamtkraft

$$K = 3 \mu P \int_{\xi=0}^{\xi=1} \eta_R \xi \sqrt{1 - \xi^2} d\xi. \quad (30)$$

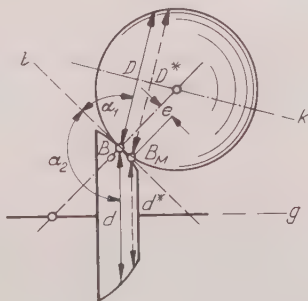
Die hierfür charakteristische Grösse $K (\mu P)$, die man als Reibungsgrad η_K der gesamten Berührungsfläche bezeichnen kann, ist offenbar nur von ϵ abhängig. Diese Beziehung ist in Figur 12 dargestellt.

In der Praxis geht man von den vorbekannten Grössen K, μ, P und a aus, ermittelt η_K , liest den Wert von ϵ in Figur 12 ab und berechnet e nach der Beziehung (26). In Figur 13 sind mit D und d die wirksamen Durchmesser des entsprechenden idealen Getriebes bezeichnet, während D^* und d^* die um e verschobenen effektiv wirksamen Durchmesser sind. Man stellt aus der Abbildung



Figur 12

Reibungsgrad η_k der ganzen Berührungsfläche in Funktion der Auslenkung e des Mahlzentrum.



Figur 13

Zur Berechnung des Schlupfes verwendete Größen.

mittelbar fest, dass

$$D^* = D + e \cos \alpha_1 \quad (31)$$

und

$$d^* = d + e \cos \alpha_2 \quad (32)$$

st. Daraus lässt sich sofort der Schlupf bestimmen, der den Wert

$$s = \frac{D^* d}{D d^*} \cdot 1 \quad (33)$$

hat. Der Schlupf ist für Genauigkeitsgetriebe (vor allem Rechengetriebe) als

Fehlergrösse von hervorragender Bedeutung. Bei Leistungsgetrieben interessiert man sich eher für den Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{d^* D}{d D^*} \quad (2)$$

Es sind nun noch einige Bemerkungen über die Voraussetzungen der da gelegten Theorie erforderlich, um Fehler bei deren Anwendung tunlichst vermeiden. Die angestellten Überlegungen sind richtig für den Fall völlig trockener Reibung und kugelförmig bombierter Rollen. In der Praxis aber wird man es hie und da mit mehr oder weniger öligen bzw. fettigen Oberflächen zu tun haben, sehr oft mit anders geformten Rollen zu tun haben.

Der Einfluss einer schmierenden Oberfläche darf nicht überschätzt werden. Die lokalen Flächenpressungen sind nämlich bei den üblichen Ausführungen meist zu hoch, als dass sich noch ein tragfähiger Schmierfilm erhalten könnte. Nach den Erfahrungen des Verfassers an leicht eingefetteten Kugeln zwischen 50 und 100 mm Durchmesser bei Anpresskräften zwischen 10 und 15 kg und Umfangskräften von etwa 50 g konnten keine nennenswerten Unterschiede gegenüber trockenen Kugeln festgestellt werden. Da es sich dabei um Genauigkeitsgetriebe handelte, wäre ein Schlupf von 0,1% schon als untragbar betrachtet worden.

Ähnlich steht es auch mit den von nicht kreisförmigen Berührungsflächen herrührenden Abweichungen, da diese Flächen meist annähernd die Form einer Ellipse mit nicht sehr stark verschiedenen Achsen aufweisen. Liegt die grosse Achse der Ellipse in der Richtung $B_0 B_M$, so kann man für a die grosse Halbachse einsetzen und wird damit auf der sicheren Seite bleiben. Liegt dagegen die kleine Achse in dieser Richtung, so rechne man mit dem flächengleichen Kreis, der ebenfalls mit Sicherheit ungünstigere Resultate liefert als die Ellipse.

Insgesamt ist festzuhalten, dass diese Berechnungen nicht Arbeitsgrössen sondern kleine Verlustgrössen liefern, bei denen es in erster Linie auf die Festimmung der Grössenordnung und der charakteristischen Einflüsse ankommt. Im Rahmen dieser Zweckbestimmung und abgesehen von ganz extrem liegenden Sonderfällen dürfen die durchgeführten Überlegungen als hinreichend wirklichkeitsgetreu bezeichnet werden. Jedenfalls ergab die Durchrechnung eines praktischen Falles eine durchaus befriedigende Übereinstimmung mit empirisch ermittelten Resultaten.

Anwendungen der Theorie des idealen Kugelgetriebes

Bei der nun folgenden Aufzählung von Anwendungsmöglichkeiten wird der Reihenfolge vorgegangen, die auch im Abschnitt über die Theorie des idealen Kugelgetriebes gewählt wurde, um die zur Festlegung einer eindeutigen Kugeldrehung erforderlichen Rollenkombinationen einzuteilen. Da bei dies-

Anordnung der innere Aufbau und nicht der äussere Zweck des Getriebes entscheidend ist, soll am Schluss ein zusammenfassender Überblick vom Gesichtspunkt des Verwendungszweckes gegeben werden.

Bei allen Überlegungen sollen wiederum lediglich die *Arbeitsrollen* betrachtet werden, die notwendig sind, um die Kugeldrehung eindeutig festzulegen und die Resultate nach aussen weiterzugeben. Die darüber hinaus zum Festhalten der Kugel in ihrer Lage und zur Anpressung der Arbeitsrollen benötigten *Stützrollen* sollen dagegen unberücksichtigt bleiben. Überall, wo solche Rollen erforderlich sind, kann man sie sich leicht hinzudenken, wenn man sich daran erinnert, dass sie einerseits frei laufend, anderseits entweder mit einer der Arbeitsrollen homoplan oder aber als Schlepprollen angeordnet sein müssen.

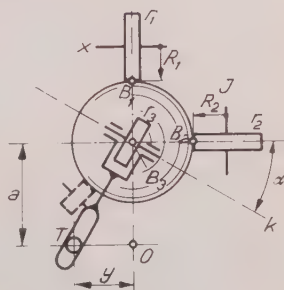
Schliesslich sei noch eine Einschränkung begründet, die eine beträchtliche Kürzung der Zahl der zu untersuchenden Fälle bewirkt: Da der Antrieb schwenkbarer Rollen mit einer von aussen eingegebenen eindeutigen Winkelgeschwindigkeit beträchtliche konstruktive Schwierigkeiten mit sich bringt, wird mit wenigen Ausnahmen auf die Betrachtung angetriebener Steuer- und Schlepprollen verzichtet.

Die Geschichte des echten Kugelgetriebes beginnt (abgesehen vom Kugel-Windkomponentenmesser von H. VENTOSA aus dem Jahre 1881 ¹⁾ mit der Erfindung des *Kugelintegrators* durch HELE SHAW im Jahre 1885 [1]. Es handelt sich dabei um ein Getriebe, bei dem die Drehung der Kugel durch eine angetriebene feste Rolle r_1 und eine frei laufende und um die zur homoplanen Ebene von r_1 senkrechte Achse schwenkbare Steuerrolle r_3 festgelegt wird (siehe Figur 14). Bei der orthogonalen Lage der beiden Berührungspunkte sind die homoplanen Ebenen dieser beiden Rollen stets senkrecht zueinander, und die Kugeldrehachse k liegt nicht nur homoplan, sondern auch parallel zur Drehachse von r_3 . Das Resultat wird durch die frei laufende, zu r_1 homoplane feste Rolle r_2 entnommen, deren Berührungspunkt B_2 zu den Berührungspunkten der beiden anderen Rollen wiederum orthogonal liegt. Durch sinngemässe Anwendung der Gleichung (1) erkennt man, dass die Umfangsgeschwindigkeit V_{B_1} am Berührungspunkt B_1 der Kugel eine Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{V_{B_1}}{R \cos \alpha} \quad (35)$$

und somit dem Berührungspunkt B_2 eine Umfangsgeschwindigkeit

$$V_{B_2} = R \omega \sin \alpha = V_{B_1} \operatorname{tg} \alpha \quad (36)$$



Figur 14

Schema des Kugelintegrators.

aufzwingt. Nimmt man für r_1 und r_2 die Radien R_1 und R_2 an, so wird r_2 bei einer elementaren Drehung dx der Rolle r_1 die Drehung

$$dJ = \frac{R_1}{R_2} \operatorname{tg} \alpha \, dx \quad (37)$$

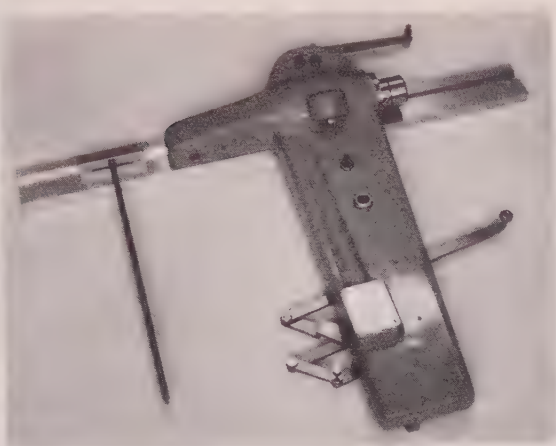
ausführen. Steuert man nun die Steuerrolle r_3 mit Hilfe der in Figur 14 dargestellten sogenannten *Tangentenmechanik*, die das rechtwinklige Dreieck OB_3 mit der veränderlichen Kathete y realisiert, so erhält man nach Integration beider Seiten

$$J = \frac{R_1}{a R_2} \int y \, dx. \quad (38)$$

Man hat also ein *Getriebe*, das zur Ausführung von *Integrationen* geeignet ist, das naturgemäss aber auch als *stufenloses Leistungsgetriebe* Verwendung finden kann. Der Vorteil dieses Getriebes gegenüber anderen stufenlosen Getrieben liegt darin, dass für eine Änderung des Übersetzungsverhältnisses lediglich eine Schwenkung der Steuerrolle erforderlich ist, also eine Bewegung, die mit einem Minimum an Kraftaufwand und ganz unabhängig von der Drehung des Antriebsrolle r_1 ohne Gleiten einer der Rollen auf der Kugel durchführbar ist. Man kann also die Rollen, ohne einen übermässigen Verschleiss bei häufiger oder andauerndem Verstellen des Übersetzungsverhältnisses befürchten zu müssen, kräftig an die Kugel drücken und erhält auch bei schnell schwankenden Integranden ein annähernd schlupffreies Abrollen und damit eine genaue Integration.

Nebenbei sei noch bemerkt, dass durch Antrieb von r_2 und Entnahme des Resultates bei r_1 die gelegentlich benötigte *inverse Integration* von Integralen der allgemeinen Form $\int (1/y) \, dx$ möglich ist (Angaben hierüber sind unter [2] zu finden).

Angesichts der Bedeutung des Kugelintegrators sind hier einige historische Bemerkungen am Platze. Bald nach seiner Erfindung wurde er durch J. und A. AMSLER für die laufende Berechnung der Arbeit von Traktionsfahrzeuge und andere ähnliche Zwecke eingeführt [3], [4], [5], [6]. In der Zwischenzeit entstand der *Harmonische Analysator* von CORADI, an dem ebenfalls das System des Kugelgetriebes angewendet wurde [7], [8]. Als *Leistungs- und Regelgetriebe* wurde der Kugelintegrator vor einigen Jahren durch die Firma *Contraves AG* entwickelt, wobei allerdings aus konstruktiven Gründen von der klassischen orthogonalen Anordnung mit Zylinderrollen bereits abgegangen wurde [9]. In der letzten Zeit wurden durch die Firma *A. J. Amsler & Co.* mehrere neue Varianten für die Verwendung an Rechenmaschinen hoher Präzision geschaffen. Da hier erstmals die Theorie des technischen Kugelgetriebes eine praktische Konsequenz zeitigte, wird von diesen Entwicklungen im nächsten Abschnitt noch die Rede sein. Daneben entstand der *Kugelintegraph*, ein Gerät, das beim Verfolgen einer beliebigen gezeichneten Kurve $f(x)$ mit dem in Figur 15 unter-

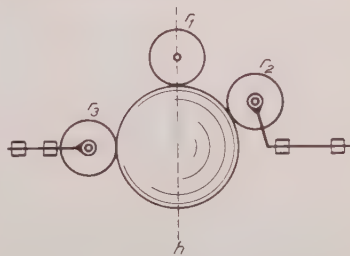


Figur 15

nsler-Kugelintegrator. Unten der Farbstift, der der Originalkurve nachgeführt wird; oben die Registrierfeder, die die Integralkurve aufzeichnet.

echtbarer Fahrstift automatisch die Integralkurve $\int f(x) dx$ registriert [10], [11], [12], [13]. Eine Besonderheit dieses Instrumentes besteht darin, dass die Antriebsrolle fehlt und der Antrieb nach der unabhängig Veränderlichen durch unmittelbares Abrollen der Kugel auf dem Führungslinien erzielt wird.

Die Möglichkeiten des Getriebes, bei dem die Kugeldrehung durch zwei inhomogene Leitrollen – wovon eine angetrieben – festgelegt wird, sind aber mit dem Kugelintegrator durchaus nicht erschöpft. Man kann die Bewegung der Kugel auch im Sinne von Figur 16 mit Hilfe einer Schlepprolle r_2 entnehmen, deren Schwenkachse mit derjenigen der Steuerrolle r_3 identisch ist. Der Antrieb erfolgt wieder durch die feste Rolle r_1 . Wiederum liegt die Kugeldrehachse in der homoplanen Ebene h von r_1 und ist homoplan bzw. parallel zu r_3 . Die Schlepprolle hat nun, wie wir gesehen



Figur 16

Schema der Kugel-Nachlaufsteuerung, des Schwingungsfilters und des Schlepprollendifferentiators.

haben, das Bestreben, sich zur Kugeldrehachse homoplan einzustellen. Sie folgt also allen Schwenkungen der Steuerrolle nach. Da die Steuerrolle mit einem minimalen Drehmoment geschwenkt werden kann, an der Schwenkachse der Schlepprolle hingegen schon recht beträchtliche Drehmomente entnommen

werden können, verfügt man hier über eine mechanische *Nachlaufsteuerung* v. kaum zu übertreffender Einfachheit und Zuverlässigkeit. Besonders angenehm für die Eigenschaften dieser Nachlaufsteuerung ist die Tatsache, dass die f. das Einschleppen der Schlepprolle massgebende Differentialgleichung (12) n. ersten Grades ist, so dass eine Neigung zum Pendeln völlig ausgeschlossen i. Versuche des Verfassers haben denn auch ergeben, dass die Schlepprolle bei g. eigneter Konstruktion und Wahl der Antriebsdrehzahl selbst den unregelmäss. sten ruckweisen Schwenkungen verblüffend getreu folgt und nachher augenblicklich zum Stillstand kommt, wobei eine Drehmomentverstärkung von etw. einer Zehnerpotenz in einer Stufe ohne Schwierigkeiten erreicht und bei Verw. dung mehrerer zueinander homoplaner Schlepprollen auf gemeinsamer Schwenk. achse auch überschritten werden kann.

In der oben beschriebenen einfachsten Form mit angetriebener fester Ro. eignet sich diese Nachlaufsteuerung naturgemäss nur für Schwenkungen i. einem Bereich von etwa 120° , da darüber hinaus die Winkelgeschwindigkeit der Kugeldrehung rapid zunimmt. Eine *Nachlaufsteuerung für mehrere vo. Umdrehungen* ist durch Antrieb der Steuerrolle, eventuell auch der Schlepp. rolle, denkbar, wobei allerdings auf eine möglichst reaktionsmomentfreie A. ordnung der Antriebsorgane zu achten ist. Dies ist aber eine konstruktiv. Frage, die nicht in den Rahmen der vorliegenden Arbeit gehört. Im übrigen g. gelten hier die eingangs erwähnten Schwierigkeiten bezüglich angetrieben. schwenkbarer Rollen nur teilweise, da im gegebenen Fall wenigstens die gena. Einhaltung der Winkelgeschwindigkeit der angetriebenen Rolle unwesentlich is.

Das soeben beschriebene Getriebe kann aber noch für zwei weitere Zweck. verwendet werden. Wir haben gesehen, dass die Schlepprolle in ihrer Schwenk. ung stets um einen gewissen Betrag hinter der Kugeldrehachse und somit auch hinter der hierzu homoplanen Steuerrolle zurückbleibt. Führt nun d. Steuerrolle statt der in Gleichung (15) berücksichtigten Drehschwenkung m. konstanter Winkelgeschwindigkeit eine oszillierende Schwenkung

$$\alpha_3 = A_3 \sin(\varepsilon t) \quad (3)$$

aus, so wird der Schwenkwinkel α_2 der Schlepprolle bei sinngemässer Anwen. dung der Gleichung (12) durch die Differentialgleichung

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = -\omega_1 \operatorname{ctg} \varphi \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \quad (4)$$

bestimmt, die für $t \rightarrow \infty$, also nach dem Einschleppen aus einer beliebige. Anfangsstellung, und für kleine Werte von $(\alpha_2 - \alpha_3)$ und somit A_3 mit de. Lösungsansatz

$$\alpha_2 \cong A_2 \sin(\varepsilon t + \tau) \quad (4)$$

Amplitude

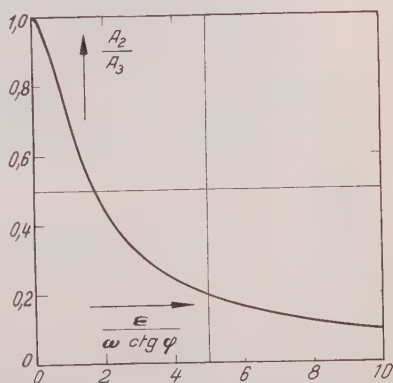
$$A_2 \sim A_3 \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega_1^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}}} \quad (42)$$

und die Phasenkonstante

$$\tau \cong \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega_1^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}}} \quad (43)$$

folgt. Aus der Beziehung (42) ersieht man unmittelbar die Eignung des Getriebes als *Schwingungs-Tiefpass-Filter*. In Figur 17 ist das Amplitudenverhältnis A_2/A_3 in Funktion der entscheidenden Grösse, nämlich des Verhältnisses $(\omega_1 \operatorname{ctg} \varphi)$, dargestellt. Durch geeignete Wahl der Winkelgeschwindigkeit ω_1 und des Schleppwinkels φ kann der Übergang von wiedergegebenen zu unterdrückten Schwingungen an jede beliebige Stelle des in Betracht kommenden Frequenzbereiches verlegt werden. Wie man sich auf Grund einfacher Superpositionsüberlegungen leicht überzeugen kann, erfolgt die Filtrierung stets derart, dass der Mittelwert des Resultates mit dem Mittelwert der filtrierten Schwingung identisch ist. Überall dort, wo man aus irgendwelchen Gründen benötigt ist, Messungen auszuwerten, die durch überlagerte hochfrequente parasitäre Schwingungen unübersichtlich geworden sind, bietet sich also hier ein Mittel, die interessierende niederfrequente Hauptgrösse weitgehend unverfälscht von diesen Überlagerungen zu trennen. Dass sich damit gewisse Möglichkeiten der mechanischen *Schwingungsanalyse* ergeben, sei zunächst nur am Rande vermerkt. Desgleichen sei erwähnt, dass die Einschränkung der Gültigkeit der abgeleiteten Beziehungen, die aus der Gleichsetzung des Sinus mit dem Winkel in Gleichung (40) resultiert, bei geeigneter Konstruktion kein ernstliches Hindernis für die einwandfreie Filtrierung darstellt.

Die letzte Anwendungsmöglichkeit dieses vielseitigen Getriebes ist aus Gleichung (15) direkt zu entnehmen: Da der Term $\operatorname{tg} \varphi$ konstant ist, ist der Differenzwinkel β zwischen den Stellungen der Steuer- und der Schlepprolle ein Mass für das Verhältnis der beiden Winkelgeschwindigkeiten Ω_0 und ω_x oder, mit andern Worten, für den Differentialquotienten des Schwenkwinkels der

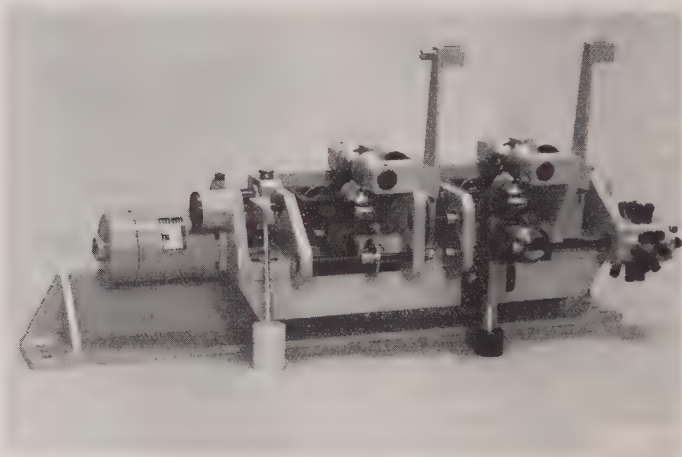


Figur 17

Charakteristik des Kugel Schwingungsfilters.

Steuerrolle nach dem Drehwinkel der Kugel (bzw., bei kleinen Schwenkwinkel oder bei angetriebener Steuerrolle: nach dem Drehwinkel der angetriebenen Rolle). Man besitzt damit bereits eine erste Form eines *Derivationsgetriebes*, oder sogenannten *Schlepprollendifferentiators*.

Figur 18 zeigt eine interessante Anwendung des beschriebenen Getriebes für einen Amsler-Oberbaumesswagen. Es handelte sich darum, die von ein



Figur 18

Aus Nachlaufsteuerung und Schlepprollendifferentiators kombinierte Einheit für die Überhöhung und Verwindungsmessung eines Amsler-Oberbaumesswagens.

künstlichen Kreiselhorizont gemessene Überhöhung der untersuchten Gleisstrecke (das heisst den Höhenunterschied zwischen der bogenäusseren und der bogeninneren Schiene) zu registrieren und daraus die Verwindung (das heisst die Ableitung der Überhöhung nach der Strecke) zu berechnen. Da der verwendete Kreisel nur sehr bescheidene Drehmomente ohne Störung seiner Gleichgewichtslage abgibt, wird die Überhöhung (die durch die vertikale Stange vorne links in den Apparat eingeführt wird) in einer ersten Getriebestufe (Kugel links) verstärkt. Die zweite Stufe (Kugel rechts) dient zur Bildung des Differentialquotienten. Die Resultatgrössen werden an den beiden vertikalen Hebeln abgegriffen. Beide Stufen werden durch den synchron ferngesteuerten Motor links aussen proportional zu der vom Wagen zurückgelegten Strecke angetrieben und gleichen sich in ihrem Aufbau vollständig; nur erfolgt der Antrieb der ersten Stufe mit einer hohen, derjenige der zweiten mit einer niedrigen Übersetzung, so dass diese als Derivationsgetriebe, jene aber als Nachlaufsteuerung arbeitet. Das hier angewandte System bewährte sich einwandfrei un

wies sich eindeutig als Fortschritt gegenüber älteren Mitteln zur Erzielung desselben Resultates.

Fixiert man die Kugeldrehung durch zwei zueinander homoplane, angetriebene feste Rollen, so liegt es nahe, zu untersuchen, wie sich eine dritte feste Rolle verhält, die naturgemäss frei laufend und zu den beiden anderen homoplan angeordnet sein muss. Mit den in Figur 19 angegebenen Bezeichnungen erhält man, ausgehend von einer Winkelgeschwindigkeit ω der Kugel um die Achse k , und unter Berücksichtigung der Beziehung (1) für die Umfangsgeschwindigkeiten der Berührungspunkte B_i die Werte

$$V_{B_1} = R \omega \sin \alpha, \quad (44)$$

$$V_{B_2} = R \omega \sin(\alpha + \beta), \quad (45)$$

$$V_{B_3} = R \omega \sin(\alpha + \gamma). \quad (46)$$

Nimmt man nun an, V_{B_2} und V_{B_3} seien durch Antrieb der Rollen r_2 und r_3 gegeben, so ergibt sich die Umfangsgeschwindigkeit im Berührungspunkt der frei laufenden Rolle durch Eliminieren von α , R und ω zu

$$V_{B_1} = \frac{V_{B_2} \sin \gamma - V_{B_3} \sin \beta}{\sin(\gamma - \beta)}. \quad (47)$$

Man verfügt somit über ein *Summationsgetriebe*, bei dem man sich durch geeignete Wahl der Winkel β und γ in weiten Grenzen den gegebenen Maßstäben der Summanden V_{B_2} und V_{B_3} sowie dem gewünschten Maßstab des Resultates V_{B_1} anpassen kann. Besonders wichtig sind hier natürlich die beiden symmetrischen Fälle, die durch $\gamma = \beta$ und $\gamma = 2\beta$ gekennzeichnet sind und

$$V_{B_1} = \frac{V_{B_2} + V_{B_3}}{2 \cos \beta} \quad (48)$$

beziehungsweise

$$V_{B_1} = V_{B_2} 2 \cos \beta - V_{B_3} \quad (49)$$

liefern. Für den Sonderfall von drei um je 120° auseinanderliegenden Berührungspunkten gilt offenbar

$$V_{B_1} = -(V_{B_2} + V_{B_3}). \quad (50)$$

Die zweite wesentliche Frage bei Festlegung der Kugeldrehung durch zwei homoplane angetriebene feste Rollen ist die nach dem Verhalten einer Schlepprolle in einem solchen Fall. Und zwar interessiert vor allem die orthogonale Anordnung, bei der die beiden Berührungspunkte B_1 und B_2 auf der Kugel einen rechten Winkel einschliessen und die Schwenkachse der Schlepprolle senkrecht zur homoplanen Ebene der beiden angetriebenen Rollen steht (siehe

Figur 20). Aus (1) ergibt sich für diesen Fall

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{V_{B_2}}{V_{B_1}};$$

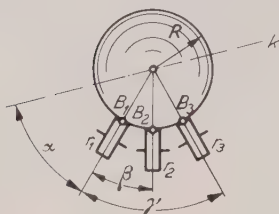
somit liest man bei konstanten Umfangsgeschwindigkeiten der Berührungspunkte nach dem Einschleppen an der in Figur 20 angedeuteten Tangente mechanisch den Ausschlag

$$y = a \operatorname{tg} \alpha = a \frac{V_{B_2}}{V_{B_1}}$$

ab. Führt man die elementaren Drehwinkel dx_1 und dx_2 und die Radien R_1 und R_2 für die beiden angetriebenen Rollen ein, so erhält man

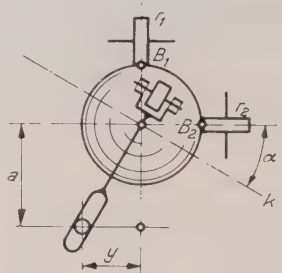
$$y = a \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{dx_2}{dx_1}.$$

Damit hat man ein zweites *Derivationsgetriebe*, den *Kugeldifferentiator*, der die Jahrhundertwende von A. und J. AMSLER als Komplement zum Kugelsummationsgetriebe erfunden wurde und in stetig weiterentwickelter Form bis heute Standardausrüstung der Amslerschen Dynamometerwagen gehört [3], [4], [15]. Eine moderne Ausführung, wie sie für Triebwagen- und Traktorenstände Verwendung findet, ist in Figur 21 dargestellt [10], [11], [12].



Figur 19

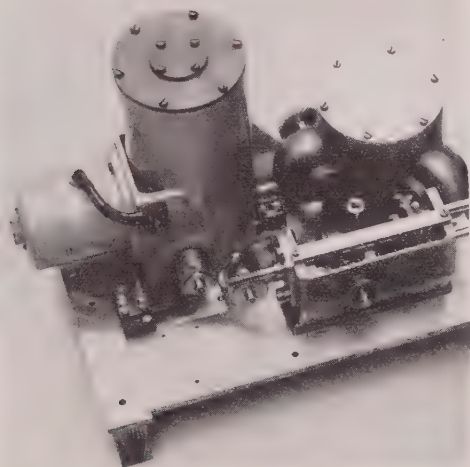
Schema des Kugelsummationsgetriebes.



Figur 20

Schema des Kugeldifferentiators.

Es ist eine reizvolle Aufgabe, die Eigenschaften dieses Kugeldifferentiators mit denen des weiter oben beschriebenen Schlepprollendifferentiators zu vergleichen (diese beiden Bezeichnungen haben sich, obwohl sie gewiss nicht besonders treffend sind, eingebürgert und mögen daher beibehalten werden). Der Kugeldifferentiator ist überall dort im Vorteil, wo die beiden Eingangsgrößen in etwa gleichwertiger Form durch eine Vielzahl von Wellendrehungen dargestellt werden können, da beim Schlepprollendifferentiators in diesem Fall der Antrieb der Steuer- oder der Schlepprolle erforderlich wäre. Ausserdem



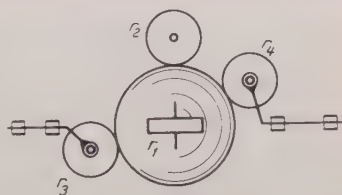
Figur 21

Kugeldifferentiator als Geschwindigkeitsmesser für einen Ansler-Traktorenprüfstand. Rechts hinten der Differentiator, vorne Schaltgetriebe zur Wahl verschiedener Messbereiche, links Motor und Fliehkraftregler zur Lieferung einer konstanten Drehzahl.

er zur Ermittlung des Resultates stets zunächst eine Winkeldifferenz abgelesen werden, während beim Kugeldifferentiator die einfache Tangentenmechanik genügt. Dagegen hat der Schlepprollendifferentiators den Vorteil, dass die abzuleitende Grösse nur als Steuerrollenschwenkung, also mit einem Minimum an Drehmoment eingeführt wird, was bei direkter Auswertung an Messgeräten häufig von Bedeutung ist. So wäre die in Figur 18 dargestellte einfache Nachsteuerung beispielsweise nicht in der Lage, einen Kugeldifferentiator anzutreiben.

Aus einer Kombination dieser beiden Derivationsgetriebe im Sinne von Figur 22 ist es übrigens auch möglich, ein *Getriebe zur Bestimmung der ersten und zweiten Ableitung* der einen Eingangsgrösse nach der anderen zu konstruieren. Auf die mathematischen Zusammenhänge braucht hier

nur noch nicht im einzelnen eingegangen zu werden. Es sei nur angedeutet, dass die Eingangsgrößen x_1 und x_2 als Drehungen der festen Rollen r_1 und r_2 ankommen, so dass die erste Ableitung dx_1, dx_2 aus dem Schwenkwinkel der



Figur 22

Schema des Differentiators zur Bestimmung der ersten und zweiten Ableitung

beiden Schlepprollen r_3 und r_4 ermittelt werden kann. Da aber die Schwenkwinkel dieser beiden Schlepprollen verschieden gross sind, folgen sie verschiedenen Schwenkungen der Kugeldrehachse, die durch Änderungen des Verhältnisses zwischen den Winkelgeschwindigkeiten der beiden festen Rollen bedingt werden. Der Winkel zwischen den Richtungen der beiden Schlepprollen gibt also – natürlich unter Berücksichtigung der mitspielenden Verrückungen – ein Mass für die zweite Ableitung d^2x_1/dx_2^2 . Diese Möglichkeit wurde bisher erst einmal an einem echten Kugelgetriebe ausgenützt, und handelte es sich um ein Gerät für gewisse militärische Zwecke, das wieder von der Firma *A. J. Amsler & Co.* verwirklicht wurde.

Wir sind damit am Ende unserer Aufzählung angelangt und können nun einen zusammenfassenden Überblick nach dem Gesichtspunkt des Verwendungszweckes zuwenden. Bisher liegen folgende Anwendungen vor:

Rechengetriebe: Additionsgetriebe, Integrationsgetriebe, Inverse Integrationsgetriebe, Derivationsgetriebe für die erste Ableitung, Derivationsgetriebe für die zweite Ableitung;

SchwingungsfILTER;

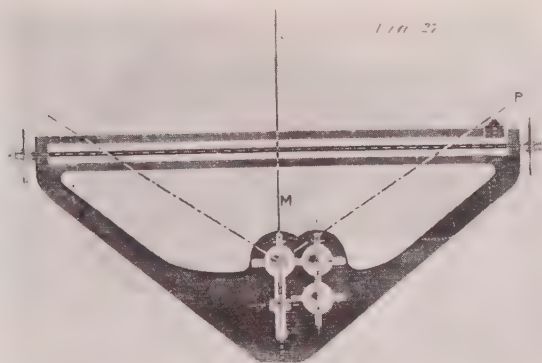
Nachlaufsteuerungen;

Stufenlos regelbare Leistungsgetriebe.

Wie man sieht, liegt das Schwergewicht schon zahlenmässig bei den Rechengetrieben, die durch Kombination mehrerer Einheiten zu mehrstufigen Getrieben bzw. zu Rechenanlagen einen sehr weiten Aufgabenkreis zu bewältigen in der Lage sind. Eine vollständige Aufzählung der damit verbundenen Möglichkeiten würde weit über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinausführen. Die Anzahl von Anwendungen für Integratoren und Differentiatoren ist in der Literatur zu finden [3] bis [6], [10] bis [13], [15] bis [19]. Es sei hier nur einige interessante Spezialfälle hingewiesen, die als Anregung zum Auffinden ähnlich gelagerter Fälle dienen und das Gesamtbild in gewisser Hinsicht abrunden dürften.

Schon HELE SHAW wies in seiner klassischen Schrift über den Kugelintegrator auf die Möglichkeit hin, durch Serienschaltung von n Integratoren die Drehmomente der Form $\int y^n dx$ zu berechnen [1]. Sein Originalentwurf ist in Figur 23 wiedergegeben. Er ist dadurch interessant, dass er die spezifische Eigenschaft des Kugelintegrators, nämlich die Fähigkeit zur Übertragung bedingter Drehmomente ohne nennenswerten Schlupf, ausnützt, indem das Integral auf jeder Stufe als unabhängig Veränderliche – also als Antrieb – in die nächste Stufe eingeht. Im übrigen bedarf die Darstellung des auch heute noch mehr wirkenden Gerätes wohl keiner besonderen Erklärung. Durch Trennung der Steuerungen der einzelnen Steuerrollen ist der Übergang zu allgemeinen *Stieltjes-Integralen* der Form $\int f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x) dx$ möglich.

Die Lücke, die durch die Abwesenheit eines *Multipliziergetriebes* unter den einstufigen Getrieben klafft, ist damit wenigstens für die Integrale von



Figur 23

Integrator zur Messung von Flächen F , statischen Momenten M und Trägheitsmomenten J (nach der Originaldarstellung von HELE SHAW aus dem Jahre 1885).

$$F = \int y \, dx; \quad M = 1/2 \int y^2 \, dx = 1/2 \int y \, dF; \quad J = 1/3 \int y^3 \, dx = 2/3 \int y \, dM.$$

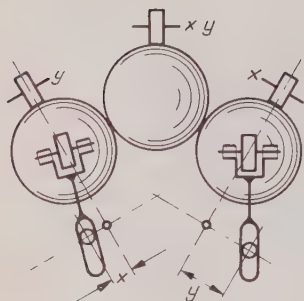
unkten geschlossen. Gewiss kann der Kugelintegrator durch sukzessives Ein-
eben der Faktoren (zuerst Einstellung der Steuerrolle, dann Drehen der An-
triebsrolle) für Multiplikationen verwendet werden; bei Analogierechengeräten
interessiert aber vor allem die Möglichkeit einer Simultanmultiplikation zweier
variabler Größen. Dieses Ziel kann aber ohne Schwierigkeiten durch kombi-
nierte Getriebe erreicht werden. Figur 24 zeigt ein Gerät, das aus zwei Integra-
toren und einem Summationsgetriebe besteht und die Multiplikation nach dem
Prinzip der partiellen Integration, also nach der Beziehung

$$x y = \int x \, dy + \int y \, dx \quad (54)$$

durchführt. Dagegen setzt sich das Getriebe in Figur 25 aus zwei Integratoren
und einem Differentiator zusammen und arbeitet nach der Formel

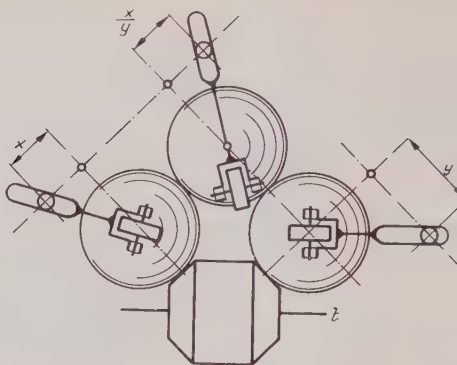
$$\frac{x}{y} = \frac{d(\int x \, dt)}{d(\int y \, dt)}. \quad (55)$$

Der Übergang von der Multiplikation zur Division und umgekehrt kann stets
einschwer dadurch bewirkt werden, dass man einen der Integratoren invers ar-
beiten lässt. Das erste der beiden soeben beschriebenen Multiplikationsgetriebe
liefert das Produkt als Umdrehungszahl einer Welle, was häufig einen Vorteil
darstellt; dafür müssen aber auch die Faktoren als Drehungen von Wellen
einkommen. Für lang dauernde Rechnungen mit stark schwankenden Faktoren
ist das zweite Getriebe im Vorteil, da Fehler in der Justierung der Integratoren



Figur 24

Kugelmultiplikator nach dem Prinzip der partiellen Integration.



Figur 25

Kugelmultiplikator nach dem Prinzip der Differentiation zweier Integrale.

hier nicht zum sogenannten «Ablaufen», also zu dauernden, mit der Zeit stet zunehmenden Fehlern des Resultates führen können.

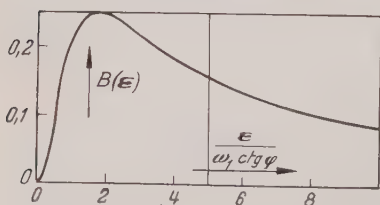
Die Möglichkeit der Verwendung eines Kugel-Schwingungsfilters zur Frequenzanalyse beruht auf der Tatsache, dass die aus Gleichung (42) unschwer zu ermittelnde Funktion

$$B(\varepsilon) = \frac{A_2}{A_3} \left(1 - \frac{A_2}{A_3} \right) \cong \frac{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega_1^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}} - 1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega_1^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}} \quad (56)$$

den in Figur 26 wiedergegebenen Verlauf mit einer «Resonanzfrequenz» be-

$$\varepsilon_r = \omega_1 \operatorname{ctg} \varphi \sqrt{3} \quad (57)$$

aufweist. Auf Einzelheiten einer auf dieser Basis beruhenden Frequenzanalyse kann hier nicht eingegangen werden. Es sei nur erwähnt, dass ein gegebene



Figur 26

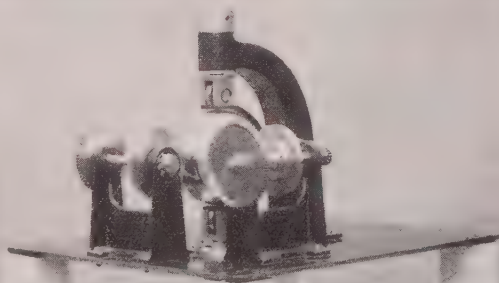
Charakteristik des Kugel-Schwingungsfilters, transformiert für Verwendung als Frequenzanalysator.

Frequenzspektrum durch Variation von ω_1 oder φ abgetastet werden kann und dass sich angesichts des Verlaufes von $B(\varepsilon)$ (die Glockenkurve von Figur 26 wird annähernd symmetrisch, wenn man einen logarithmischen Abszissenmaßstab wählt!) eine Abstufung der Resonanzfrequenzen nach einer geometrischen (und nicht, wie bei der harmonischen Analyse, nach einer arithmetischen Reihe empfiehlt.

Über *Nachlaufsteuerungen* und *Leistungsgetriebe* braucht an dieser Stelle nichts weiter gesagt zu werden. Es sei höchstens erwähnt, dass beide Getriebearten nicht nur als unabhängige Elemente, sondern vor allem auch in Verbindung mit Rechengetrieben verwendet werden können, wobei insbesondere das weite Gebiet der *Regeltechnik* eine Reihe noch unausgeschöpfter Möglichkeiten bieten dürfte.

Anwendungsbeispiel für die Theorie des technischen Kugelgetriebes

Die Grundkonzeption des *klassischen Kugelintegrators* (siehe Figuren 14 und 27) bewährte sich so ausgezeichnet, dass sich die Entwicklung während eines guten halben Jahrhunderts auf Verbesserung konstruktiver Einzelheiten beschränken konnte. Einige kleine Nachteile waren zwar bekannt, wurden aber in Kauf genommen. Dies geschah vorab, weil man sich damals über den Einfluss tiefgreifender konstruktiver Änderungen nur durch grossangelegte Versuche Rechenschaft hätte ablegen können, was auf einem verhältnismässig

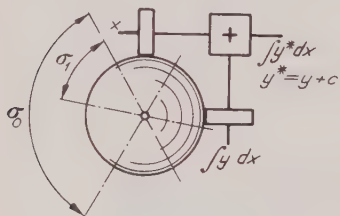


Figur 27

Kugelintegrator in klassischer Ausführung.

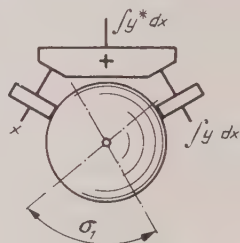
kleinen Spezialgebiet finanziell nicht zu verantworten gewesen wäre. Erst die Theorie des technischen Kugelgetriebes bot dem Konstrukteur ein Mittel, womit er sich auf rechnerischem Wege einen Überblick über die Eigenschaften verschiedener Anordnungen verschaffen konnte. Ohne dieses Hilfsmittel wäre die unten gezeigte Konstruktion nicht entstanden. Auf diese Tatsache muss angesichts des Umstandes, dass die durchgeführten Berechnungen wegen ihres Umfanges hier nicht wiedergegeben werden können, mit besonderem Nachdruck hingewiesen werden.

Ein erster Nachteil der klassischen Anordnung liegt darin begründet, daß die Kugeldrehachse für $\alpha = 0$ bzw. $y = 0$ in Gleichung (38) durch den Berührungspunkt der Abtriebsrolle geht. Man erhält damit eine rein mahlende Berührung zwischen der laufenden Kugel und der stillstehenden Rolle, was zu einer stark erhöhten Verschleiss der Oberflächen und gleichzeitig zu schlechter Genauigkeit führt. Diesen Nachteil kann man dadurch beseitigen, dass man im Sinne von Figur 28 ein Differentialgetriebe zwischen die Antriebs- und Abtriebsrolle schaltet und den Nullpunkt des Integranden um einen konstanten Betrag c korrigiert. Will man jeden Durchgang des Kugeldrehachse durch



Figur 28

Erster Schritt: Ausschaltung der Verschleißstelle im Nullpunkt.



Figur 29

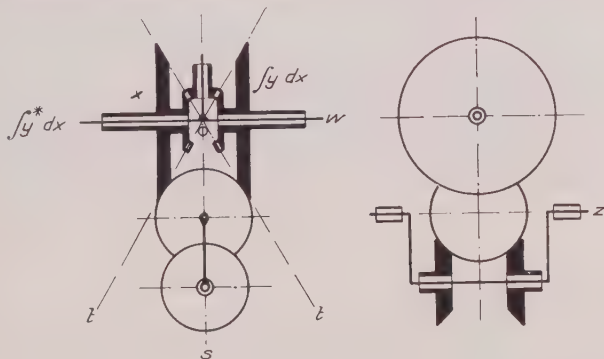
Zweiter Schritt: Vergrößerung des nutzbaren Schwenkwinkels.

Berührungspunkt der Abtriebsrolle vermeiden, so ist man allerdings gezwungen, mehr als die Hälfte des ursprünglich verfügbaren Schwenkwinkels σ_0 der Kugeldrehachse zu opfern. Die Abnutzung wird zwar verringert, die Genauigkeit aber verschlechtert. Glücklicherweise ist es jedoch möglich, durch Vergrößerung des Winkels zwischen den Berührungspunkten der beiden Rollen den verfügbaren Schwenkwinkel σ_1 wieder wesentlich zu vergrößern, wie dies Figur 29 zeigt. Dabei treten allerdings etwas kompliziertere trigonometrische Verhältnisse auf als im orthogonalen Fall, der den Beziehungen (36) bis (38) zugrunde liegt. Man kann sich aber leicht davon überzeugen, dass man auch hier mit einer einfachen Tangentenmechanik auskommt. (Diese Tatsache wurde schon verschiedentlich bei Derivationsgetrieben ausgenützt, wenn es sich um die Differentiation von Größen mit konstantem Vorzeichen handelte. Die resultierende unsymmetrische Tangentenmechanik ergab einen stark vergrößerten Schwenkwinkel auf der benutzten Seite.) Nun lag es nahe, die beiden Rollen in der von Figur 3 h) bekannten Weise ideal homoplan anzuordnen, womit sich die Konstruktion nach Figur 30 ergibt. Man kann aber noch einen Schritt weitergehen, indem man die beiden Rollen so gestaltet, dass die beiden Berührungs-Tangentialebenen t einen gemeinsamen Schnittpunkt O mit der Rollendrehachse W besitzen und gleichzeitig durch symmetrischen Aufbau des Differentialgetriebes dafür sorgt, dass die Kugeldrehachse bei $y = 0$ in die Symmetrieebene S des Systems

lt. Damit erreicht man gerade für den genauigkeitsmässig heiklen Nullpunkt in Sonderfall des idealen Abrollens, wie er in Figur 5 dargestellt worden ist. Während bei der klassischen Anordnung der durch die folgende Beziehung zwischen dem effektiven Übersetzungsverhältnis u_e und dem Soll-Übersetzungsverhältnis u_s definierte relative Fehler

$$\Delta u = \frac{u_e - u_s}{u_s} \quad (58)$$

Nullpunkt stets unendlich gross wird, besteht bei der neuen Bauart eine Chance, dass dieser Fehler endlich bleibt, da gerade im Nullpunkt das praktisch



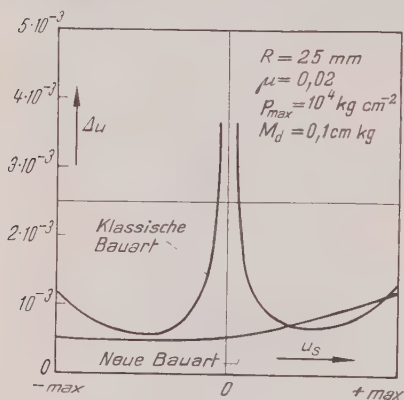
Figur 30

Dritter Schritt: Einsatz coaxialer, möglichst ideal abrollender Rollenpaare.

völlig schlupffreie ideale Abrollen gegeben ist. Figur 31 zeigt den Verlauf der unter Berücksichtigung aller Lagerreibungen sowie des Einflusses der Steuerrollen berechneten Fehler Δu für beide Bauarten in Funktion des Übersetzungsverhältnisses u_s unter Annahme geometrisch absolut genauer Anordnung aller Teile, einer bestimmten in der Praxis vorkommenden Belastung, gleicher Kugelgrösse und gleicher Materialien.

In Tat und Wahrheit schneidet der neue Integrator, der wegen einer besonderen, hier nicht interessierenden Einsatzmöglichkeit im Rahmen der *Amsler-Integrieranlage* als «*Nebenschlussintegrator*» bezeichnet wird [18], [19], noch etwas besser ab, und zwar aus folgendem Grund: Die in Figur 14 gezeigten Rollen genügen offenbar nicht, um den Kugelmittelpunkt in seiner Lage festzuhalten. Zu diesem Zweck werden meist mindestens zwei weitere Rollen verwendet, die beide unter Federkraft stehen und so für die Anpressung der Kugel gegen die Arbeitsrollen sorgen. Die eine dieser Stützrollen ist homoplan mit r_1 und r_2 (in Figur 14 gestrichelt eingezeichnet). Die zweite liegt der Steuerrolle r_3 polar gegenüber und wird mit dieser zusammen so geschwenkt, dass die beiden

Drehachsen stets homoplan (in diesem Fall also parallel) zueinander sind; hat also zwei Steuerrollen. Wie schon erwähnt wurde, ist die Bewegung der Kugel überbestimmt und die Genauigkeit gestört, sobald Rollen, die homoplan sein sollten, in Wirklichkeit inhomoplan sind. Bei der Fabrikation des klassischen Kugelintegrators hängt also sehr viel davon ab, mit welcher Genauigkeit das Rolltripel am Äquator der Kugel bzw. das Steuerrollenpaar in je eine horizontale Ebene gebracht werden kann. Beim Nebenschlussintegrator wurden auch die Steuerrollen coaxial an einem kurbelartigen Gebilde angeordnet,



Figur 31

Schlupfcharakteristiken des klassischen und des neuen Integrators.

nen Ebene der Steuerrollen liegt, fällt ihre Wirkungslinie mit der Kugeldrehachse zusammen. Also erhält man von den beiden festen Rollen stets diejenige größere Kraftanteil, auf der die Kugel mit dem kleineren wirksamen Radius abrollt und somit auch unter ungünstigeren Mahlverhältnissen abrollt. Dadurch wird der Schlupf auch ausserhalb des Nullpunktes wesentlich reduziert.

Insgesamt hat man also durch konsequente Anwendung der Theorie des technischen Kugelgetriebes folgende Vorteile erzielt:

Reduktion der Rollenzahl auf vier.

Zusammenfassung je zweier Rollen zu einem fast ideal homoplanen Paar dadurch weitgehende Unabhängigkeit von Fabrikationsungenauigkeiten.

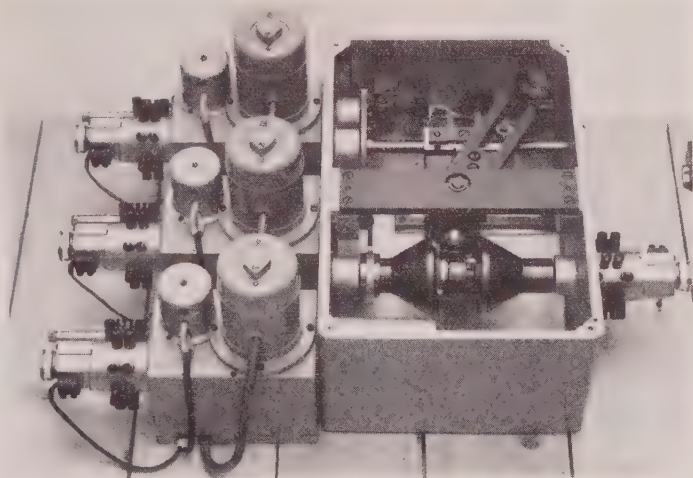
Minimale Abweichung aller Rollen vom idealen Abrollen; dadurch kleiner Leistungsbedarf und Verschleiss; zwei Rollen rollen stets ideal ab.

Völlige Ausschaltung des reinen Mahlens im gesamten Arbeitsbereich.

Ideales Abrollen aller vier Rollen im Nullpunkt.

Automatische Regelung der Anpressung im Sinne eines minimalen Schlupfes.

um die durch den Kugelmittelpunkt gehende Achse z geschwenkt werden. Selbstverständlich ist hier – wo es die Möglichkeit dazu gegeben ist – darauf gesorgt, dass die Steuerrollen ideal auf der Kugel abrollen. Von den vier vorhandenen Rollen (die übrigens das absolute Minimum zum einwirkenden Festhalten des Kugelmittelpunktes in seiner Lage darstellen) braucht nur eine einzige unter Federdruck zu stehen, um dem ganzen System die nötigen Anpresskräfte zu erteilen. Im vorliegenden Fall geschieht dies an einer der Steuerrollen, wodurch ein weiterer Vorteil erzielt wird: Da die resultierende Anpresskraft offenbar stets in der homop-



Figur 32

Nebenschlussintegrator der Amsler-Integrieranlage. Die Kugel mit den konischen Rollen sowie die unsymmetrische Tangentenmechanik sind gut sichtbar.

Die praktische Erprobung der ersten ausgeführten Nebenschlussintegratoren bestätigte die angestellten Überlegungen in vollem Umfang. Trotz des kleineren verfügbaren Schwenkwinkels und ohne besondere fabrikatorische Sorgfalt wurde in den normalen Arbeitsbereichen die Genauigkeit der besten klassischen Integratoren unschwer erreicht und in der Nähe des Nullpunktes wesentlich überboten. Die Verschleissfestigkeit übertraf alle Erwartungen: selbst stundenlange Probeläufe bei stark übersetzten Belastungen und Drehzahlen konnten ohne die geringsten Abnutzungsspuren durchgeführt werden.

Einer dieser Integratoren ist in Figur 32 dargestellt.

Abschliessende Bemerkungen

Die vorliegende Arbeit erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Sowohl theoretischer wie in praktischer Hinsicht könnte noch manches Interessante gesagt werden. Es ging dem Verfasser aber auch gar nicht darum, eine lückenhafte Aufzählung aller Formeln und aller Anwendungsmöglichkeiten zu liefern. Vielmehr war er bemüht, den Leser auf ein Gebiet hinzuweisen, das bisher fast ausschließlich am Rande der technischen Entwicklung gestanden hat und das bei konsequenter Ausnützung der zur Verfügung stehenden Erkenntnisse eine Reihe eleganter Anwendungsmöglichkeiten bietet.

Sollte es gelungen sein, mit dieser Abhandlung neues Interesse für das behandelte Gebiet zu wecken, so ist der Zweck der Arbeit erfüllt.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. SHAW, *The Theory of Continuous Calculating Machines*, Phil. trans. Roy. Soc., Part. II, 1885, 367–402.
- [2] V. BUSH und S. H. CALDWELL, *A New Type of Differential Analyzer*, Franklin Inst. 240, Nr. 4, 255–326 (1945).
- [3] D. DUBOIS, *Die Schöpfungen Jakob und Alfred Amslers*, Mitt. Naturf. Ges. Schaffhausen, 19, Nr. 5, 209–273 (1944).
- [4] H. A. GAUDY, *Vierachsiger Dynamometerwagen der SBB.*, Schweiz. Bauztg. 64, Nr. 5 (1914).
- [5] G. BOHL, *Appareil de la S. N. C. F. pour le tracé des horaires des trains*, Reu. gén. Chemins de Fer 69, 161–167 (1950).
- [6] F. DUBOIS, *Ein Apparat zur automatischen Aufzeichnung der Eisenbahnfahrpläne*, Neue Zürcher Zeitung, 14. Februar 1951, Nr. 321, Beilage Technik.
- [7] W. MEYER ZUR CAPELLEN, *Mathematische Instrumente* (Becker & Erle, Leipzig 1941).
- [8] F. A. WILKERS, *Mathematische Maschinen und Instrumente* (Akademieverlag Berlin 1951).
- [9] M. LATTMANN, *Neue technische Mittel zur Behandlung mathematischer Probleme*, Mitt. Vereinig. schweiz. Vers.-Math. 48, H. 1 (1948).
- [10] T. ERISMANN, *Einige neue mechanische Integriergeräte*, Z. angew. Math. Mech. 31, Nr. 8/9 (1951).
- [11] T. ERISMANN, *Alte und neue mechanische Integriergeräte*, Neue Zürcher Zeitung, 16. Januar 1952, Nr. 109, Beilage Technik.
- [12] T. ERISMANN, *Anciens et nouveaux appareils mécaniques d'intégration*, Bu. techn. Suisse romande, 21. Februar und 7. März 1953.
- [13] F. DUBOIS, *Nouveaux appareils pour opérations mathématiques*, Génie civil 130, Nr. 7 (1953).
- [14] A. KUHLENKAMP, *Differentiations- und Integrationsgetriebe*, Z. Ver. dtsh. Ing. 91, Nr. 22, 567–575 (1949).
- [15] A. KUHLENKAMP, *Neuzeitliche mechanische Rechengерäte*, Z. Ver. dtsh. Ing. 93, Nr. 12, 320–321 (1951).
- [16] P. CURTI und F. DUBOIS, *Die mechanische Lösung des ausserballistischen Hauptproblems*, Schweiz. Bauztg., 67, Nr. 3 (1949).
- [17] P. CURTI und F. DUBOIS, *La solution mécanique du problème de la balistique extérieure*, Rev. mil. suisse 97, Nr. 7 (1952).
- [18] T. ERISMANN, *Eine neue Integrieranlage*, Z. angew. Math. Mech. Nr. 8/9 (1951).
- [19] T. ERISMANN, *Alte und neue Integrieranlagen*, Neue Zürcher Zeitung, 12. November 1952, Nr. 2512/2513, Beilage Technik.

Summary

A definition is given for a certain class of gears known as 'genuine spherical gears'. The theoretical behaviour of these gears is analysed and formulae for calculating their efficiency are deduced. A large number of existing and possible applications for computing machines, servo systems and other purposes are described.

(Eingegangen am 20. Oktober 1953.)

On the Concentration of Stresses Due to a Small Elliptic Inclusion on the Neutral Axis of a Deep Beam under Constant Bending Moment

By SISIR CHANDRA DAS, Chandernagore, India¹⁾

Introduction

Stress concentrations due to elliptical inclusions for an infinite plate subjected to uniform tensile and shearing stresses have been obtained by DONNELL [1]²⁾.

The object of the present paper is to examine the stresses due to a small elliptic inclusion whose centre lies on the neutral axis of a deep beam of rectangular section under uniform bending moment.

The stresses have been calculated for an elliptic slag in steel when both slag and steel have the same POISSON'S ratio, and the YOUNG'S modulus of the slag is one-quarter that of the surrounding material. Particular cases of a reinforcement very rigid in comparison with the beam and of a flaw in the beam have also been discussed in detail.

Nomenclature

- x, y = Cartesian coordinates;
- ξ, η = elliptic coordinates;
- $u, v = (u_\xi, u_\eta)$ = components of displacements;
- $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta$ = unit elongations in ξ - and η -directions;
- $\gamma_{\xi\eta}$ = shearing strain;
- σ_ξ, σ_η = normal stress components in elliptical coordinates;
- $\tau_{\xi\eta}$ = shearing stress in elliptic coordinates;
- σ_x, σ_y = normal stress in Cartesian coordinates;
- τ_{xy} = shearing stress in Cartesian coordinates;
- E = YOUNG'S modulus for the beam;
- ν = POISSON'S ratio for the beam;
- $1/h_1, 1/h_2$ = stretch ratios;
- $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y$ = dilatation;
- 2ω = rotation;
- M = bending moment;

¹⁾ Chandernagore College, Department of Mathematics.

²⁾ Numbers in brackets refer to the References, page 398.

- t = thickness;
 d = depth of the beam;
 a, b = major and minor semiaxes of the ellipse;
 $A_{1,2}, \dots, B_{1,2}, \dots$ = constants;
 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$;
 $A = 12 M / (t d^3)$;
 $k = E' / E$;
 $p = (3 - \nu) / (1 + \nu)$.

The same symbols have been used with primes for the region inside the discontinuity.

1. Method of Solution

Let the centre of the inclusion be the origin, the neutral axis the axis of x and a line at right angles to it through the origin the axis of y .

Using the transformation

$$x + i y = c \cosh(\xi + i \eta) \quad (1.1)$$

i.e.

$$x = c \cosh \xi \cos \eta, \quad y = c \sinh \xi \sin \eta \quad (1.2)$$

we get

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \xi} = 1, \quad (1.3)$$

which for different values of ξ gives a set of ellipses. The ellipse corresponding to the value $\xi = \alpha$ is taken as the boundary of the inclusion with the semi-axes $c \cosh \alpha, c \sinh \alpha$ in the x -, y -direction respectively.

When $u_\xi = u$ and $u_\eta = v$ stand for the displacements in the directions of the normals to the lines $\xi = \text{const}$ and $\eta = \text{const}$, the strain components are given by

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\xi &= h_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + h_1 h_2 v \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{h_1} \right), \\ \varepsilon_\eta &= h_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + h_1 h_2 u \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{h_2} \right), \\ \gamma_{\xi\eta} &= \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (h_2 v) + \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (h_1 u). \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Considering the problem of a deep beam as that of a plane stress, we find from the above relations the stresses

$$\sigma_\xi = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_\xi + \nu \varepsilon_\eta), \quad \sigma_\eta = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_\eta + \nu \varepsilon_\xi), \quad \tau_{\xi\eta} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{\xi\eta}, \quad (1.5)$$

where E and ν are YOUNG'S modulus and POISSON'S ratio, and $1/h_1$ and $1/h_2$ are the two stretch ratios which in our coordinates are given by

$$\frac{1}{h_1^2} = \frac{1}{h_2^2} = \frac{c^2}{2} (\cosh 2\xi - \cos 2\eta). \quad (1.6)$$

The equilibrium conditions will be satisfied if the expressions

$$h_1 h_2 \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u}{h_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{v}{h_1} \right) \right] = \omega = \frac{1}{2} h_1 h_2 \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{v}{h_2} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u}{h_1} \right) \right] \quad (1.7)$$

satisfy LAPLACE'S equation and there is a function F of the complex variable $\xi + i\eta$ such that

$$e + i(1 - \nu)\omega = F(\xi + i\eta). \quad (1.8)$$

2. Boundary Conditions

When M is the bending moment, t the thickness and d the depth of the beam, the conditions to be satisfied are

$$\sigma_x = A y, \quad (2.1)$$

and

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (2.2)$$

at infinite distance where

$$A = \frac{12M}{td^3}. \quad (2.3)$$

In elliptic coordinates the stresses can be taken as

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{Ac}{8} (\sin \eta + \sin 3\eta) e^\xi, \\ \sigma_\eta &= \frac{Ac}{8} (3 \sin \eta - \sin 3\eta) e^\xi, \\ \tau_{\xi\eta} &= \frac{Ac}{8} (\cos 3\eta - \cos \eta) e^\xi, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

when $\xi \rightarrow \infty$.

At the boundary of the discontinuity, i.e. for $\xi = \alpha$, we have

$$\sigma_\xi = \sigma'_\xi, \quad \tau_{\xi\eta} = \tau'_{\xi\eta} \quad (2.5)$$

and

$$u = u', \quad v = v', \quad (2.6)$$

where primes denote the stresses and displacements for the inclusion.

For $\xi = 0$ we must have

$$u' = 0 \quad (2.)$$

for all types of elastic materials.

3. The Solution of the Problem

As a solution suitable for our problem, we take for the material of the beam, i.e. for $\xi \geq \alpha$,

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{-\sqrt{2}(1+\nu)c}{E\sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{A_{+2}}{2} \left\{ \left(1 - \frac{p}{2}\right) e^{3z} \sin \eta + \left(1 + \frac{p}{2}\right) e^z \sin 3\eta \right\} \right. \\ &- \frac{A_{-2}}{2} \left\{ \left(1 + \frac{p}{2}\right) e^{-\xi} \sin 3\eta + \left(1 - \frac{p}{2}\right) e^{-3\xi} \sin \eta \right\} \\ &+ \{B_{+3} e^{3\xi} - B_{-3} e^{-3\xi}\} \sin 3\eta \\ &\left. + \{B_{+1} e^{\xi} - B_{-1} e^{-\xi}\} \sin \eta \right], \\ v &= \frac{-\sqrt{2}(1+\nu)c}{E\sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{A_{+2}}{2} \left\{ \left(1 - \frac{p}{2}\right) e^{3z} \cos \eta + \left(1 + \frac{p}{2}\right) e^z \cos 3\eta \right\} \right. \\ &+ \frac{A_{-2}}{2} \left\{ \left(1 + \frac{p}{2}\right) e^{-\xi} \cos 3\eta + \left(1 - \frac{p}{2}\right) e^{-3\xi} \cos \eta \right\} \\ &+ \{B_{+3} e^{3\xi} + B_{-3} e^{-3\xi}\} \cos 3\eta \\ &\left. + \{B_{+1} e^{\xi} + B_{-1} e^{-\xi}\} \cos \eta \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.) \end{aligned}$$

and for the inclusion, i.e. for $\xi \leq \alpha$,

$$\left\{ \begin{aligned} u' &= \frac{-\sqrt{2}(1+\nu')c}{E'\sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{A'_{+2}}{2} \left\{ \left(1 - \frac{p'}{2}\right) e^{3\xi} \sin \eta + \left(1 + \frac{p'}{2}\right) e^{\xi} \sin 3\eta \right\} \right. \\ &- \frac{A'_{-2}}{2} \left\{ \left(1 + \frac{p'}{2}\right) e^{-\xi} \sin 3\eta + \left(1 - \frac{p'}{2}\right) e^{-3\xi} \sin \eta \right\} \\ &+ \{B'_{+3} e^{3\xi} - B'_{-3} e^{-3\xi}\} \sin 3\eta \\ &\left. + \{B'_{+1} e^{\xi} - B'_{-1} e^{-\xi}\} \sin \eta \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\sqrt{2} (1 + \nu') c \\
 & E' \sqrt{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} \\
 & \times \left[\frac{A'_{+2}}{2} \left\{ \left(1 + \frac{p'}{2}\right) e^{3\xi} \cos \eta + \left(1 - \frac{p'}{2}\right) e^{\xi} \cos 3\eta \right\} \right. \\
 & \quad + \frac{A'_{-2}}{2} \left\{ \left(1 - \frac{p'}{2}\right) e^{-\xi} \cos 3\eta + \left(1 + \frac{p'}{2}\right) e^{-3\xi} \cos \eta \right\} \\
 & \quad + \{B'_{+3} e^{3\xi} + B'_{-3} e^{-3\xi}\} \cos 3\eta \\
 & \quad \left. + \{B'_{+1} e^{\xi} + B'_{-1} e^{-\xi}\} \cos \eta \right], \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

here E' , ν' are YOUNG'S modulus and POISSON'S ratio for the inclusion, A 's and B 's are constants,

$$p = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}, \quad p' = \frac{3 - \nu'}{1 + \nu'}, \quad (3.3)$$

and u' , v' are the components of displacement for the inclusion.

The equilibrium conditions are obviously satisfied.

The stresses calculated from the displacements (3.1) are

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2} \\
 & \times \left[\frac{A_{+2}}{2} \{3 e^{\xi} \sin 5\eta - (5 e^{-\xi} + 4 e^{3\xi}) \sin 3\eta \right. \\
 & \quad \left. + (e^{5\xi} - e^{3\xi} + 4 e^{\xi}) \sin \eta\} \right. \\
 & \quad + \frac{A_{-2}}{2} \{3 e^{-\xi} \sin 5\eta - (5 e^{\xi} + 4 e^{-3\xi}) \sin 3\eta \\
 & \quad \left. + (e^{-5\xi} - e^{-3\xi} + 4 e^{-\xi}) \sin \eta\} \\
 & \quad + B_{+3} \{2 e^{3\xi} \sin 5\eta - (2 e^{5\xi} + 4 e^{\xi}) \sin 3\eta + 4 e^{3\xi} \sin \eta\} \\
 & \quad + B_{-3} \{2 e^{-3\xi} \sin 5\eta - (2 e^{-5\xi} + 4 e^{-\xi}) \sin 3\eta + 4 e^{-3\xi} \sin \eta\} \\
 & \quad \left. - 2 (B_{+1} + B_{-1}) (e^{\xi} + e^{-\xi}) \sin \eta \right], \quad (3.4) \\
 & \eta = \frac{1}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2} \\
 & \times \left[\frac{A_{+2}}{2} \{e^{\xi} \sin 5\eta + (e^{-\xi} - 4 e^{3\xi}) \sin 3\eta \right. \\
 & \quad \left. + (3 e^{5\xi} + 5 e^{3\xi} + 4 e^{\xi}) \sin \eta\} \right. \\
 & \quad + \frac{A_{-2}}{2} \{e^{-\xi} \sin 5\eta + (e^{\xi} - 4 e^{-3\xi}) \sin 3\eta \\
 & \quad \left. + (3 e^{-5\xi} + 5 e^{-3\xi} + 4 e^{-\xi}) \sin \eta\} \\
 & \quad + B_{+3} \{-2 e^{3\xi} \sin 5\eta + (2 e^{5\xi} + 4 e^{\xi}) \sin 3\eta - 4 e^{3\xi} \sin \eta\} \\
 & \quad + B_{-3} \{-2 e^{-3\xi} \sin 5\eta + (2 e^{-5\xi} + 4 e^{-\xi}) \sin 3\eta - 4 e^{-3\xi} \sin \eta\} \\
 & \quad \left. + 2 (B_{+1} + B_{-1}) (e^{\xi} + e^{-\xi}) \sin \eta \right],
 \end{aligned}$$

$$\tau_{\xi\eta} = \frac{1}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2} \left[\begin{aligned} & \frac{A_{+2}}{2} \{ e^\xi \cos 5\eta - 3 e^{-\xi} \cos 3\eta + (3 e^{3\xi} - e^{5\xi}) \cos \eta \} \\ & + \frac{A_{-2}}{2} \{ -e^{-\xi} \cos 5\eta + 3 e^\xi \cos 3\eta + (e^{-5\xi} - 3 e^{-3\xi}) \cos \eta \} \\ & + B_{+3} \{ 2 e^{3\xi} \cos 5\eta - 2 (2 e^\xi + e^{5\xi}) \cos 3\eta + 4 e^{3\xi} \cos \eta \} \\ & + B_{-3} \{ -2 e^{-3\xi} \cos 5\eta + 2 (2 e^{-\xi} + e^{-5\xi}) \cos 3\eta \\ & \quad - 4 e^{-3\xi} \cos \eta \} \\ & + 2 (B_{+1} + B_{-1}) (e^\xi - e^{-\xi}) \cos \eta \}. \end{aligned} \right] \quad (3.)$$

Analogous expressions for stresses can be obtained for the inclusion, the constants being replaced by those with primes.

Conditions (2. 4) will be satisfied if

$$A_{+2} = \frac{A'_{+2}}{16}, \quad B_{+3} = \frac{A'_{+2}}{64}, \quad (3.)$$

and the boundary condition (2. 7) gives

$$A'_{+2} = A'_{-2}, \quad B'_{+2} = B'_{-2}, \quad B'_{+1} = B'_{-1}, \quad (3.)$$

from which it is clearly seen that $\tau_{\xi\eta} = 0$ at $\xi = 0$.

Assuming POISSON'S ratio to be same for both materials, i.e.

$$\nu = \nu' \quad \text{and} \quad p = p',$$

which is the case in most practical applications, we see that the boundary conditions (2.5) and (2.6) will be satisfied if

$$\left. \begin{aligned} A'_{-2} &= \frac{k(p-1)}{(p+k)(1+p)} \left[\frac{e^{4\alpha}}{(1+p)} \frac{A_{+2}}{2} - 2(k-1) \frac{(2B_{+3} + e^{-2\alpha} A_{+2})}{(1+p)(e^{2\alpha} - e^{-2\alpha})} - p(k-1)^2 e^{-4\alpha} \right] \\ &+ 4B'_{+3} e^{3\alpha} = A'_{+2} \left[-2e^\alpha + \frac{p(1-k)}{p(k+1)} e^{-\alpha} \right] \\ &+ \frac{2k(1+p)e^\alpha}{p(k+1)} (A_{+2} + 2B_{+3} e^{2\alpha}), \\ A_{-2} &= \frac{p+1}{p(k+1)} A'_{-2} \\ &+ \frac{2(k-1)}{p(k+1)} (A_{+2} + 2B_{+3} e^{2\alpha}) e^{2\alpha}, \\ 4B_{-3} e^{-3\alpha} &= \frac{p+1}{1-k} e^\alpha A'_{+2} \\ &- \frac{1+p}{1-k} A_{+2} - 2e^{-\alpha} A_{-2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & B'_{-1} (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) (1 - k) - k (p + 1) [A_{+2} (e^{5\alpha} - e^{3\alpha} + 2e^{\alpha}) \\
 & \quad - A_{-2} (e^{-5\alpha} - e^{-3\alpha} - 2e^{-\alpha}) \\
 & \quad - A'_{-2} (p - k) (e^{5\alpha} - e^{3\alpha}) - (3k - p - 2) \\
 & \quad \cdot (e^{3\alpha} - e^{3\alpha}) - 2(p - 1) (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) \\
 & \quad - 8B'_{-3} (k - 1) (e^{3\alpha} - e^{3\alpha}) , \\
 & 2k e^{\alpha} B_{-1} - k \left[A_{-2} e^{3\alpha} - \frac{p}{2} A_{-2} e^{3\alpha} \right] \\
 & \quad - A'_{-2} \left[e^{3\alpha} - \frac{p}{2} e^{3\alpha} \right] - 2e^{\alpha} B'_{-1} , \\
 & 2k e^{-\alpha} B_{-1} - k \left[\frac{p}{2} A_{-2} e^{3\alpha} - A_{-2} e^{3\alpha} \right] \\
 & \quad - A'_{-2} \left[\frac{p}{2} e^{3\alpha} - e^{3\alpha} \right] - 2e^{-\alpha} B'_{-1}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

where

$$k = \frac{E'}{E} . \quad (3.8)$$

In the general case the actual calculation of stresses from these expressions becomes very lengthy, but when the elasticity of the inclusion and the surrounding material as well as the form of the ellipse is known the calculation becomes simpler. As an example of practical importance, let us consider the case of an elliptical slag in steel. It is assumed that both the slag and the steel have the same Poisson's ratio given by $p = 2$, and the shape ratio of the ellipse is given by

$$\frac{a}{b} = 2 , \quad (3.9)$$

where a, b are the major and minor semiaxes respectively. We also take YOUNG's modulus of the inclusion to be one-quarter that of the surrounding material, i.e. $k = 1/4$, a plausible value for slag in steel. It is clear that the maximum stresses will occur at the boundary of the discontinuity, i.e. at $\xi = x$.

For the stresses we get

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{\xi} &= \frac{3 A a}{776 (5 - 3 \cos 2 \eta)^2} [45 \sin 5 \eta - 351 \sin 3 \eta + 916 \sin \eta] , \\
 \sigma_{\eta} &= \frac{3 A a}{776 (5 - 3 \cos 2 \eta)^2} [729 \sin 5 \eta - 3651 \sin 3 \eta + 6020 \sin \eta] , \\
 \tau_{\xi \eta} &= \frac{3 A a}{1552 (5 - 3 \cos 2 \eta)^2} [-189 \cos 5 \eta + 1065 \cos 3 \eta - 1204 \cos \eta] .
 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

At the ends of the axes these stresses are as follows:

At $\eta = 0$,

$$\sigma_{\xi} = \sigma_{\eta} = 0, \quad \tau_{\xi\eta} = 0.1585 A a \quad (3)$$

and at $\eta = \pi/2$,

$$\tau_{\xi\eta} = 0, \quad \sigma_{\xi} = 0.0792 A a, \quad \sigma_{\eta} = 0.6282 A a. \quad (3)$$

Another case of practical importance is that of a reinforcement which is very stiff compared to the surrounding material. In this case $k \rightarrow \infty$ and stresses on the boundary of the discontinuity $\xi = \alpha$ are given by

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi} &= \frac{(p+1) A c}{p \cdot 32 (\cosh 2\alpha - \cos 2\eta)^2} \\ &\times \left[\{ (p+2) e^{\alpha} - e^{3\alpha} \} \sin 5\eta \right. \\ &\quad - \{ (p+4) e^{-\alpha} - 2e^{\alpha} - e^{5\alpha} + (2p+2) e^{3\alpha} \} \sin 3\eta \\ &\quad \left. + \{ p e^{5\alpha} - (p-2) e^{3\alpha} - (2p+3) e^{\alpha} + 2e^{-\alpha} \} \sin \eta \right], \\ \sigma_{\eta} &= \frac{(3-p) A c}{p \cdot 32 (\cosh 2\alpha - \cos 2\eta)^2} \\ &\times \left[\{ (p+2) e^{\alpha} - e^{3\alpha} \} \sin 5\eta \right. \\ &\quad - \{ (p+4) e^{-\alpha} - 2e^{\alpha} - e^{5\alpha} + (2p+2) e^{3\alpha} \} \sin 3\eta \\ &\quad \left. + \{ p e^{5\alpha} + (p-2) e^{3\alpha} + (2p+3) e^{\alpha} + 2e^{-\alpha} \} \sin \eta \right], \\ \tau_{\xi\eta} &= \frac{(p+1) A c}{p \cdot 32 (\cosh 2\alpha - \cos 2\eta)^2} \\ &\times \left[\{ e^{\alpha} (2-p) - e^{3\alpha} \} \cos 5\eta \right. \\ &\quad + \{ (p-4) e^{-\alpha} + 2(p-1) e^{3\alpha} + e^{5\alpha} + 2e^{\alpha} \} \cos 3\eta \\ &\quad \left. + \{ -p e^{5\alpha} + (p-2) e^{3\alpha} + [5-2p] e^{\alpha} - 3e^{-\alpha} + 2e^{-3\alpha} \} \cos \eta \right] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

where the displacements u and v vanish.

The maximum and minimum stresses will occur at the ends of the axes, at $\eta = 0$ or π and $\eta = \pm \pi/2$. We shall calculate the stresses at those points $p = 2$ which is the case in most applications.

At $\eta = 0$

$$\sigma_{\xi} = \sigma_{\eta} = 0$$

and

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\xi\eta} &= \frac{3 A c}{64 (\cosh 2\alpha - 1)^2} [-e^{5\alpha} + e^{3\alpha} + 3e^{\alpha} - 5e^{-\alpha} + 2e^{-3\alpha}] \\ &= \frac{3 A (a-b)}{32 b} (3a-b) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\eta = \pi/2,$$

$$\tau_{\xi\eta} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi} &= \frac{3 A c}{64 (\cosh 2 \alpha + 1)^2} [e^{5\alpha} + 5 e^{3\alpha} + 9 e^{\alpha} + 7 e^{-\alpha} + 2 e^{-3\alpha}] \\ &= \frac{3 A (a+b) (3a-b)}{32 a}, \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

and

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\eta} &= \frac{A c}{64 (\cosh 2 \alpha + 1)^2} [e^{5\alpha} + 5 e^{3\alpha} + 9 e^{\alpha} + 7 e^{-\alpha} + 2 e^{-3\alpha}] \\ &= \frac{A (a+b) (3a-b)}{32 a}. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

In the case of circular insertion the values of the stresses can be easily obtained from the above expressions.

Finally, we consider the case of a hole. Here $k = 0$ and the stresses on the elliptic boundary are given by

$$\sigma_{\xi} = \tau_{\xi\eta} = 0$$

and

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\eta} &= \frac{A c (e^{2\alpha} - 1)}{8 (\cosh 2 \alpha - \cos 2 \eta)^2} [e^{\alpha} \sin 5 \eta - (e^{3\alpha} + e^{\alpha} + 3 e^{-\alpha}) \sin 3 \eta \\ &\quad + (e^{3\alpha} + 4 e^{\alpha} + 3 e^{-\alpha} + 2 e^{-3\alpha}) \sin \eta], \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

which can be written in the form

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\eta} &= \frac{A c \sinh \alpha (\cosh \alpha + \sinh \alpha)}{2 (\cosh 2 \alpha - \cos 2 \eta)} [(3 \cosh \alpha - \sinh \alpha) \sin \eta \\ &\quad - (\cosh \alpha + \sinh \alpha) \sin 3 \eta]. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

The above results tally with those obtained by SEN [2].

When $\eta = \pm \pi/2$, i.e. at the ends of the minor axis, we get

$$\sigma_{\eta} = \pm A b \left(1 + \frac{b}{a}\right), \quad (3.19)$$

the result worked out by WOLF [3].

If $a = b$, i.e. if the hole is circular, we have

$$\sigma_{\eta} = \pm 2 A a. \quad (3.20)$$

This is the value obtained by TUZI [4].

Acknowledgment

The author expresses his grateful thanks to Dr. B. SEN for his kind help in preparation of this paper.

REFERENCES

- [1] L. H. DONNELL, *Stress Concentration Due to Elliptical Discontinuities in Plates Under Edge Forces*, Ann. Vol. of T. Von Kármán, Calif. Inst. Tech. 1929, 293-309.
- [2] B. SEN, *Stresses Due to a Small Elliptic Hole or Crack on the Neutral Axis of a Deep Beam under Constant Bending Moment*, Phil. Mag. [7] 12, 312-319 (1931).
- [3] K. WOLF, Z. techn. Phys. No. 8, 160 (1921).
- [4] Z. TUZI, *Effect of a Circular Hole on the Stress Distribution in a Deep Beam under Uniform Bending Moment*, Phil. Mag. [7] 9, 210 (1930).

Zusammenfassung

Es wird die Spannungsverteilung untersucht, die sich in einem breiten Balken mit konstanter Höhe unter einem konstanten Biegemoment ausbildet, wenn eine kleine elliptische Einschlüssung mit Zentrum auf der Neutralachse enthalten ist. Insbesondere werden die Fälle eines sehr starren Einschlusses sowie eines elliptischen Loches im Detail diskutiert.

(Received: September 19, 1953.)

The Theory of an Oscillating Cylinder Viscometer

By ALI A. K. IBRAHIM and ABDEL MONEM I. KABIEL, Alexandria, Egypt¹⁾

Abstract

The theoretical details of periodic state of motion of a liquid (Newtonian) in a narrow annular gap between long vertical coaxial cylinders is given in a new way.

If the inner cylinder is suspended by a delicate torsion wire while the outer cylinder undergoes forced harmonic oscillations about its axis, the amplitude of uniform oscillation attained by the inner cylinder can be calculated. Two equations are derived for this purpose; the first is neither simple nor direct with respect to η (coefficient of viscosity of the liquid) and the other constant of the apparatus, but covers all liquids with various densities and viscosities while the second is more simple and direct but covers only liquids of $\eta_1 > \eta_2$. The theory agrees well with experiment for all values of θ_0/q_0 , where θ_0 is the

¹⁾ Physics Department, Faculty of Science, University of Alexandria.

amplitude of deflection of the inner cylinder and q_0 is the amplitude of oscillations inexorably imposed on the outer cylinder. θ_0/q_0 and V_d/q_0 , where V_d is the velocity of the liquid in the neighbourhood of the curved surface of the inner cylinder, has been plotted as function of the frequency for different values of the constants of the liquid of an available apparatus.

Also the effect of density of the liquid has been discussed, and the condition of resonance between the liquid and the inner cylinder is given.

The Theory

Suppose a fluid to be contained in a narrow annular gap between long vertical coaxial cylinders. The inner cylinder (L cm long with a diameter a cm) having a moment of inertia I (in g cm^2) about its major axis, is hung by a delicate torsion wire (of restoring constant τ in $\text{g cm}^2 \text{s}^{-2}$) so that it may turn about a vertical axis. The outer cylinder has an inner diameter $2b$ cm and is maintained (by means of connecting rods to an electric motor) in a state of forced harmonic angular uniform oscillations through small angular amplitudes about its central vertical axis, so that an alternating torque is applied to the fluid and viscosity comes into play.

Only two dimensional axially symmetric motion need be considered since it is confirmed experimentally¹⁾ that when the annular gap is always completely filled, the end effects are negligible. Therefore, it has been found that the velocity (V) in cm s^{-1} of the fluid is given by the following equation of motion²⁾

$$\frac{1}{\nu} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{d^2V}{dr^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r^2}, \quad (1)$$

where ν is the kinematic viscosity of the liquid in $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$.

However, making a solution of equation (1) as indicated by us in a previous paper³⁾, it then follows that the angular displacement θ , the angular velocity and the angular velocity gradient in the neighbourhood of the inner cylinder $(d\theta'/dy)_{y=d}$ are given by the following equations:

$$\theta = \frac{\omega \varphi_0 e^{i\omega t}}{F E_1 - F_1 E} [E_1 \exp(m_1 y + i\omega t) - F_1 \exp(m_2 y + i\omega t)], \quad (2)$$

$$\theta' = \frac{i\omega \varphi_0 e^{i\omega t}}{F E_1 - F_1 E} [E_1 \exp(m_1 y + i\omega t) - F_1 \exp(m_2 y + i\omega t)], \quad (3)$$

and

$$\left(\frac{d\theta'}{dy} \right)_{y=d} = \frac{i\omega \varphi_0 e^{i\omega t}}{F E_1 - F_1 E} \left[E_1 m_1 \exp\{m_1 (-d) + i\omega t\} - F_1 m_2 \exp\{m_2 (-d) + i\omega t\} \right], \quad (4)$$

¹⁾ J. G. OLDROYD, J. STROWBRIDGE, and B. TOMS, Proc. Phys. Soc. (London) B, 64, 44 (1951).

²⁾ H. LAMB, *Hydrodynamics* (Dover Publications, New York, 1945).

³⁾ A. A. K. IBRAHIM and A. M. KABIEL, J. appl. Phys. 23, No. 7 (1952).

where

φ_0 = the amplitude inexorably imposed on the outer cylinder ,

$$F = \exp (m_1 d + i \omega t) ,$$

$$E = \exp (m_2 d + i \omega t) ,$$

$$F_1 = (m_1 - i \gamma' \omega) \exp \{m_1(-d) + i \omega t\} ,$$

$$E_1 = (m_2 - i \gamma' \omega) \exp \{m_2(-d) + i \omega t\} ,$$

$$m_1 = -\frac{3}{2R} + C + i D ,$$

$$m_2 = -\frac{3}{2R} - C - i D ,$$

$$\gamma' = \frac{I \omega^2 - \tau}{K \eta \omega^2} ,$$

$$K = 2 \pi L a^3 ,$$

$$C = \left\{ \frac{9}{8 R^2} + \left(\frac{81}{64 R^4} + B^4 \right)^{1/2} \right\}^{1/2} ,$$

$$D = \left\{ -\frac{9}{8 R^2} + \left(\frac{81}{64 R^4} + B^4 \right)^{1/2} \right\}^{1/2} ,$$

$$B = \left[\frac{\pi \varrho}{T \eta} \right]^{1/2} ,$$

$$R = \frac{b+a}{2} ,$$

$$d = \frac{b-a}{2} ,$$

ω the angular velocity of the outer cylinder and y varies between

It is often quite convenient to consider the 'modulus' or the absolute value.

Therefore, on solving equation (3) we have

$$\frac{\theta'^2}{\varphi_0^2} = \omega^2 \exp \left[\frac{3}{R} (d-y) \right] \frac{L_1^2 + M_1^2}{L^2 + M^2} ,$$

where

$$L_1 = \begin{vmatrix} \exp \{C(d+y)\} & 0 & \exp \{-C(d+y)\} \\ \cos D(d+y) & \cos D(d+y) & \cos D(d+y) \\ C & \frac{3}{2R} & -C \\ \exp \{C(d+y)\} & 0 & \exp \{-C(d+y)\} \\ + \sin D(d+y) & \sin D(d+y) & \sin D(d+y) \\ -\gamma' \omega & -D & \gamma' \omega \end{vmatrix} ,$$

$$M_1 = \begin{array}{ccc} \exp \{ C (d + y) \} & 0 & \exp \{ -C (d + y) \} \\ \cos \{ D (d + y) \} & \cos \{ D (d + y) \} & \cos \{ D (d + y) \} \\ D & \gamma' \omega & -D \\ \exp \{ C (d + y) \} & 0 & \exp \{ -C (d + y) \} \\ \sin D (d + y) & \sin D (d + y) & \sin D (d + y) \\ \frac{3}{2R} & C & -\frac{3}{2R} \end{array}$$

$$L = \begin{array}{ccc} \exp (2 C d) & 0 & \exp (-2 C d) \\ \cos 2 D d & \cos 2 D d & \cos 2 D d \\ C & \frac{3}{2R} & -C \\ \exp (2 C d) & 0 & \exp (-2 C d) \\ + \sin 2 D d & \sin 2 D d & \sin 2 D d \\ -\gamma' \omega & -D & \gamma' \omega \end{array}$$

$$M = \begin{array}{ccc} \exp (2 C d) & 0 & \exp (-2 C d) \\ \cos 2 D d & \cos 2 D d & \cos 2 D d \\ D & \gamma' \omega & -D \\ \exp (2 C d) & 0 & \exp (-2 C d) \\ + \sin 2 D d & \sin 2 D d & \sin 2 D d \\ \frac{3}{2R} & C & -\frac{3}{2R} \end{array}$$

After some rearrangements, equation (5) may be written in the following form

$$\frac{\theta'}{\varphi_0} \Big|_0^2 = \omega^2 e^{3(d-y)/R} \frac{C^2 + D^2 + A_1 + B_1 + C_1 + D_1}{C^2 + D^2 + A_2 + B_2 + C_2 + D_2}, \quad (6)$$

where

$$\begin{aligned} A_1 &= (\gamma'^2 \omega^2 - 2 D^2) \sin^2 D (d + y), & A_2 &= (\gamma'^2 \omega^2 - 2 D^2) \sin^2 2 D d, \\ B_1 &= \left(\frac{3 D}{2 R} - \gamma' \omega C \right) \sin 2 D (d + y), & B_2 &= \left(\frac{3 D}{2 R} - \gamma' \omega C \right) \sin 4 D d, \\ C_1 &= (\gamma'^2 \omega^2 + 2 C^2) \sinh^2 C (d + y), & C_2 &= (\gamma'^2 \omega^2 + 2 C^2) \sinh^2 2 C d, \\ D_1 &= \left(\frac{3 C}{2 R} + \gamma' \omega D \right) \sinh 2 C (d + y), & D_2 &= \left(\frac{3 C}{2 R} + \gamma' \omega D \right) \sinh 4 C d. \end{aligned}$$

This quantity gives the angular velocity-amplitude through the liquid at any distance from the curved surface of the inner cylinder. It is related to the linear velocity-amplitude (which is actually measured in practice) at the same place; where

$$V = (R + y) \left(\frac{\theta'}{\varphi_0} \right),$$

also:

$$\left. \frac{\theta'}{\varphi_0} \right|_{y=-d}^2 = \frac{\omega^2 e^{6d/R} (C^2 + D^2)}{C^2 + D^2 + A_2 + B_2 + C_2 + D_2}$$

and

$$\left. \frac{V}{\varphi_0} \right|_{y=-d} = a \left. \frac{\theta'}{\varphi_0} \right|_{y=-d}.$$

Now, the rate of change of the relative motion of adjacent layers of liquid can be expressed by:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta'}{dy} \Big|_{y=-d}^2 &= \omega^2 \varphi_0^2 e^{3(d-y)/R} \left\{ \gamma'^2 \omega^2 (C^2 + D^2) + \gamma'^2 \omega^2 (C^2 + D^2) \right. \\ &\quad \times [\sinh^2 C (d + y) - \sin^2 D (d + y)] \\ &\quad + \gamma' \omega \left(2 C D - \frac{3 \gamma' \omega}{2 R} \right) \\ &\quad \times [C \sinh 2 C (d + y) + D \sin 2 D (d + y)] \\ &\quad + \left(2 C D - \frac{3 \gamma' \omega}{2 R} \right)^2 \\ &\quad \cdot [\sinh^2 C (d + y) + \sin^2 D (d + y)] \Big\} \\ &\quad \text{divided by} \\ &\quad \{ C^2 + D^2 + A_2 + B_2 + C_2 + D_2 \} \end{aligned} \right\}$$

and

$$\left. \frac{d\theta'}{dy} \right|_{y=-d}^2 = \frac{\gamma'^2 \omega^4 \varphi_0^2 e^{6d/R} (C^2 + D^2)}{C^2 + D^2 + A_2 + B_2 + C_2 + D_2}.$$

Hence, the velocity-gradient amplitude may be obtained from the following relation

$$\frac{dV}{dy} = (R + y) \frac{d\theta'}{dy} + |\theta'|$$

and

$$\left. \frac{dV}{dy} \right|_{y=-d} = a \left. \frac{d\theta'}{dy} \right|_{y=-d} + |\theta'|_{y=-d}.$$

Also, from equation (2), we have

$$\psi^2 = \left| \frac{\theta}{\varphi_0} \right|^2 = \frac{\theta^2}{\varphi_0^2}.$$

This gives the angular amplitude of oscillation in the liquid at any radial distance from the curved surface of the inner cylinder to that of the outer cylinder.

Therefore, from equations (6) and (14) we have

$$|\theta'| = \omega \varphi_0 \psi \quad (15)$$

so, from equation (13), we have

$$(\psi^2)_{\psi=-d} = \frac{|\theta_0|^2}{\varphi_0^2} = \frac{e^{6d/R} (C^2 + D^2)}{C^2 + D^2 + A_2 + B_2 + C_2 + D_2}. \quad (16)$$

This quantity is the magnification factor $(\psi)_{-d}$, i.e. the ratio of the angular amplitude of oscillation of the inner cylinder to that of the outer cylinder.

It follows from equations (8) and (16) that

$$|\theta'|_{-d} = \omega \varphi_0 (\psi)_{-d} \quad (17)$$

special case of the general one, i.e. equation (15).

Numerical Calculations

The numerical constants (those of OLDROYD¹) used in our calculations are as follows:

$$a = 2.0701 \text{ cm}, \quad b = 2.1712 \text{ cm}, \quad L = 25.4 \text{ cm},$$

$$I = 2968 \text{ g cm}^2, \quad \tau = 2.79 \cdot 10^6 \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-2}.$$

Calculations have been made with different values of η , i.e. 1/16, 1/4, 1, 4, 8, and 16 poises.

Formula (16) satisfies that of OLDROYD (see Figure 1) for all values of θ_0/φ_0 ; but this formula, although it covers liquids of any density and viscosity, is not a direct relation between η and the other constants of the apparatus, a disadvantage which was already found in previous derived equations. An approximate form, valid for all values of $\eta > 1$, is obtained by substituting $\sin 2Dd$, $\sin 4Dd$, $\sinh 2Cd$, and $\sinh 4Cd$ their approximate values $2Dd$, $4Dd$, $2Cd$ and $4Cd$ respectively.

Therefore, equation (16) becomes

$$|\psi^2|_{\psi=-d} = \frac{\theta_0^2}{\varphi_0^2} = \frac{e^{6d/R}}{H}, \quad (18)$$

where

$$H = (e^{6d/R} + 4\gamma'^2 \omega^2 d^2).$$

¹ J. G. OLDROYD, Quart. J. Mech. appl. Math. 3, 271 (1951).

After some reductions, the following approximate formula is obtained

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\theta_0}{\varphi_0} \cdot \frac{b-a}{L} \cdot \frac{I\omega^2 - \tau}{a^3\omega} \left[1 - \left(\frac{\theta_0}{\varphi_0} \right)^2 \right]^{-1/2} e^{-3d/R}$$

a simple and direct formula between η on one side and the constants of the apparatus on the other. But when the above numerical constants are known, it is estimated that the formula (18) gives values of $(\psi)_{-d}$ with deviation from formula (16) of less than about 3.5% for all values of $\eta > 1$ and of n sufficient up to 25 c/s.

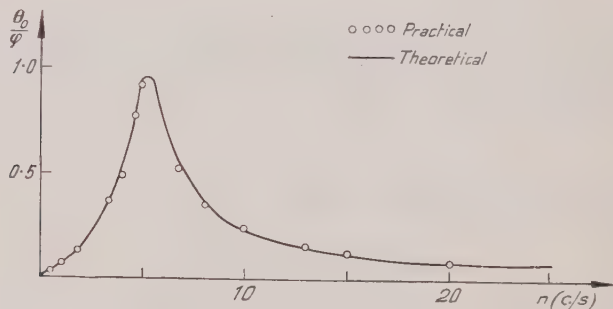


Figure 1

The variation of $\frac{\theta_0}{\varphi_0}(n)$ for paraffin oil.

When the amplitude of oscillation of the inner cylinder is measured, the path of a beam of light reflected from a mirror to a screen which is usually placed several meters away,

$$\theta_0 = \frac{S}{2M},$$

where S is the observed deflection of the scale image and M is the distance of the screen from the mirror. Therefore, applying this relation to equation (19) it becomes

$$\eta = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{S}{M} \cdot \frac{b-a}{L} \cdot \frac{I\omega^2 - \tau}{a^3\omega\varphi_0} \left[1 - \left(\frac{S}{2M\varphi_0} \right)^2 \right]^{-1/2} e^{-3d/R}.$$

Also, if τ is very small compared with $I\omega^2$, it can be neglected without appreciable error, and equation (20) becomes

$$\eta = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{S}{M} \cdot \frac{b-a}{L} \cdot \frac{I\omega}{a^3\varphi_0} \left[1 - \left(\frac{S}{2M\varphi_0} \right)^2 \right]^{-1/2} e^{-3d/R}.$$

Now, it follows from equation (5) that

$$\frac{\theta'^2}{\varphi_0} = \omega^2 e^{3(d-y)/R} \frac{H_1}{H}, \quad (22)$$

where

$$H_1 = [e^{3(d-y)/R} + \gamma'^2 \omega^2 (d+y)^2] \quad \text{and} \quad |\theta'|_{-d} = \omega \varphi_0 (\psi)_{-d},$$

equation which has been derived before, i.e. equation (17).

Also,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\theta'^2}{\varphi_0} &= \omega^2 \varphi_0^2 e^{3(d-y)/R} (C^2 + D^2) \\ &\times \frac{\left[\left[\gamma' \omega - \left(2CD - \frac{3\gamma' \omega}{2R} \right) (d+y) \right]^2 - \frac{9}{4R} \gamma'^2 \omega^2 (d+y)^2 \right]}{H} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

and

$$\frac{d\theta'^2}{d\gamma} \Big|_{\gamma=-d} = \frac{\gamma'^2 \omega^4 \varphi_0^2 e^{6d/R}}{H}. \quad (24)$$

Equations (22) and (23) are much simpler than equations (6) and (10), and agree with them for all values of $\eta > 1$.

The function $\psi(n)$ depends on four parameters (ϱ , γ , d , and τ) which can take different values. An example of the variation of the theoretical $(n, \psi)_{-d}$

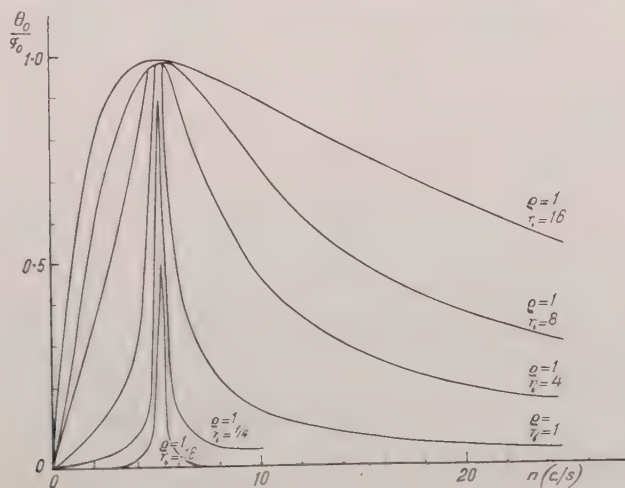


Figure 2

The variation of $\frac{\theta_0}{\varphi_0}(n)$ with η .

curves with η for viscous liquids ($\eta = 16, 8, 4, 1/4$, and $1/16$) the same ρ and τ is given; see Figure 2. The curves show a peak in ψ_{-d} not exceeding

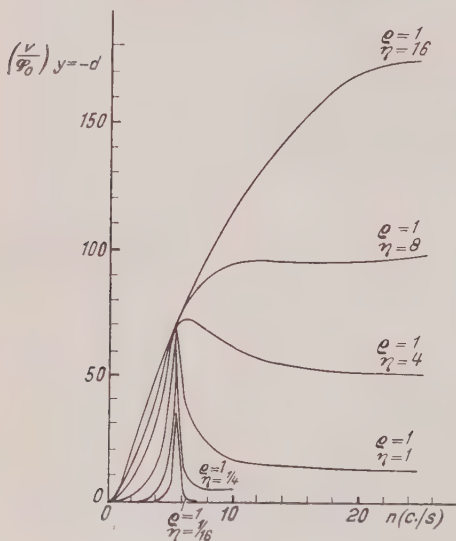


Figure 3

The variation of $\left(\frac{V}{\varphi_0}\right)_{y=-d}(n)$ with η .

different values of n are very little dependent on ρ as the deviation is quite low.

Now, from equation (18) we find

$$\left(\frac{d\psi_{-d}}{dn}\right) = -e^{3d/R} \frac{2d^2(I\omega^2 - \tau)(I\omega^2 + \tau)}{\pi L^2 a^3 \eta^2 \left[\omega^2 + \frac{d^2(I\omega^2 - \tau)^2}{\pi^2 L^2 a^3 \eta^2} + \frac{18d^2\omega^2}{R^2} + \frac{6d\omega^2}{R} \right]^{3/2}} \quad (19)$$

and

$$\left(\frac{d\psi_{-d}}{dn}\right)_{n=0} = e^{3d/R} \frac{4\pi^2 L \eta a^3}{(b-a)\tau} \quad (20)$$

or

$$\eta = e^{-3d/R} \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{b-a}{L} \cdot \frac{\tau}{a^3} \left(\frac{d\psi_{-d}}{dn}\right)_{n=0},$$

a result which is independent of I .

From equation (16) it may be noted that $\psi_{-d} \rightarrow 0$ at zero frequency of the outer cylinder, while from equation (26), $[(d\psi_{-d})/dn]_{n=0}$ has a definite value. The value of $[(d\psi_{-d})/dn]_{n=0}$ could be determined in two ways; first, it may

unity, at a value of n almost exactly equal to the frequency n_0 of oscillation of the inner cylinder of the torsion wire (defined by γ'). As the viscosity decreases the peak value of ψ_{-d} decreases and approaches to be equal to 0.5 for liquids of viscosity $1/16$.

Examples of the variation of the theoretical $[(V-d)/\varphi_0, n]$ with n for the same range of viscosities mentioned above is given in Figure 3. With liquids of low viscosity the peak is sharp; as the viscosity increases it is broadened. This is because for all values of $n > n_0$ there is a decrease in ψ_{-d} with increase of n , which is rapid at low viscosity and slight at high viscosity.

Using various values of ρ ranging from 0.75 to 1.5 g/ml while keeping the other parameters constant, the results of numerical calculations show that the values of ψ_{-d}

evaluated as the slope of the tangent to the (ψ_{-d}, n) -curve at the origin (Figure 4). This is a less accurate method. The experimental data may be plotted as a graph of $\psi_{-d}'n$ versus n . In this graph, example of which is shown in Figure 5, $(d\psi_{-d}/dn)_{n=0}$ is obtained by extrapolation of the curves at zero frequency. This procedure still does not yield very great precision, but the average of the results obtained by both methods should be closer to the facts than those of one method alone.

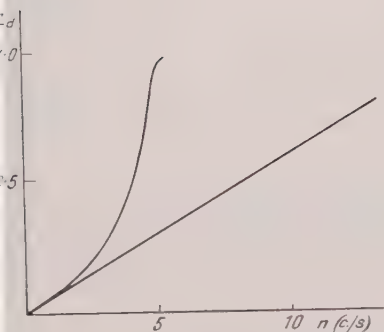


Figure 4

The variation of $\psi_{-d}'(n)$ for paraffin oil.

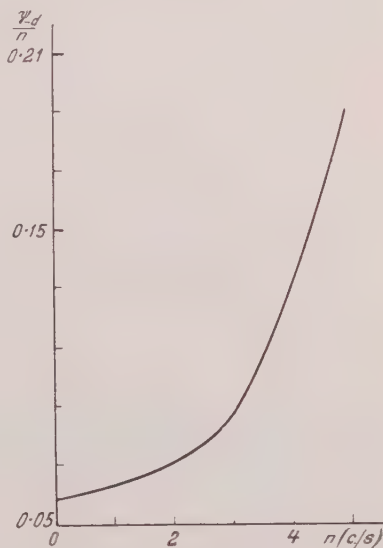


Figure 5

The variation of $\left(\frac{\psi_{-d}}{n}\right)(n)$ for paraffin oil.

Condition of Resonance

If we vary the frequency of the outer cylinder, at a certain frequency there will be resonance between the liquid and the inner cylinder. The condition of resonance is $d\psi_{-d}/dn = 0$.

Therefore, it follows from equation (25) that,

$$I \omega_r^2 - \tau = 0 \quad \text{or} \quad n_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\tau}{I}} = n_0,$$

i.e. resonance occurs at a certain frequency n , almost exactly equal to the frequency n_0 of free oscillation of the inner cylinder and the torsion wire.

Experimental Verification

OLDROYD, STRAUBRIDGE, and TOMS have carried out recently precise measurements on liquid paraffin B. P. of density 0.877 g/ml and viscosity 7 poises at 25°C, and their results agree well with either our equation (16) (18) [see Figure 1] for all values of θ_0/φ_0 , of n sufficiently large up to 250. The agreement suggests that our theory may be regarded as a satisfactory description of the facts for the nonelastic fluids and justifies as well the neglect of the end effect. Also, the values of η calculated from (24) using different values of $(d\psi_{-d}/dn)_{n \rightarrow 0}$, which indicates the limitation in our proposed theory.

Table

$\left(\frac{d\psi}{dn}\right)_{n \rightarrow 0}$			η in g/cm/s at 25° C		Per cent deviation
Slope of $\lg t$	Extrapolation	Mean	Calculated	From tables	
0.061	0.059	0.060	1.756	1.76	0.23%

Acknowledgment

The first author would like to express his thanks and gratitude for the extreme kindness, encouragement and advice given to him by Prof. H. T. FLINT during his stay in England.

Also the discussions with Prof. M. A. EL-SHERBINI are greatly acknowledged.

Zusammenfassung

Die Arbeit gibt eine theoretische Behandlung der periodischen Bewegung einer Flüssigkeit in der Lücke zwischen zwei koaxialen Zylindern wieder. Ist der innere Zylinder an einem Torsionsdraht aufgehängt, wobei der äussere Zylinder eine erzwungene Schwingung ausführt, wird eine Berechnung der uniformen Schwingung des inneren Zylinders möglich. Die experimentellen Daten sind gut mit der Theorie vereinbar. Die Kurven, welche die Abhängigkeit von θ_0/φ_0 und Γ_{-d}'/φ_0 von der Schwingungszahl darstellen, sind für verschiedene Werte der Konstanten der Flüssigkeit und des Apparates gezeichnet, wobei θ_0 die Schwingungsamplitude des inneren Zylinders, φ_0 diejenige des äusseren Zylinders und Γ_{-d}' die Geschwindigkeit der Flüssigkeit in der Nähe der krummen Oberfläche des inneren Zylinders bedeutet. Im weiteren wird der Einfluss der Dichte diskutiert; schliesslich werden die Resonanzbedingungen zwischen der Flüssigkeit und dem inneren Zylinder aufgestellt.

(Received: October 31, 1953.)

Untersuchungen über Elektronenströmungen

Von JOHANNES MÜLLER, Berlin

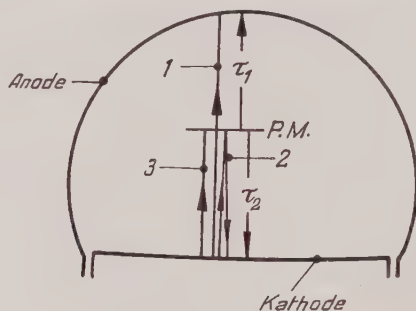
II. Teil¹⁾

II. Strömungen mit Anfangssteuerung

Es sollen ausser m Einzelströmungen, wie zu Beginn des Abschnitts I, noch zusätzlich eine Strömung mit schmalen konstantem Spektrum, charakterisiert durch $c = di/dU_e$, bestehen, deren Potentialverlauf längs der Strömung ein Minimum aufweist. Elektronen mit Geschwindigkeiten unterhalb einer gewissen kritischen Geschwindigkeit werden dann in der Nähe des Potentialminimums umkehren. Da die statische Feldstärke im Potentialminimum Null ist, besitzen die kritischen Elektronen eine unendlich lange Laufzeit. Die auch nur infinitesimal hinsichtlich der Anfangsgeschwindigkeit verschiedenen anderen Elektronen zeigen derartig unterschiedliche Laufzeiten, dass auch bei dem schmalen Spektrum kein einheitlicher Laufzeitwinkel existiert. Um zu einwandfreien mathematischen Ansätzen zu gelangen, wird im Potentialminimum eine kleine statische negative Hilfsladung hinzugefügt. Die Feldstärke im Potentialminimum wird dann nicht Null, und die Laufzeiten bleiben endlich, so dass jeder Gruppe von Elektronen, den weiterlaufenden und den umkehrenden, innerhalb des schmalen Spektrums definierte Laufzeiten zugeordnet werden können. Die räumliche Lage des Potentialminimums bleibt dabei unverändert. Es werden in Zusammenhang mit der Zusatzströmung drei Strömungen bezeichnet (Figur 3). Strömung 1 betrifft die weiterlaufenden, Strömung 2 die umkehrenden Elektronen. Die Laufzeiten, gerechnet vom Potentialminimum bis zum Ende dieser Strömungen, betragen τ_1 und τ_2 . Strömung 3 endet im Raum im Potentialminimum mit Laufzeit τ_2 . Sie dient dazu, die Wechselvoltgeschwindigkeit zu ermitteln, die am Potentialminimum die Stromaufteilung bestimmt. Angenommen, es würde keine Stromaufteilung zustande kommen, so ist der Einfluss der Zusatzströmung auf die Gesamtvorgänge – wegen der geringen Breite des Spektrums, das von der Ordnung der längs Strömung 3 auftretenden Wechselvoltgeschwindigkeit ist – zu vernachlässigen. Lässt man die Stromaufteilung zustande kommen, so entsteht durch den beispielsweise vermehrten Konvektionsstrom bei Strömung 1 und den um den gleichen Wert verminderten Konvektionsstrom bei Strömung 2 eine Wirkung von anderer Größenordnung. Die beiden Konvektionswechselströme beginnen am Poten-

¹⁾ Erster Teil der Arbeit siehe ZAMP 5, Fasc. 3, 203 (1954).

tialminimum. Die Wirkung ist aber die gleiche, wenn sie um die Zeit τ_2 früher am Anfang der Strömungen 1 und 2 beginnen, da sie sich auf dieser Wegstreue kompensieren. Drei von den m Einzelströmungen werden abgezweigt und gehen den gleichen Weg wie den bezeichneten Strömungen 1, 2 und 3 gegenüber. Der Zusammenhang zwischen den End- und Anfangsmodulationen der m Strömungen wird in gleicher Weise wie in I durch die Matrix \mathfrak{A} geregelt (15). Die Koeffizienten sind jedoch nicht identisch, sondern verstehen sich hier mit Rücksicht auf die Wirkung durch die bei der Stromaufteilungssteuerung entstehenden Konvektionswechselströme.



Figur 3

Die drei Elektronenwege einer Stromaufteilungssteuerung.

tionswechselströme längs Strömung 1 und 2. Sei $\mathfrak{B}^{(3)}$ die Wechselvoltgeschwindigkeit am Ende von 3, so ist für die Stromaufteilung die reine Feldmodulation längs 3, das heisst $\mathfrak{B}^{(3)} - \mathfrak{B}_3 e^{-j\omega\tau_2}$ verantwortlich. Damit betragen die Konvektionswechselströme, direkt entstanden durch Stromaufteilungssteuerung, am Ende von 1 und 2:

$$\frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}^{(3)} - \mathfrak{B}_3 e^{-j\omega\tau_2}] e^{-j\omega\tau_1}; \quad -\frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}^{(3)} - \mathfrak{B}_3 e^{-j\omega\tau_2}] e^{-j\omega\tau_1}. \quad (12)$$

Diese Endströme zusammen mit den Endmodulationen der m Strömungen ergeben das Verhalten der Gesamtströmungen, das durch eine Matrix beschrieben wird:

$$\mathfrak{U}_g = E_{16}(c_1) E_{36}(-c_2) \mathfrak{A} + \mathfrak{D}_{16}(-c_{12}) + \mathfrak{D}_{36}(c_{22}), \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{di}{dU_e} e^{-j\omega\tau_1}; & c_{12} &= \frac{di}{dU_e} e^{-j\omega(\tau_1+\tau_2)}; \\ c_2 &= \frac{di}{dU_e} e^{-j\omega\tau_2}; & c_{22} &= \frac{di}{dU_e} e^{-j\omega 2\tau_2}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$E_{16}(c_1)$ bzw. $\mathfrak{D}_{16}(-c_{12})$ ist die in Zeile 1, Spalte 6, mit dem Element c_1 bzw. $-c_{12}$ erweiterte Einheitsmatrix bzw. Nullmatrix. Die Wechselvoltgeschwindi-

iten der abgezweigten Strömungen 1 und 2 betragen $\mathfrak{B}^{(1)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$. Die Endröme der Stromaufteilungssteuerung besitzen demgegenüber eine andere Wechselvoltgeschwindigkeit, da nur die Feldmodulation für die Stromaufteilungssteuerung wirksam ist, und zwar:

$$\mathfrak{B}^{(1)} = \mathfrak{B}_1 e^{-j\omega[\tau_1 + \tau_2]}; \quad \mathfrak{B}^{(2)} = \mathfrak{B}_2 e^{-j\omega 2\tau_2}. \quad (128)$$

Aus diesem Grund wird nicht mit \mathfrak{A}_g bei der Aufstellung der Wirkleistungsanz gerechnet. Die insgesamt abgegebene muss gleich der zugeführten Wirkleistung sein:

$$\left. \begin{aligned} & \operatorname{Re} \left[\sum_{v=1}^m \mathfrak{B}^{(v)} \mathfrak{Q}^{(v)*} + [\mathfrak{B}^{(1)} - \mathfrak{B}_1 e^{-j\omega[\tau_1 + \tau_2]}] \left[\frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}^{(3)} - \mathfrak{B}_3 e^{-j\omega\tau_2}] e^{-j\omega\tau_1} \right]^* \right. \\ & \quad \left. + [\mathfrak{B}^{(2)} - \mathfrak{B}_2 e^{-j\omega 2\tau_2}] \left[\frac{di}{dU_e} [\mathfrak{B}^{(3)} - \mathfrak{B}_3 e^{-j\omega\tau_2}] e^{-j\omega\tau_2} \right]^* \right] \\ & = \operatorname{Re} \sum_{v=1}^m \mathfrak{B}_v \mathfrak{Q}_v^* \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

Wird zu dem komplexen Wert der Leistung der konjugiert komplexe addiert, so lässt sich die doppelte Wirkleistung in folgende Matrixform bringen:

$$\left. \begin{aligned} & \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}^{(1)} & \mathfrak{B}^{(1)} & \dots \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E_{25}(c_1^*) & E_{45}(-c_2^*) & E_{61}(c_1) & E_{63}(-c_2) \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathfrak{B}^{(1)} \\ \mathfrak{Q}^{(1)} \\ \dots \end{vmatrix}^* \\ & \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}^{(1)} & \mathfrak{B}^{(1)} & \dots \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{D}_{25}(-c_{12}^*) + \mathfrak{D}_{45}(c_{22}^*) + \mathfrak{D}_{61}(-c_2^*) + \mathfrak{D}_{63}(c_2^*) \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{Q}_1 \\ \dots \end{vmatrix}^* \\ & \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{B}_1 & \dots \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{D}_{25}(-c_2) + \mathfrak{D}_{45}(c_2) + \mathfrak{D}_{61}(-c_{12}) + \mathfrak{D}_{63}(c_{22}) \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathfrak{B}^{(1)} \\ \mathfrak{Q}^{(1)} \\ \dots \end{vmatrix}^* \\ & \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{B}_1 & \dots \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{D}_{25}(c) + \mathfrak{D}_{45}(-c) + \mathfrak{D}_{61}(c) + \mathfrak{D}_{63}(-c) \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{Q}_1 \\ \dots \end{vmatrix}^* \\ & = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_1 & \mathfrak{B}_1 & \dots \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{Q}_1 \\ \dots \end{vmatrix}^* \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

Mittels (14b) und (17) werden die einreihigen Matrizen der Endmodulationen

eliminiert. Durch Anwendung von Matrizenalgebra erhält man:

$$\mathfrak{B}^{*'} \mathfrak{B} = E, \quad (13)$$

$$\mathfrak{B} = [E_{16}(c_1) E_{36}(-c_2) \mathfrak{U} + \mathfrak{D}_{16}(-c_{12}) + \mathfrak{D}_{36}(c_{22}) + \mathfrak{D}_{52}(-c_2) + \mathfrak{D}_{54}(-c_2)] \left\{ \begin{array}{l} \\ \times E_{16}(c) E_{36}(-c) = [\mathfrak{U}_g + \mathfrak{D}_{52}(-c_2) + \mathfrak{D}_{54}(c_2)] E_{16}(c) E_{36}(-c) . \end{array} \right\} \quad (13)$$

Die links von \mathfrak{U} stehenden erweiterten Einheitsmatrizen sowie die erweiterten Nullmatrizen in \mathfrak{B} bewirken nur in den ersten 6 Zeilen der \mathfrak{U} -Matrix eine Veränderung. Für die Anwendung wichtig ist die Multiplikation mit den rechts von \mathfrak{U} stehenden erweiterten Einheitsmatrizen. Sie bedeuten, dass Spalte 1 bzw. von \mathfrak{U} mit c bzw. $-c$ multipliziert wird und zur Spalte 6 von \mathfrak{U} addiert wird. Analog wie in I wird die \mathfrak{U} -Matrix mit Koeffizienten von zwei Strömungen an zwei Klemmenpaaren erweitert. Es werden nur die vier letzten Zeilen von \mathfrak{U} und \mathfrak{B}^* angeschrieben.

$$\begin{array}{l} \text{Zeile} \\ 2m+1 \\ 2m+2 \\ 2m+3 \\ 2m+4 \\ \text{von } \mathfrak{B} \end{array} \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{U}_{1\Omega_1} & \mathfrak{U}_{1\Omega_2} & \mathfrak{U}_{1\Omega_3} & \mathfrak{U}_{1\Omega_4} & \mathfrak{U}_{1\Omega_5} & \mathfrak{U}_{1\Omega_6} + c \mathfrak{U}_{1\Omega_1} - c \mathfrak{U}_{1\Omega_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{U}_{2\Omega_1} & \mathfrak{U}_{2\Omega_2} & \mathfrak{U}_{2\Omega_3} & \mathfrak{U}_{2\Omega_4} & \mathfrak{U}_{2\Omega_5} & \mathfrak{U}_{2\Omega_6} - c \mathfrak{U}_{2\Omega_1} - c \mathfrak{U}_{2\Omega_2} \end{array} \right. \left\| \begin{array}{cccccc} \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & -\mathfrak{U}_{1\Omega_1} & 1 & -\mathfrak{U}_{1\Omega_2} & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & -\mathfrak{U}_{2\Omega_1} & 0 & -\mathfrak{U}_{2\Omega_2} & 1 & 0 \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\begin{array}{l} \text{Zeile} \\ 2m+1 \\ 2m+2 \\ 2m+3 \\ 2m+4 \\ \text{von } \mathfrak{B}^* \end{array} \left\| \begin{array}{cccccc} \mathfrak{U}_{1\Omega_1} & \mathfrak{U}_{1\Omega_2} & \mathfrak{U}_{1\Omega_3} & \mathfrak{U}_{1\Omega_4} & \mathfrak{U}_{1\Omega_5} + c \mathfrak{U}_{1\Omega_1} - c \mathfrak{U}_{1\Omega_2} & \mathfrak{U}_{1\Omega_6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{U}_{2\Omega_1} & \mathfrak{U}_{2\Omega_2} & \mathfrak{U}_{2\Omega_3} & \mathfrak{U}_{2\Omega_4} & \mathfrak{U}_{2\Omega_5} + c \mathfrak{U}_{2\Omega_1} - c \mathfrak{U}_{2\Omega_2} & \mathfrak{U}_{2\Omega_6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right. \left\| \begin{array}{cccccc} \dots & 1 & -\mathfrak{U}_{1\Omega_1} & 0 & -\mathfrak{U}_{1\Omega_2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & -\mathfrak{U}_{2\Omega_1} & 1 & -\mathfrak{U}_{2\Omega_2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right. \quad (13)$$

Multiplikation verschiedener Zeilen muss wegen (131) Null ergeben. Zeile $2m+2$ von \mathfrak{B} \times Zeile $2m+3$ von \mathfrak{B}^* liefert die wechselseitigen Impedanzen für die Klemmenpaare 1 und 2:

$$\mathfrak{U}_{1\Omega_2} + \mathfrak{U}_{2\Omega_1}^* = \mathfrak{R}_{12} + \mathfrak{R}_{21}^* = \sum_{\nu=1}^m \left[\mathfrak{U}_{1\Omega_\nu} \mathfrak{U}_{2\Omega_\nu}^* + \mathfrak{U}_{1\Omega_\nu} \mathfrak{U}_{2\Omega_\nu}^* \right] \left\{ \begin{array}{l} \\ + c \mathfrak{U}_{1\Omega_2} [\mathfrak{U}_{2\Omega_1}^* - \mathfrak{U}_{2\Omega_2}^*] + c [\mathfrak{U}_{1\Omega_1} - \mathfrak{U}_{1\Omega_2}] \mathfrak{U}_{2\Omega_3}^* . \end{array} \right. \quad (13)$$

$c = di/dU_e = 0$ (keine Stromaufteilungssteuerung ergibt (30), ebenso wenn das Potentialminimum an den Anfang von 1 und 2 rückt ($\tau_2 = 0$, $\mathfrak{U}_{1\Omega_3} = \mathfrak{U}_{1\Omega_2} = 0$)). Die quadratische Form der Impedanzen ist auch in den durch Stromaufteilungssteuerung bewirkten Termen so aufgebaut, dass nur Koeffizienten, die die

steuerung selbst betreffen, vorkommen. Wandert das Potentialminimum auf die Anode ($\tau_1 \neq 0$), so wird $u_{v_3} = u_{v_1}$ und nach (44a) $u_{v_2} - u_{v_1} = u_{v_{II}} e^{-j\omega\tau_2}$. Bei ϱ_{II} -Modulation längs 3 oder 1 in umgekehrter Richtung wie ϱ_1 -Modulation. Bei Übergang zum Leitwertersatzbild (u, R ersetzt durch $\mathfrak{J}, \mathfrak{S}$) und Benutzung von (44b) folgt für den Wirkleitwert durch Stromaufteilung bei verschwindender Raumladung aus (135):

$$S_{11} = \operatorname{Re} c \mathfrak{J}_{\varrho_{II}}^2. \quad (135a)$$

In den Gliedern mit c in (135) fehlen Koeffizienten durch \mathfrak{B} -Modulation. Die abgezweigten drei Strömungen können gleichstromlos sein, das heisst, wieder entfernt werden. Bemerkenswert sind die Koeffizienten u_{1v_3} und u_{2v_3} . Bei ihnen endet ein Konvektionswechselstrom im Raum am Potentialminimum. In einer anderen Darstellung können derartige Koeffizienten vermieden werden. Zu diesem Zweck werden die Koeffizienten in (135) ersetzt durch die Koeffizienten, bei denen die Stromaufteilungssteuerung unwirksam ist und die mit denen von I identisch sind. Hier in II erhalten sie den Index 0. Sei \mathfrak{X} eine steuernde Anfangsmodulation, \mathfrak{V} eine gesteuerte Modulation und $\mathfrak{B}_{3\mathfrak{X}}$ der Koeffizient, wie er bei voller Rückwirkung $c \neq 0$ für den Endpunkt von 3 und damit für die dabei auftretende Stromaufteilungssteuerung massgebend ist, so gilt:

$$\mathfrak{V}_{\mathfrak{X}} = \mathfrak{V}_{0\mathfrak{X}} + c \mathfrak{B}_{3\mathfrak{X}} [\mathfrak{V}_{0v_I} - \mathfrak{V}_{0v_{II}}] = \mathfrak{V}_{0\mathfrak{X}} + c \mathfrak{B}_{3\mathfrak{X}} e^{j\omega\tau_2} [\mathfrak{V}_{0v_1} - \mathfrak{V}_{0v_2}]. \quad (136)$$

\mathfrak{V}_{0v_I} bzw. $\mathfrak{V}_{0v_{II}}$ stellen die Koeffizienten dar, die durch eine ϱ -Modulation, beginnend am Potentialminimum, das heisst im Teilstück 2 der Strömungen 1 bzw. 2 zustande kommen. Da die Teilstücke 1 der beiden Strömungen identisch sind, so folgt die weitere Umformung in (136) unter Benutzung von (44a) ($\tau_1 = \tau_2 = \tau_2$). \mathfrak{V}_{0v_1} bzw. \mathfrak{V}_{0v_2} beziehen sich auf eine am Anfang der Strömungen 1 bzw. 2 beginnende ϱ -Modulation. Wird (136) auf die End- \mathfrak{B} -Modulation in 3 angewendet und nach $\mathfrak{B}_{3\mathfrak{X}}$ aufgelöst, so folgt:

$$\mathfrak{B}_{3\mathfrak{X}} = \frac{\mathfrak{B}_{30\mathfrak{X}}}{1 + c_2^* [\mathfrak{B}_{30v_2} - \mathfrak{B}_{30v_1}]}. \quad (137)$$

(137) in (136) eingesetzt, $\mathfrak{V} = u_{\mathfrak{X}}$ gewählt und $c [u_{\mathfrak{X}v_1} - u_{\mathfrak{X}v_2}]$ gebildet, ergibt:

$$u_{\mathfrak{X}} = u_{\mathfrak{X}0\mathfrak{X}} + \tilde{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{X}} \mathfrak{B}_{30\mathfrak{X}}; \quad \tilde{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{X}} = \frac{c_2^* [u_{\mathfrak{X}0v_1} - u_{\mathfrak{X}0v_2}]}{1 - c_2^* [\mathfrak{B}_{30v_2} - \mathfrak{B}_{30v_1}]}. \quad (138)$$

$$c [u_{\mathfrak{X}v_1} - u_{\mathfrak{X}v_2}] = \tilde{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{X}} e^{-j\omega\tau_2}. \quad (139)$$

(138) und (139) in der rechten Seite von (135) eingesetzt, ergibt vier Glieder

mit Faktoren \mathfrak{F}_1 , \mathfrak{F}_2^* , \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2^* und ohne \mathfrak{F} , die der Reihe nach angeschrieben werden.

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=4}^m \left[\mathfrak{B}_{30\Omega_\nu} \mathfrak{B}_{30\mathfrak{B}_\nu}^* + \mathfrak{B}_{30\mathfrak{B}_\nu} \mathfrak{B}_{30\Omega_\nu}^* \right] + \mathfrak{B}_{30\Omega_3} e^{j\omega\tau_2} + \mathfrak{B}_{30\Omega_3}^* e^{-j\omega\tau_2} &= 0, \\ \sum_{\nu=4}^m \left[\mathfrak{U}_{20\mathfrak{B}_\nu}^* \mathfrak{B}_{30\Omega_\nu} + \mathfrak{U}_{20\Omega_\nu}^* \mathfrak{B}_{30\mathfrak{B}_\nu} \right] + \mathfrak{U}_{20\Omega_3}^* e^{-j\omega\tau_2} &= \mathfrak{B}_{30\mathfrak{F}_2}, \\ \sum_{\nu=4}^m \left[\mathfrak{U}_{10\mathfrak{B}_\nu} \mathfrak{B}_{30\Omega_\nu}^* + \mathfrak{U}_{10\Omega_\nu} \mathfrak{B}_{30\mathfrak{B}_\nu}^* \right] + \mathfrak{U}_{10\Omega_3} e^{j\omega\tau_2} &= \mathfrak{B}_{30\mathfrak{F}_1}^*, \\ \sum_{\nu=4}^m \left[\mathfrak{U}_{10\Omega_\nu} \mathfrak{U}_{20\mathfrak{B}_\nu}^* + \mathfrak{U}_{10\mathfrak{B}_\nu} \mathfrak{U}_{20\Omega_\nu}^* \right] &= \mathfrak{U}_{10\mathfrak{F}_2} + \mathfrak{U}_{20\mathfrak{F}_1}^*. \end{aligned}$$

Wenn beachtet wird, dass die ersten drei Strömungen gleichstromlos sind, vorkommenden Koeffizienten mit Steuerung durch \mathfrak{B}_1 , \mathfrak{B}_2 , \mathfrak{B}_3 verschwinden bis auf $\mathfrak{B}_{3\mathfrak{F}_3} = e^{-j\omega\tau_2}$ ergeben sich die rechten Seiten von (140) bis (143) (26) für $\mu = \sigma = 30$, aus (33) für $\mu = 30$, Index 1 durch 2 ersetzt, aus (33) für $\mu = 30$ und aus (30). Damit nimmt (135) folgende Form an:

$$\mathfrak{U}_{1\mathfrak{F}_2} + \mathfrak{U}_{2\mathfrak{F}_1}^* = \mathfrak{U}_{10\mathfrak{F}_2} + \mathfrak{F}_1 \mathfrak{B}_{30\mathfrak{F}_2} + \mathfrak{U}_{20\mathfrak{F}_1}^* + \mathfrak{F}_2^* \mathfrak{B}_{30\mathfrak{F}_1}^*.$$

Dieses Ergebnis, dessen Zustandekommen aus den Beziehungen von I hier gezeigt ist, kann unmittelbar aus (138) gewonnen werden. \mathfrak{F}_1 bzw. \mathfrak{F}_2 enthält keine Koeffizienten, die sich auf im Raum endende Strömungen beziehen. $\mathfrak{B}_{30\mathfrak{F}_1}$ und $\mathfrak{B}_{30\mathfrak{F}_2}$ stellen jedoch noch solche Koeffizienten dar. In (135) endet aber kein Konvektionswechselstrom im Raum wie in (135), sondern wird nur die Wechselvoltgeschwindigkeit, die ein Elektron längs des Weges am Endpunkt von 3 erhält, benötigt. Wegen des Aufbaus der Endumformung von (136) kann der Wechselvoltgeschwindigkeit $\mathfrak{B}_{3\mathfrak{F}_2} e^{j\omega\tau_2}$ eine physikalische Bedeutung gegeben werden. Vermindert man die statische kritische Anfangsvoltgeschwindigkeit um $\mathfrak{B}_{3\mathfrak{F}_2} e^{j\omega\tau_2}$, so wird dadurch die Strömung mit dem Spektrum am Anfang in zwei Teile geteilt, die die Stromaufteilung nach Zeit τ_2 am Potentialminimum bestimmen. Damit ist jeder Koeffizient, der im Raum endenden Strömung vermieden. Für die Anwendungen wird trotzdem (135) benutzt, da hieraus ein unmittelbarer Zusammenhang der I mit den Emissionsschwankungen gefunden wird.

Die zwei zusätzlichen Ausdrücke in (135) stellen den Einfluss nur einer Strömung auf die Stromaufteilung dar. Wenn wie bei Anordnungen, bei denen alle Elektroden emittieren, in beiden Richtungen eine Stromaufteilung stattfindet und wenn weitere Stromfäden mit Potentialminimum

den sind, tritt an die Stelle der einzelnen Ausdrücke eine Summe von der Form:

$$\sum_{\sigma=1}^{\lambda} \left(\frac{di}{dU_e} \right)_{\sigma} \left[u_{1_{\varrho_{\sigma 3}}} [u_{2_{\varrho_{\sigma 1}}}^* - u_{2_{\varrho_{\sigma 2}}}^*] + [u_{1_{\varrho_{\sigma 1}}} - u_{1_{\varrho_{\sigma 2}}}] u_{2_{\varrho_{\sigma 3}}}^* \right]. \quad [145]$$

Index σ umfasst je drei Strömungen. λ ist die Gesamtzahl der Stromaufteilungsströmungen.

Unter Benutzung der Differentialbeziehung (54) erhält man für die wechselstetigen Impedanzen aus (135) bei einem kontinuierlichen Geschwindigkeitspektrum in zunächst einem Stromfaden mit einer Stromaufteilungssteuerung:

$$Z_{21} + \Re_{21}^* - \int_{U_u}^{U_o} \frac{di_v}{dU_v} d[u_{1_{\varrho_v}} u_{2_{\varrho_v}}^*] - c_k [u_{1_{\varrho_3}} [u_{2_{\varrho_1}}^* - u_{2_{\varrho_2}}^*] + [u_{1_{\varrho_1}} - u_{1_{\varrho_2}}] u_{2_{\varrho_3}}^*]. \quad (146)$$

Die Integration zerfällt in zwei Teile, da sich die Koeffizienten bei der kritischen Langsamkeitsspannung U_k sprunghaft ändern. Durch partielle Integration folgt:

$$\left. \begin{aligned} Z_{21} + \Re_{21}^* = & \left[\frac{di}{dU_e} \right]_o u_{1_{\varrho_o}} u_{2_{\varrho_o}}^* - \left[\frac{di}{dU_e} \right]_k [u_{1_{\varrho_1}} u_{2_{\varrho_1}}^* - u_{1_{\varrho_2}} u_{2_{\varrho_2}}^*] \\ & - \left[\frac{di}{dU_e} \right]_u u_{1_{\varrho_u}} u_{2_{\varrho_u}}^* - \int_{U_u}^{U_o} \frac{d^2 i_v}{dU_v^2} dU_v u_{1_{\varrho_v}} u_{2_{\varrho_v}}^* \\ & + \left[\frac{di}{dU_e} \right]_k [u_{1_{\varrho_3}} [u_{2_{\varrho_1}}^* - u_{2_{\varrho_2}}^*] + [u_{1_{\varrho_1}} - u_{1_{\varrho_2}}] u_{2_{\varrho_3}}^*]. \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

Die Zusammenfassung der Glieder mit $c_k = [di/dU_e]_k$ unter Benutzung von (146a) ergibt einen Ausdruck, dessen Koeffizienten nur von ϱ -Modulationen, beginnend am Potentialminimum, abhängen. Aus (147) wird:

$$\left. \begin{aligned} Z_{21} + \Re_{21}^* = & c_o u_{1_{\varrho_o}} u_{2_{\varrho_o}}^* - c_k [u_{1_{\varrho_I}} u_{2_{\varrho_I}}^* - u_{1_{\varrho_{II}}} u_{2_{\varrho_{II}}}^*] - c_u u_{1_{\varrho_u}} u_{2_{\varrho_u}}^* \\ & - \int_{U_u}^{U_o} \frac{d^2 i_v}{dU_v^2} dU_v u_{1_{\varrho_v}} u_{2_{\varrho_v}}^*. \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

$u_{1_{\varrho_I}}$ bzw. $u_{1_{\varrho_{II}}}$ sind die am Klemmenpaar 1 induzierten Leerlaufspannungen, herrührend von einer ϱ -Modulation, beginnend im Potentialminimum in Richtung Endpunkt Strömung 1 bzw. 2. Bei einem konstanten Spektrum ($c_u = c_k$) entfällt das Integral wegen $d^2 i_v / dU_v^2 = 0$. Bei einem exponentiellen Spektrum entfällt das Glied mit c_o wegen $c_o = 0$ für $U_o = \infty$ und das Glied mit c_u

wegen $\mathfrak{U}_{1\varrho_u} = \mathfrak{U}_{2\varrho_u} = 0$, da die Elektronen mit $U_u = 0$ keine Wegstrecke innerhalb des elektromagnetischen Hohlraums zurücklegen. Es verbleibt wegen

$$\frac{d^2 i_\nu}{dU_\nu^2} = -\frac{e}{kT} \cdot \frac{di_\nu}{dU_\nu}:$$

$$\Re_{12} + \Re_{21}^* = c_k \left[\mathfrak{U}_{1\varrho_{II}} \mathfrak{U}_{2\varrho_{II}}^* - \mathfrak{U}_{1\varrho_{II}} \mathfrak{U}_{2\varrho_{II}}^* \right] + \int_0^\infty \frac{e di_\nu}{kT} \mathfrak{U}_{1\varrho_\nu} \mathfrak{U}_{2\varrho_\nu}^*.$$

Wenn an beiden Enden des Stromfadens ein Exponentialspektrum (unterschieden durch Index 1 und 2) emittiert wird und da wegen der gleichen geometrischen Bahn die Verknüpfungen $\mathfrak{U}_{\kappa\varrho_{II_1}} = \mathfrak{U}_{\kappa\varrho_{II_2}}$ und $\mathfrak{U}_{\kappa\varrho_{II_1}} = \mathfrak{U}_{\kappa\varrho_{II_2}}$ bestehen, folgt mit (145):

$$\Re_{12} + \Re_{21}^* = -[c_{k_1} - c_{k_2}] \left[\mathfrak{U}_{1\varrho_{II_1}} \mathfrak{U}_{2\varrho_{II_1}}^* - \mathfrak{U}_{1\varrho_{II_1}} \mathfrak{U}_{2\varrho_{II_1}}^* \right] - \sum_{\sigma=1}^2 \int_0^\infty \left[\frac{e di_\nu}{kT} \mathfrak{U}_{1\varrho_\nu} \mathfrak{U}_{2\varrho_\nu}^* \right]_\sigma.$$

Dabei ist:

$$c_{k_1} = \frac{2e i_1}{kT_1}, \quad c_{k_2} = \frac{2e i_2}{kT_2}.$$

i_1 und i_2 sind die Gleichstromanteile, die das Potentialminimum in den beiden Richtungen überschreiten. Für einen Stromfaden im thermischen Gleichgewicht ($T_1 = T_2 = T$) sind die beiden Ströme i_1, i_2 gleich, da dann in bezug auf den mittleren Energietransport keine Richtung ausgezeichnet ist. Verschiedene Austrittsarbeiten an den beiden Enden des Stromfadens sind dabei mit berücksichtigt. Es entfällt dann in (150) das Glied mit $[c_{k_1} - c_{k_2}]$. Wird (150) mit $\mathfrak{U}_{1\varrho_\nu} \mathfrak{U}_{2\varrho_\nu}^*$ multipliziert und für q Stromfäden, wobei in jedem einzelnen die Bedingungen für ein thermisches Gleichgewicht erfüllt sind, angeschrieben, so folgt:

$$2kT [\Re_{12} + \Re_{21}^*] = \sum_{\sigma=1}^{2q} \int_0^\infty \left[2e di_\nu \mathfrak{U}_{1\varrho_\nu} \mathfrak{U}_{2\varrho_\nu}^* \right]_\sigma.$$

Für den Wirkwiderstand an einem Klemmenpaar ergibt sich:

$$4kTR_{11} = \sum_{\sigma=1}^{2q} \int_0^\infty \left[2e di_\nu \mathfrak{U}_{1\varrho_\nu} \mathfrak{U}_{1\varrho_\nu}^* \right]_\sigma.$$

Die rechte Seite von (153) stellt nichts anderes als das Schwankungsquadrat der am Klemmenpaar 1 durch die Emissionsschwankungen entstehenden Potentialdifferenz dar.

Unabhängig von einem speziellen Verlauf der Koeffizienten in Abhängigkeit von Anfangsgeschwindigkeit, Frequenz usw. ergibt sich eine derartige Beziehung

ng nur bei einem Exponentialspektrum. Der Wirkwiderstand ist auch stets positiv, wie dies mit Rücksicht auf den zweiten Wärmehauptsatz bei einem Widerstand mit inneren Schwankungsvorgängen notwendig ist. Die mittels thermodynamischer Überlegungen von NYQUIST¹⁾ aufgestellte Rauschformel für einen Widerstand ist in (153) unter folgenden Voraussetzungen abgeleitet: verschwindende Quanteneinflüsse, für hohe Frequenzen im Sinne grosser Laufzeitwinkel, mit Berücksichtigung der Raumladung im elektromagnetischen Feld und relativistischer Massenveränderlichkeit, jedoch nur bei reiner Längsausbreitung. Zusammenhänge zwischen korpuskularen und thermischen Schwankungen bei beliebiger Steuerung und Raumladung im Hochvakuum jedoch bei niedrigen Frequenzen im Sinne verschwindender Laufzeitwinkel sind von SCHOTTKY²⁾ und SPENKE gefunden worden. Eine direkte Ableitung der Nyquistformel für metallische Leiter wurde von BAKKER³⁾ bei niedrigen Frequenzen und von SPENKE⁴⁾ auch bei hohen Laufzeitwinkeln angegeben.

Zur Diskussion der Eigenschaften von thermisch nicht im Gleichgewicht befindlichen Anordnungen werde auf den Fall eines Stromfadens mit einem Exponentialspektrum und einer Stromaufteilungssteuerung zurückgegangen. Wird (149) durch Vertauschung von \mathfrak{U} mit \mathfrak{J} , \mathfrak{R} mit \mathfrak{S} auf das Leitwertersatzbild bezogen und umgestellt, so folgt:

$$2 e di_v \mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{U}_v}} \mathfrak{J}_{2_{\mathfrak{U}_v}}^* - 2 e i \left[\mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{U}_I}} \mathfrak{J}_{2_{\mathfrak{U}_I}}^* - \mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{U}_{II}}} \mathfrak{J}_{2_{\mathfrak{U}_{II}}}^* \right] + 2 k T [\mathfrak{S}_{12} + \mathfrak{S}_{21}^*] \quad (154)$$

und für ein Klemmenpaar:

$$\int_0^{\infty} 2 e di_v \mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{U}_v}} \mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{U}_v}}^* - 2 e i \left[\mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{U}_I}} \mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{U}_I}}^* - \mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{U}_{II}}} \mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{U}_{II}}}^* \right] + 4 k T S_{11} . \quad (155)$$

Rückt das Potentialminimum auf die Kathode (Koeffizienten mit Steuerung durch \mathfrak{U}_{II} werden Null), so gehen (154) und (155) über in (116) und (115), dann $\mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{U}_I}}$ identisch mit $\mathfrak{J}_{1_{\mathfrak{U}_u}}$ ist. Die Folgerungen, die sich im Anschluss an die Formel (120) für ein Emissionsgebiet ergeben haben und die durch (121) und (122) dargestellt werden, können nunmehr auf den Fall der Anwesenheit von Potentialminima erweitert werden. Die Wirkung der Emissionsschwankungen an der Kathode auf die Schwankungen des Konvektionsstromes der auf den Flächen der Begrenzung des Hohlraums auftreffenden Elektronen ist genau so gross, wie wenn in den Potentialminima jedes einzelnen Stromfadens Schwan-

¹⁾ H. NYQUIST, Phys. Rev. **32**, 110 (1928).

²⁾ W. SCHOTTKY, Z. Phys. **104**, 248 (1937); W. SCHOTTKY und E. SPENKE, Naturwissenschaften **447** (1937).

³⁾ C. J. BAKKER, Physica **6**, 262 (1939).

⁴⁾ E. SPENKE, Wiss. Veröff. Siemens-Werke **18**, 54 (1939).

kungsströme, die dem übergehenden Gleichstrom der betreffenden Strom entsprechen, beginnen würden und sowohl in Richtung Anode $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_I}$ als auch in Richtung Kathode $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_{II}}$ in den Strömungen mit den kleinsten Geschwindigkeiten am Potentialminimum vorhanden wären.

Führt man eine wirksame Rauschtemperatur T_w des Wirkleitwerts S ein und ersetzt die linke Seite von (155) durch $4 k T_w S_{II}$, so folgt bei positiver S_{II} : $T_w \cong T$ für $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_I} \cong \mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_{II}}$. Rückt das Potentialminimum auf die Anode (Koeffizienten mit Steuerung durch \mathfrak{Q}_I werden Null), so ist S_{II} für beliebige Frequenzen stets positiv.

Bei der Bestimmung der Schwankungen für Frequenz Null benötigt man nur die ersten beiden Glieder der Entwicklung der Koeffizienten $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_I}$ und $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_{II}}$ nach der Frequenz. Werden die Wirkungen des im Potentialminimum beginnenden Konvektionswechselstromes \mathfrak{Q}_I und die am Anfang von \mathfrak{Q}_I zur Erzielung der Kontinuität von \mathfrak{Q}_I anzubringende Wechselladung \mathfrak{Q}_I auf die Bildung der Koeffizienten $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_I}$ getrennt angesetzt, so beginnen beide Entwicklungen mit einem frequenzunabhängigen Glied.

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_I} \mathfrak{Q}_I = [a_I + j \omega b_I] \mathfrak{Q}_I + [c + j \omega d] \mathfrak{Q}_I = \left[a_I + j \omega b_I + \frac{c}{j \omega} + d \right] \mathfrak{Q}_I.$$

Der in (155) benötigte Ausdruck auf der rechten Seite nimmt dann bei Frequenz Null seines frequenzunabhängigen Anfangsgliedes die Form an:

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_I} \mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_I}^* - \mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_{II}} \mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_{II}}^* = a_I^2 - a_{II}^2 + 2 d [a_I - a_{II}] - 2 c [b_I - b_{II}].$$

Hierbei sind nur a_I , a_{II} und c rein statisch bestimmbare Koeffizienten. d sind für \mathfrak{Q}_I - oder \mathfrak{Q}_{II} -Anregung unverändert.

Die Untersuchungen bei Anwesenheit von Potentialminima wurden unter der Annahme gemacht, dass sich in den Potentialminima kleine statische Ladungen befinden, um auf eindeutige Laufzeitwinkel für die Stromaufteilungssteuerungen zu kommen. Es wird nun das Verhalten der Koeffizienten $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_I}$ und $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_{II}}$ bei verschwindender Hilfsladung ermittelt. \mathfrak{Q}_I bzw. \mathfrak{Q}_{II} sind eingeprägte Konvektionswechselstromverteilungen, die am Potentialminimum mit einer Wechselladung

$$\mathfrak{Q}_I = \frac{\mathfrak{Q}_I}{j \omega} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{Q}_{II} = \frac{\mathfrak{Q}_{II}}{j \omega}$$

beginnen und in Richtung Anode bzw. Kathode längs der Strömung mit der kleinsten Geschwindigkeit Null im Potentialminimum wirken. Geht die Hilfsladung gegen Null, so geht die Laufzeit gegen Unendlich, und der Laufzeitwinkel bei endlicher Frequenz wird unbestimmt. Die Koeffizienten $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_I}$ und $\mathfrak{J}_{\mathfrak{Q}_{II}}$ werden damit phasenmässig unbestimmt. In den abgeleiteten Formeln

Geschwindigkeitsspektren kommen die Koeffizienten stets in Produkten $\mathfrak{V}_{1v_1} \mathfrak{V}_{2v_1}^*$ vor. In diesen Produkten entfällt die Phasenunbestimmtheit, und Produkte nehmen eindeutige Werte an. Die Ergebnisse bei Systemen im reinen Gleichgewicht werden von dem Grenzübergang überhaupt nicht berührt, da die Koeffizienten mit Steuerung durch \mathfrak{V}_1 und \mathfrak{V}_{II} ausserhalb der Integrale entfallen und innerhalb der Integrale in gleicher Form bei den Fluktuationsgrössen wie bei den Impedanzen vorkommen.

Aus der am Anfang der Arbeit aufgestellten Leistungsbilanz geht hervor, dass bei Längssteuerung in erster Näherung der Wirkleistungsumsatz sich nur mit der Wechselgrösse bezieht. Eine Veränderung der mittleren Voltgeschwindigkeiten der Strömungen wird leistungsmässig durch die Wechselvorgänge nicht gedeckt. Durch dieses Verhalten ist die Längssteuerung vor der Quersteuerung ausgezeichnet. Bei Vorhandensein von Quersteuerung kann bereits in erster Näherung ein Richteffekt der Voltgeschwindigkeiten auftreten, wobei elektromagnetischen Wechselfelder an der veränderten Gleichstromleistung beteiligt sind. Aus diesem Grund wurde die Behandlung der Längssteuerung vorgezogen.

Summary

The laws of conservation of energy and charge are used in a perturbation theory for longitudinal controlled streams of electrons. Space charge, the electromagnetic field and the relativistic change of mass are taken into account. The calculations in the classical field are found from a matrix form. Impedances of the streams are used. On terminals they are identical with the impedances of the electronic device. It is shown, how NYQUIST's noise formula can be derived from shot noise, for a system in thermal equilibrium with potential minimum in electron streams and high transit time angles. For a system not in thermal equilibrium some noise formulas are presented. A simplification of the calculation of the noise convection currents of the electrons coming at the electrodes can be made. When in all emission points the emission fluctuations are concentrated in the streams with maximal transit time the noise in the convection currents has the same value as the real noise. When a potential minimum is present, the transit time is important, which passes over the potential minimum. The noise of this transit must be concentrated in the streams with maximal transit time beginning at the potential minimum.

(Eingegangen: 26. Juni 1953.)

Bestimmung der Übergangsfunktion eines Regelkreises aus dessen Frequenzgang

Von HANSRUEDI BÜHLER, Zürich¹⁾

1. Einleitung

Bei der Untersuchung von Regelproblemen ist ausser der Frage nach der Stabilität auch oft der zeitliche Verlauf des Ausgleichsvorganges sehr wichtig, das heisst, es wird danach gefragt, wie rasch eine Störung ausreguliert wird. Wenn der Frequenzgang in Form einer Gleichung vorliegt, so kann durch Anwendung des Heavisideschen Entwicklungssatzes die Zeitfunktion bestimmt werden. Schon bei relativ einfachen Regulierungen wird dieses Verfahren jedoch mühsam, wenn eine Gleichung hohen Grades in p aufgelöst werden muss. Wird aber für ein Regelglied ein gemessener Frequenzgang zugrunde gelegt, so versagt diese Methode ganz.

Andererseits kann aber auch aus dem Real- oder Imaginärteil des Frequenzganges die Übergangsfunktion bestimmt werden, in Form eines Parameterintegrals. Im folgenden wird dieser Weg beschritten und eine Näherungslösung angegeben, welche die in [1]²⁾ angegebene Methode erweitert und für die praktische Durchführung in eine andere Form bringt.

Das hier beschriebene Näherungsverfahren ist in seiner Anwendung nicht nur auf die Regeltechnik beschränkt, sondern kann ebensogut zur Rücktransformation einer Bildfunktion der modifizierten Laplace-Transformation in den Originalbereich herbeigezogen werden.

2. Theoretische Grundlagen

Im folgenden wird unter der Laplace-Transformation die modifizierte Form auch Carson-Transformation genannt, betrachtet, das heisst

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1)$$

Die Umkehrformel lautet

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{F(p)}{p} e^{pt} dp. \quad (2)$$

Wir beschränken uns auf solche Bildfunktionen $F(p)$, die einem stabilen Verhalten entsprechen; das heisst, dass $F(p)$ keine Pole in der positiv reellen Halbebene aufweise. Im allgemeinen ist aber $F(0) \neq 0$, so dass der Integrand für $p = 0$ einen Pol besitzt. Dies lässt sich durch Abspalten von $F(0)$ vermeiden. Es ist bekanntlich

$$\lim_{p \rightarrow 0} F(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t), \quad (3)$$

insofern der Grenzwert rechts überhaupt existiert.

¹⁾ Maschinenfabrik Oerlikon, Studienbüro.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis auf Seite 421.

Andererseits ist für $t > 0$ [2]

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{j\infty}^{j\sim} \frac{e^{pt}}{p} dp = 1;$$

omit gilt, wenn man (3) in (2) einsetzt,

$$f(\infty) = \frac{1}{2\pi j} \int_{j\infty}^{j\sim} \frac{F(0)}{p} e^{pt} dp.$$

Subtraktion dieses Ausdruckes von Gleichung (2)

$$f(t) - f(\infty) = \frac{1}{2\pi j} \int_{j\infty}^{j\sim} \frac{F(p) - F(0)}{p} e^{pt} dp. \quad (4)$$

Der Integrand nimmt nun für $p = 0$ einen endlichen Wert an. Da längs der imaginären Achse zu integrieren ist, kann man $p = j\lambda$ setzen. Trennt man $F(j\lambda)$ auf in Real- und Imaginärteil

$$F(j\lambda) = U(\lambda) + jV(\lambda),$$

so erhält man mit $e^{j\lambda t} = \cos \lambda t + j \sin \lambda t$

$$f(t) - f(\infty) = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{U(\lambda) - F(0)}{\lambda} \sin \lambda t + \frac{V(\lambda)}{\lambda} \cos \lambda t \right] d\lambda \\ & - j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{U(\lambda) - F(0)}{\lambda} \cos \lambda t - \frac{V(\lambda)}{\lambda} \sin \lambda t \right] d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Es ist nun für alle praktisch in Frage kommenden Funktionen

$$F(-j\lambda) = U(\lambda) - jV(\lambda),$$

das heisst, $U(\lambda)$ ist eine gerade, $V(\lambda)$ eine ungerade Funktion. Es ist zu beachten, dass Gleichung (5) nur für $t > 0$ gilt. Für $t < 0$ muss die linke Seite dagegen Null sein, da die Störung ja erst zur Zeit $t = 0$ eintreten soll. Unter Berücksichtigung dieser beiden Eigenschaften erhält man schliesslich aus Gleichung (5) zwei neue Gleichungen

$$f(t) = F(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U(\lambda) - F(0)}{\lambda} \sin \lambda t d\lambda, \quad (6a)$$

$$f(t) = F(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{V(\lambda)}{\lambda} \cos \lambda t d\lambda. \quad (6b)$$

Man kann also entweder aus dem Real- oder dem Imaginärteil der Bildfunktion $F(j\lambda)$ den zeitlichen Verlauf der Originalfunktion berechnen.

Zur Berechnung des Integrals in den Gleichungen (6) wird nun ein Näherungsverfahren entwickelt. Wir setzen zur Abkürzung

$$u(\lambda) = \frac{U(\lambda) - F(0)}{\lambda}, \quad v(\lambda) = \frac{V(\lambda)}{\lambda}.$$

Es soll nun $u(\lambda)$ bzw. $v(\lambda)$ durch eine Summe von Hilfsfunktionen $\varphi_i(\lambda)$ approximiert werden

$$u(\lambda) = \sum_i \varphi_i(\lambda), \quad v(\lambda) = \sum_i \varphi_i(\lambda).$$

Die Funktionen $\varphi_i(\lambda)$ werden so gewählt, dass sich das Integral

$$I_s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi_i(\lambda) \sin \lambda t d\lambda \quad \text{bzw.} \quad I_c = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi_i(\lambda) \cos \lambda t d\lambda$$

geschlossen lösen lässt.

Zur Vereinfachung der Rechnung soll noch ein Hilfssatz abgeleitet werden. Es sei für

$$0 < \lambda \leq \lambda_1, \quad \varphi(\lambda) = 0; \quad \lambda_1 < \lambda < \infty, \quad \varphi(\lambda) = \psi(\lambda - \lambda_1),$$

somit wird

$$I_s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\lambda) \sin \lambda t d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\lambda - \lambda_1) \sin \lambda t d\lambda;$$

setzt man nun $\lambda - \lambda_1 = \lambda^*$ ein und lässt den Stern wieder weg, so folgt

$$I_s = \cos \lambda_1 t \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\lambda) \sin \lambda t d\lambda + \sin \lambda_1 t \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\lambda) \cos \lambda t d\lambda.$$

Gleichung (7) kann man als «Verschiebungssatz» bezeichnen.

Zur Abkürzung werden nun gesetzt

$$f_s(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\lambda) \sin \lambda t d\lambda, \quad f_c(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\lambda) \cos \lambda t d\lambda.$$

$f_s(t)$ und $f_c(t)$ lassen sich zu einem komplexen Ausdruck zusammenfassen und gemeinsam berechnen. Es ist











$$f_c(t) \pm j f_s(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\lambda) [\cos \lambda t \pm j \sin \lambda t] d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\lambda) e^{\pm j \lambda t} d\lambda.$$

Für einige Funktionen $\psi(\lambda)$ sind die Integralausdrücke in Gleichung (8) bestimmt worden und in Tabelle 1 zusammengestellt. Ähnliche Integrale wie Gleichung (9) treten bei der Fourier-Transformation und bei der Berechnung von Frequenzspektren mit Hilfe von Fourier-Integralen auf. Zwar gehen dort die Integrationsgrenzen meistens von $-\infty \dots \infty$. Für die Auswertung solcher Integrale siehe zum Beispiel WAGNER [3].

Somit lassen sich die Gleichungen (6) approximieren für den Realteil

$$f(t) \approx F(0) + \sum_i [f_{s_i}(t) \cos \lambda_{1_i} t + f_{c_i}(t) \sin \lambda_{1_i} t]. \quad (10)$$

Tabelle 1¹⁾

$\phi(\lambda)$	$f_c(t)$	$f_s(t)$
 $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \quad \phi(\lambda) = A$ $\lambda_0 < \lambda < \infty \quad \phi(\lambda) = 0$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{\sin \lambda_0 t}{\lambda_0 t}$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos \lambda_0 t}{\lambda_0 t}$
 $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \quad \phi(\lambda) = A \frac{\lambda}{\lambda_0}$ $\lambda_0 < \lambda < \infty \quad \phi(\lambda) = 0$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin \lambda_0 t}{\lambda_0 t} - \frac{1 - \cos \lambda_0 t}{(\lambda_0 t)^2} \right]$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin \lambda_0 t}{(\lambda_0 t)^2} - \frac{\cos \lambda_0 t}{\lambda_0 t} \right]$
 $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \quad \phi(\lambda) = A \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)$ $\lambda_0 < \lambda < \infty \quad \phi(\lambda) = 0$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos \lambda_0 t}{(\lambda_0 t)^2}$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\lambda_0 t} - \frac{\sin \lambda_0 t}{(\lambda_0 t)^2} \right]$
 $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \quad \phi(\lambda) = A \sin \frac{\pi \lambda}{2 \lambda_0}$ $\lambda_0 < \lambda < \infty \quad \phi(\lambda) = 0$	$A \lambda_0 \frac{4}{\pi} \frac{\pi - 2 \lambda_0 t \sin \lambda_0 t}{\pi^2 (2 \lambda_0 t)^2}$	$A \lambda_0 \frac{4}{\pi} \frac{2 \lambda_0 t \cos \lambda_0 t}{\pi^2 (2 \lambda_0 t)^2}$
 $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \quad \phi(\lambda) = A \cos \frac{\pi \lambda}{2 \lambda_0}$ $\lambda_0 < \lambda < \infty \quad \phi(\lambda) = 0$	$A \lambda_0 \frac{4}{\pi} \frac{\pi \cos \lambda_0 t}{\pi^2 (2 \lambda_0 t)^2}$	$A \lambda_0 \frac{4}{\pi} \frac{\pi \sin \lambda_0 t - 2 \lambda_0 t}{\pi^2 - (2 \lambda_0 t)^2}$
 $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \quad \phi(\lambda) = A \sin \pi \frac{\lambda}{\lambda_0}$ $\lambda_0 < \lambda < \infty \quad \phi(\lambda) = 0$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{1 + \cos \lambda_0 t}{\pi^2 (\lambda_0 t)^2}$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{\sin \lambda_0 t}{\pi^2 - (\lambda_0 t)^2}$
 $0 \leq \lambda \leq \lambda_0 \quad \phi(\lambda) = A \cos \pi \frac{\lambda}{\lambda_0}$ $\lambda_0 < \lambda < \infty \quad \phi(\lambda) = 0$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_0 t \sin \lambda_0 t}{\pi^2 - (\lambda_0 t)^2}$	$-A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_0 t (1 + \cos \lambda_0 t)}{\pi^2 - (\lambda_0 t)^2}$
 $\phi(\lambda) = A e^{-\frac{\lambda}{\lambda_0}}$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + (\lambda_0 t)^2}$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_0 t}{1 + (\lambda_0 t)^2}$
 $\phi(\lambda) = A \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2}$	$A \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$	$A \lambda_0 \frac{1}{\pi} \left[e^{-\lambda_0 t} \text{Ei}(\lambda_0 t) - e^{\lambda_0 t} \text{Ei}(-\lambda_0 t) \right]$
 $\phi(\lambda) = A e^{-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2}$	$A \lambda_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\lambda_0 t}{2} \right)^2}$	$A \lambda_0 \frac{2}{\pi} e^{-\left(\frac{\lambda_0 t}{2} \right)^2} \int_0^{\lambda_0 t} e^{y^2} dy$

1) Für $\Phi(\lambda)$ ist je nachdem $\varphi(\lambda)$ bzw. $\psi(\lambda)$ einzusetzen.

Für den Imaginärteil von $F(\lambda)/\lambda$ lässt sich ganz analog ableiten

$$f(t) \approx F(0) + \sum_i [f_{c_i}(t) \cos \lambda_{1_i} t - f_{s_i}(t) \sin \lambda_{1_i} t]. \quad (10)$$

3. Praktische Durchführung

Für die Beurteilung der Stabilität einer Regelung muss man den Frequenzgang $F_R(\lambda)$ des offenen Regelkreises berechnen. Zusammen mit dem Störfrequenzgang $F_G(\lambda)$ bekommt man den Frequenzgang des geschlossenen Kreises aus

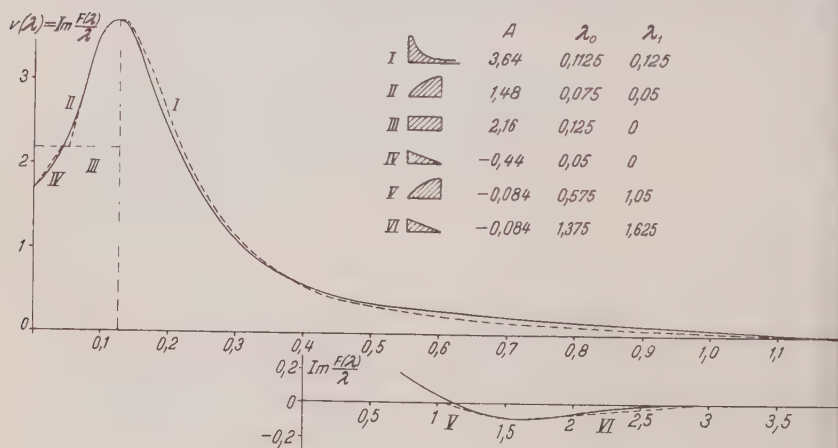
$$F(\lambda) = \frac{F_G(\lambda)}{1 - F_R(\lambda)}.$$

Hat man $F(\lambda)$ bestimmt, so muss $F(\lambda)/\lambda$ in Real- und Imaginärteil getrennt werden. Zur weiteren Rechnung wird man vorteilhaft denjenigen Teil verwendet, der schneller konvergiert. Diesen sucht man dann mit möglichst wenig der Tabelle 1 angegebenen Hilfsfunktionen $\varphi(\lambda)$ zu approximieren.

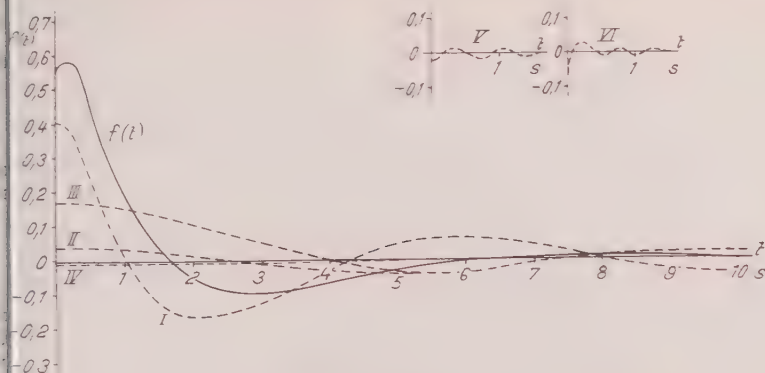
Die Berechnung der Übergangsfunktion erfolgt am besten graphisch, wo die in Tabelle 1 angegebenen Funktionen ein für allemal berechnet und aufgetragen werden. Für eine bestimmte Zeit t berechnet man $\lambda_0 t$ und kann der entsprechenden Kurve $f_c(t)/(A \lambda_0)$ bzw. $f_s(t)/(A \lambda_0)$ entnehmen.

Man hat dabei Gleichung (10) zu beachten, das heisst Multiplikation mit $\cos \lambda_1 t$ bzw. $\sin \lambda_1 t$. Zur bequemeren Rechnung kann eine Rechenscheibe oder eine Cellon angefertigt werden, mit welcher die Multiplikation mit den trigonometrischen Funktionen direkt aus den Kurven für $f_c(t)$ und $f_s(t)$ abgelesen werden kann [4]. Um schliesslich den Ausgleichsvorgang zu erhalten, sind die einzelnen Teilbeträge zu addieren.

Zum Abschluss soll noch ein Beispiel angegeben werden. In Figur 1 ist $v(\lambda) = \text{Im } F(\lambda)/\lambda$ in Funktion von λ in Per. % aufgetragen (ausgezogene Kurve).



Figur 1
Approximation von $\text{Im } F(\lambda)/\lambda$ durch sechs Hilfsfunktionen.



Figur 2

Zusammensetzung der Übergangsfunktion.

Die durch sechs Hilfsfunktionen approximiert wird (gestrichelte Kurven). ändert sich dabei nichts, wenn für z anstatt der Kreisfrequenz $2\pi f$ überall die Frequenz f in Hertz eingesetzt wird. In Figur 2 sind die Anteile der einzelnen Hilfsfunktionen zum zeitlichen Verlauf sowie deren Summe $f(t)$ dargestellt. Im vorliegenden Fall ergibt sich eine stark gedämpfte Schwingung.

LITERATURVERZEICHNIS

- G. S. BROWN und D. P. CAMPBELL. *Principles of Servomechanisms* (John Wiley & Sons, Inc., New York 1948), S. 332.
 K. W. WAGNER. *Operationalrechnung und Laplacesche Transformation*, 2. Aufl. (Barth, Leipzig 1950), S. 29.
 K. W. WAGNER. *Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen* (Klemm, Wiesbaden 1947), S. 51.
 J. HÄNNY. *Regelungstheorie* (Leemann, Zürich 1947), S. 81.
 JAHNKE-EMDE. *Tafeln höherer Funktionen*, 4. Auflage (Teubner, Leipzig 1948), S. 1–26.

Summary

A practical method for determining the transient response $f(t)$ of an automatic control system from the frequency response $F(z)$ is given. The real and imaginary part of $F(z)$ each are approximated by a series of auxiliary functions $\varphi_i(z)$ with known corresponding time functions. A table of the most useful of these correspondences is included.

The resulting transient response is obtained as one of the two sums equation (9a) or equation (10b) according to the choice of the real or imaginary part of the frequency response as the point of departure.

As an example the frequency response with the imaginary part given in figure 1 is transformed to the transient response shown in figure 2 using the six auxiliary functions indicated in figure 1.

eingegangen: 29. Januar 1954.)

The Effect of Cross-Viscosity on the Performance of Full Journal Bearing without Side-Leakage

By RAMACHANDRA SUBBA RAO and SWAMI DAYAL NIGAM, Kharagpur, India

BRAUN and REINER²⁾ have shown the existence of stresses in direction 'across' the velocity gradient in non-Newtonian liquids, and have explained such effects theoretically by including in the stress-flow tensor relation quadratic terms depending on the coefficient of 'cross viscosity'. The most general relation between the stress matrix and the flow matrix is

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\mu \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{xy} & e_{yy} \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{xy} & e_{yy} \end{pmatrix}^2,$$

where τ_{ij} are the stress, p is the pressure, μ is the coefficient of shear viscosity, μ_1 is the coefficient of cross viscosity and

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

For ordinary or Newtonian liquids μ_1 is zero.

SOMMERFELD³⁾ has investigated the problem of full journal bearing for Newtonian liquids by assuming the pressure to be constant across the depth of the film. He finds that for a full journal bearing without side-leakage the 'attitude angle' is 90 degrees. In actual practice it is observed to be more than 90 degrees and is explained as due to side-leakage.

In this paper we investigate the problem of full journal bearing for non-Newtonian liquids by assuming a relation between stress matrix and the flow matrix as defined in (1), and find that this discrepancy may be explained by taking into consideration the non-Newtonian character of the liquid.

The equations governing the flow of non-Newtonian liquids in two dimensions are,

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}, \quad (3)$$

and the equation of continuity is

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

¹⁾ Department of Mechanical Engineering, Indian Institute of Technology.

²⁾ I. BRAUN and M. REINER, *Quart. J. Mech. appl. Math.* 5, 42-53 (1952).

³⁾ A. E. NORTON, *Lubrication* (McGraw-Hill, New York, 1942), pp. 107-116.

the expressions for the stresses are

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \mu_1 \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right], \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \tau_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \mu_1 \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Neglecting the inertia terms and substituting from (5) in (2) and (3), we find

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \nabla^2 u + \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \nabla^2 v + \mu_1 \frac{\partial}{\partial y} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (7)$$

Assume

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (8)$$

Equation (4) is automatically satisfied, and (6) and (7) reduce to

$$\nabla^4 \psi = 0. \quad (9)$$

This equation has been already solved by JEFFERY, and his results can be adapted to the case of non-Newtonian liquids. It is easy to see that the components of velocity remain unchanged, but the pressure is modified.

For an approximate solution of the problem, following SOMMERFELD, we take the equations (6) and (7) in the form

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (11)$$

Assume a function

$$p = P + p_1$$

such that P is a function of x only and

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (12)$$

and

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (13)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} = \mu_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (14)$$

hence

$$p_1 = \mu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 A. \quad (15)$$

Integrating (4) from 0 to h with respect to y and using the condition that $v(0) = v(h) = 0$, we find

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u \, dy = 0.$$

Equations (12) and (16) are encountered in the problem of slider bearing Newtonian lubricants. From (12) and (16) we get

$$\frac{dP}{dx} = 6 \mu U r \left(\frac{1}{h^2} - \frac{K}{h^3} \right).$$

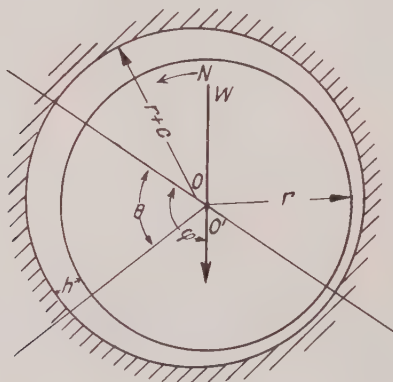


Figure 1
The Journal Bearing.

Putting $dx = r \, d\theta$ and $h = c(1 + n \cos \theta)$, where $n = e/c$ for a journal bearing, we get

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{6 \mu U r}{c^2} \left[\frac{1}{(1 + n \cos \theta)^2} - \frac{K}{c(1 + n \cos \theta)^3} \right].$$

If $P = P_0$ when $\theta = 0$ and $\theta = 2\pi$

$$P - P_0 = \frac{\mu U r}{c^2} \cdot \frac{6n(2 + n \cos \theta) \sin \theta}{(2 + n^2)(1 + n \cos \theta)^2},$$

also

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{U}{h} - \frac{h - 2y}{2\mu} \cdot \frac{dP}{r \, d\theta}.$$

Therefore the value of p_1 on the journal $y = 0$ is

$$p_{1,j} = \frac{\mu_1 U^2}{c^2} \left[\frac{4}{1 + n \cos \theta} - \frac{6(1 - n^2)}{(2 + n^2)(1 + n \cos \theta)^2} \right]^2 + A.$$

the pressure on the journal is given by

$$p'_0 = \frac{\mu U r}{c^2} \cdot \frac{6 n (2 + n \cos \theta) \sin \theta}{(2 + n^2) (1 + n \cos \theta)^2} + \frac{4 \mu_1 U^2}{c^2} \cdot \left\{ \left[\frac{2}{1 + n \cos \theta} - \frac{3 (1 - n^2)}{(2 + n^2) (1 + n \cos \theta)^2} \right]^2 - \left(\frac{2 n + 1}{2 + n^2} \right)^2 \right\} \quad (20)$$

where p'_0 is the pressure on the journal when $\theta = 0$ or $\theta = 2\pi$.

Integrating along and perpendicular to the line of centres OO' , we find

$$W \cos \varphi = L \int_0^{2\pi} p \cos \theta r d\theta = - \frac{4 \mu_1 U^2 L r \pi n}{c^2} \cdot \frac{8 n^4 - 5 n^2 - 4}{(2 + n^2)^2 (1 - n^2)^{3/2}},$$

$$W \sin \varphi = L \int_0^{2\pi} p \sin \theta r d\theta = \frac{\mu U L r^2}{c^2} \cdot \frac{12 n}{(2 + n^2) (1 - n^2)^{1/2}}.$$

therefore

$$\tan \varphi = - \frac{3 \mu r}{\mu_1 U} \cdot \frac{(2 + n^2) (1 - n^2)}{8 n^4 - 5 n^2 - 4}. \quad (21)$$

then

$$\mu_1 = 0, \quad \varphi = 90^\circ.$$

We find, the effect of the cross viscosity is to make the attitude angle greater than 90 degrees and to shift the point of minimum film thickness towards the load line opposite to the direction of rotation. The frictional torque on the journal is independent of the coefficient of cross viscosity and has the same value as in the case of Newtonian liquid.

A further treatment in the case of slider and partial journal bearings operating with non-Newtonian lubricants will be presented in greater detail in subsequent papers.

Zusammenfassung

SOMMERFELDS Theorie ergibt für den Verlagerungswinkel eines vollen Gleitlagers den Betrag von 90° . In Wirklichkeit entsteht ein grösserer Verlagerungswinkel. Es wird hier nachgewiesen, dass die Berücksichtigung der Querviskosität die Unstimmigkeit zwischen Theorie und praktischer Beobachtung beseitigt.

(Received: February 6, 1953.)

Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 8. Mai 1954 in Solothurn

Berichte über angewandte Physik und Mathematik

Experimentelle Beiträge zum Spaltverlustproblem, von R. HÜRLIMANN (Zürich¹⁾).

Von verschiedenen Sekundärströmungsursachen in der Nähe der Schaufelenden axialer Strömungsmaschinen wird im folgenden nur diejenige des Spaltverlusts, das heisst der induzierte Spaltverlust, bei inkompressibler Strömung an einem Einzelflügel untersucht.

Um das Verhalten der Schaufel bei verschiedenen Spaltweiten und die entsprechenden Strömungsvorgänge in Spaltnähe festzustellen, sind Kraft- und Druckmessungen durchgeführt worden. Für erstere wurde ein symmetrisches 9% dickes NACA-Profil und für letztere ein symmetrisches, 9,6% dickes Profil verwendet.

Die Widerstandszunahme $\Delta c_w/c_a^2$ der stumpf abgeschnittenen Schaufel als Funktion von c_a bei verschiedenen relativen Spaltweiten zeigt bei kleineren Spaltweiten mit wachsendem Auftrieb fallende Tendenz. Bei kleinsten Spaltweiten, um $s/t = 1,2\%$, tritt ein stärkerer Abfall des Zusatzwiderstandes auf, als aus den Werten oberhalb dieser Grenze erwartet werden könnte.

Die Auftriebsverteilung über der Schaufellänge bei konstanter Spaltweite geht mit zunehmendem Anstellwinkel immer mehr in eine rechteckige über. Dasselbe gilt bei kleiner werdender Spaltweite. Ferner zeigen sich am Schaufelende charakteristische Auftriebsspitzen. Diese Spitzen sind ebenfalls beim Druckwiderstandsverlauf festzustellen und können bis zum Zweifachen des Mittelwertes ansteigen.

Über die Vorgänge am Schaufelende geben Druckmessungen an Saug-, Druck- und Stirnseite Aufschluss. In zirka 10–20% der Tiefe entsteht am Spalt eine zweite Saugspitze. Ausserdem nehmen bei kleineren Spaltweiten die Unterdrücke in Spaltnähe nur im vorderen Profilverteil zu, während bei grösseren Spaltweiten sich ebenfalls im hinteren Profilverteil hohe Unterdrücke zeigen. Diese können als Mass für die Lage des Spaltwirbels interpretiert werden, was durch Wanddruckmessungen und Anstrichversuche bestätigt wird.

Um zu versuchen, die Strömungsvorgänge in Spaltnähe zu beeinflussen, wurden die Messungen mit verschiedenen Endformen durchgeführt. Abänderungen sind dabei nur in einer Zone von höchstens 8% der Schaufelhöhe angebracht worden. Als Spaltmass wurde die engste Stelle zwischen Schaufel und Wand gewählt. Sämtliche Messungen werden verglichen mit denjenigen der stumpf abgeschnittenen Schaufel. Es zeigte sich dabei, dass alle abgerundeten Formen ungünstig sind. Ferner gaben auch gepfeilte Schaufelenden bzw. sich verengende oder erweiterte Spalte usw. keine Verbesserungen. Nach der Saugseite zugespitzte Endformen erwiesen sich als widerstandsvermindernd, speziell solche mit hochgezogenen

¹⁾ Institut für Aerodynamik der ETH.

Kante. Bei $s/t = 2\%$ bzw. 6% wurden mit diesen Formen im Durchschnitt Verbesserungen von 25% bzw. 15% erreicht.

Um zu versuchen, den Einfluss von Drosselung und Druckwiderstand zu kennen, wurde ein spezieller Wehrströmungsversuch durchgeführt. Ein Hindernis de unter verschiedenen Winkeln α zur Anströmrichtung gestellt und der entstehende Druckverlust gemessen. Es zeigte sich dabei, dass bei kleinen Winkeln α Unterschiede der Drosselkoeffizienten verschiedener Formen gering sind. Hier bleibt die Abstufung der Drosselkoeffizienten bei $\alpha = 90^\circ$ für die verschiedenen Anordnungen bei kleinen Winkeln nicht bestehen.

Thermodynamische Zustandsänderungen des trockenen und des nassen Wasserdampfes, von L. S. DZUNG, Baden¹⁾.

Im Dampfturbinenbau stösst man bei der Berechnung der Niederdruckstufen auf die Schwierigkeit, dass die Eigenschaften des nassen Wasserdampfes keine einfache analytische Formulierung zulassen. Diese Schwierigkeit spielt zwar für einzelnen Berechnungen keine Rolle, denn man kann immer ein anerkanntes Zustandsdiagramm zur Hand nehmen und alle notwendigen Zahlen ablesen. Bei allgemeinen Überlegungen über die Gesetzmässigkeiten wirkt dies jedoch ungenügend. Es wird nun ein Verfahren gezeigt, das diese Schwierigkeit vermindert. Gleichzeitig werden gewisse Eigenschaften des Dampfes im allgemeinen Licht gebracht.

Wir betrachten ein geschlossenes System von einer Stoffkomponente mit zwei Freiheitsgraden. Es kann sich dabei um die rein gasförmige Phase handeln, das System ist ein trockener Dampf, oder eine Gleichgewichtsmischung der flüssigen und der gasförmigen Phase, das heisst einen nassen Dampf. Im letzten Fall kommt das Massenverhältnis der beiden Phasen als ein neuer Freiheitsgrad hinzu, dann wird wegen der Gleichgewichtsbedingung die Temperatur durch den Druck bestimmt. Man hat daher in jedem Fall zwei Freiheitsgrade.

Wir verwenden den Druck p und das spezifische Volumen v als die zwei Zustandsvariablen und definieren

$$\tau \equiv p \frac{v}{R}, \quad k \equiv -\left(\frac{\partial \log p}{\partial \log v}\right)_s, \quad m \equiv -\left(\frac{\partial \log p}{\partial \log v}\right)_h.$$

Hier sind die Gaskonstante, s und h sind die (spezifische) Entropie und Enthalpie. Es lässt sich zeigen, dass für eine durch

$$\varphi \equiv \frac{dh}{v dp} = \text{const}$$

beschriebene polytrope Zustandsänderung der Exponent

$$n \equiv -\left(\frac{\partial \log p}{\partial \log v}\right)_\varphi$$

gegeben ist durch den Ausdruck

$$\frac{n-1}{n} = \varphi \frac{k-1}{k} + (1-\varphi) \frac{m-1}{m}.$$

In der elementaren Thermodynamik wird das ideale Gas gekennzeichnet durch die Beziehung $\tau = T$, wonach $m = 1$, $k = k(T) = c_p/c_v$ folgt. (T bedeutet Temperatur; c_p, c_v die spezifische Wärme.)

¹⁾ Aktiengesellschaft Brown, Boveri & Cie.

Der ideale Dampf¹⁾ wird definiert durch $m = 1$. Dann folgt $k = k(\tau)$. kann zeigen, dass der ideale Dampf in vieler Hinsicht ähnliche Eigenschaften das ideale Gas besitzt und denselben aerothermodynamischen Grundgleichungen gehorcht, solange der nullte Hauptsatz der Thermodynamik nicht ins kommt. Dem polytropen, das heisst idealen Gas mit konstanter spezifischer W entspricht ein polytroper, das heisst idealer Dampf mit konstantem k .

k und m können auf Grund thermodynamischer Identitäten berechnet den. Für nassen Wasserdampf weisen die Zahlwerte k und m innerhalb d Niederdruckturbinen vorkommenden Zustandsgebietes nur sehr geringe änderlichkeit auf. Die Bedingungen

$$m \approx \text{const}, \quad k \approx \text{const}$$

sind weitgehend erfüllt. Für einen solchen «semipolytropen Dampf» kann viele von der elementaren Thermodynamik bekannte und für das polytrope streng gültige Formeln mit unwesentlicher Ergänzung übernehmen. Insbesondere kann man für die isentrope Zustandsänderung alle bekannten Formeln beib ten und für die polytrope Änderung ausserdem die nach oben mit dem m -ergänzten Formeln benützen. Die Zahlenwerte für Wasserdampf im genau Zustandsgebiet sind

$$m \approx \frac{23}{22}, \quad k \approx \frac{10}{9}.$$

Zwischen zwei Zustandspunkten 1, 2 längs einer Polytrophen bestehen wie für polytrope Gas die Beziehungen

$$h_2 - h_1 = \varphi \frac{n}{n-1} R (\tau_2 - \tau_1), \quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right)^{n/(n-1)} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^n.$$

Sie gelten auch für die Isentrope und die Isenthalpe durch die Spezialisie $\varphi = 1$ bzw. $\varphi = 0$. Hingegen hat die allgemeinere Gleichung

$$h = \frac{k}{k-1} R \tau + \text{const}$$

nur für das polytrope Gas und den polytropen Dampf Gültigkeit und nicht den semipolytropen Dampf.

Eine ausführliche Veröffentlichung hierüber ist vorgesehen.

Essais sur des grilles d'aubes pour compresseurs supersoniques, B. CHAIX, Zurich²⁾.

Pendant le démarrage d'un compresseur supersonique, les vitesses relatives à l'entrée de l'aubage mobile peuvent passer progressivement du régime subsonique au régime supersonique, sans blocage, si les canaux formés par les a sont divergents. Cette divergence assure la stabilité d'un choc de compression comme dans une tuyère de LAVAL. Tant que la composante axiale d'entrée subsonique, le débit s'adapte à la vitesse périphérique suivant la direction aubes. Il est possible, si l'extrados des profils est droit à partir du bord d'attaque et sur une longueur suffisante, qu'en régime stationnaire aucune onde ne propage en amont de la roue.

Une des grilles que nous étudions en soufflerie à l'Institut d'Aérodynamique satisfait à ces conditions. Elle a été essayée avec un nombre de REYNOLDS

¹⁾ Vergleiche W. TRAUPEL, Forschung 18, 3 (1952); L. S. DZUNG, J. aeron. Sci. 20, 650 (1953).

²⁾ Institut d'Aérodynamique, E. P. F.

corde de 700 000. Avec un nombre de MACH d'entrée de 1,3 et une contre-pression de 1,7 fois la pression amont, un choc droit se place près de la sortie du canal qui forment deux aubes voisines. Pour un taux de compression plus élevé, on observe plus près de l'entrée du canal deux chocs droits en série: le décollement des couches limite suffit à créer un col sonique intermédiaire.

Pour un taux de compression de 1,9, le choc remonte le courant jusqu'à l'entrée du canal; se détachant devant le bord d'attaque d'une aube, il se projette en amont de la grille où il est accompagné d'un faisceau de détente. Dès que l'écoulement amont n'est plus uniforme et son débit est influencé par la contre-pression aval. Au prix de ces perturbations (qui accompagneraient la roue dans la décompression) on arrive à diminuer les pertes dans la grille, la couche limite sur les aubes et des aubes étant dès le bord d'attaque soumise à la pression régnant en aval. Compte tenu des phénomènes irréversibles à l'intérieur de la grille et des pertes qu'entraînerait l'homogénéisation de l'écoulement aval à l'aval et impulsion constantes, le rendement adiabatique de la compression est de 90%. Le rendement adiabatique d'un choc droit qui, sans diffuseur, livrerait le même taux de compression de 1,9, atteindrait 96%, indiquant que le choc en soi n'est pas le siège des pertes principales.

Pour des nombres de MACH plus élevés, de 1,6 par exemple, la couche limite se comporte de manière à réduire l'amplitude du choc près de la paroi. Le premier choc de la configuration est bien connue est suivi, à partir du point de transition de la couche limite, par une succession de chocs obliques. En produisant ce cisaillement préalable par la forme même de l'aube et en réduisant la divergence du canal qui suit le choc droit, on a, dans une autre grille, fait passer le taux de compression de 2,7 à 3,3 pour un nombre de MACH d'entrée de 1,7.

Les essais de grilles fixes en soufflerie permettent d'analyser des phénomènes de chocs et de décollements assez essentiels et typiques pour qu'on en puisse tirer des conclusions utiles à la construction non seulement d'ailette de compression axiaux, mais aussi de diffuseurs de certains compresseurs radiaux ou de diffuseurs d'entrée pour avions supersoniques.

Stationäre Randbedingung für die durch eine Querschnittsänderung bedingte Übergangszone in einer instationären, eindimensionalen Gasströmung, von Y.-N. CHEN, Winterthur¹⁾.

In einer eindimensionalen Strömung kompressibler Gase wird sich jede Störung als Druck- oder Verdünnungswelle fortpflanzen. Solche instationären Strömungen können graphisch nach dem Charakteristikenverfahren berechnet werden.

Im Randgebiet mit sprunghafter Querschnittsänderung ist aber eine instationäre Behandlung der Strömung sehr schwierig, weshalb diese dort im allgemeinen unter Vernachlässigung der mit der Zeit veränderlichen Größen als stationär betrachtet wird. Diese Vereinfachung ist nur bei Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit gerechtfertigt, wenn das Zeitintervall des graphischen Verfahrens so gross gewählt ist, dass ein genügender Ausgleich der im Randgebiet hin- und herwandernden Wellen sichergestellt wird.

Diese stationäre Randbedingung hat aber eine für die stationäre Strömung charakteristische Eigenschaft zur Folge: die Geschwindigkeit im engsten Querschnitt des Randgebietes übersteigt die Schallgeschwindigkeit nicht. Für eine stationäre Strömung durch eine in einem Rohr befindliche, einfache Düse bedeutet also eine Überschallgeschwindigkeit sowohl am Düsenaustritt als auch in

¹⁾ Gebrüder Sulzer AG.

dem sich nach der Düse bildenden Strahl ausgeschlossen. Aber im Experiment treten doch Überschallgeschwindigkeiten auf, wenn das Verhältnis der Drücke vor und nach der Düse gross ist. In diesem Fall muss die Randbedingung in der Düsenzone unbedingt instationär behandelt werden. Hierzu denke man sich den Strahl von einem Diffusor umgeben, der die gleiche Form hat wie die freie Grenzfläche des Strahls. Der mit dem Strahl verbundene Carnot-Stoss wird dann als Reibungsverlust des Diffusors aufgefasst. Die instationäre Strömung in der Düse dürfte damit durch eine solche in der gedachten Laval-Düse reproduziert werden. Nach dem Differenzenverfahren lässt sich die Wirkung der Reibung und der Änderung der Strömungsquerschnitte berechnen.

Für eine instationäre Überschallströmung in einem Rohr mit verschiedenen Querschnitten muss die Übergangszone zweier Querschnitte ebenfalls instationär behandelt werden. Nur auf diese Weise lassen sich die von der Übergangszone stromabwärts wandernden Wellen richtig darstellen.

Informationstheorie, von J. R. DE FRIES, Zürich¹⁾.

Der wissenschaftliche Informationsaustausch stellt eine Reihe besonderer Probleme. Es handelt sich hier meist um abstrakte, häufig sehr schwer mitteilbare Umstände und Erkenntnisse, deren kollektiver Besitz doch wieder die unmittelbare Voraussetzung der Weiterführung der Arbeit einer Forschungsgemeinschaft ist. Die Unterschiede in der Leistungsfähigkeit sind bei verschiedenen Informationsformen und bei verschiedenen Voraussetzungen der Partner beträchtlich. Die Aufgabe erscheint daher interessant, Optimalbedingungen für den wissenschaftlichen Informationsaustausch zu ermitteln, wofür bereits einige Ansätze, speziell aus den USA., vorliegen.

In einer Annäherung besteht ein Mitteilungsvorgang in der Reaktion eines komplexen Reglersystems auf eine Veränderung der Grössen. Im Sinne einer modellmässigen Analogie können daher die Überlegungen der Reglertechnik an Informationsvorgänge angewendet werden. An Stelle eines untauglichen Mechanisierungsversuches hat sich jedoch das Verfahren als fruchtbarer erwiesen, Reaktionen typischer Regelstrecken nach ihrer Eigenart auf Mitteilungsvorgänge beziehen und abzuschätzen, in welchem Masse die Reglerreaktionen im menschlichen Verhaltensspektrum aufzufinden sind.

Eine Reihe solcher Identitäten lassen sich schon mit Hilfe der Grundformen proportionaler und integraler Regelstrecken zeigen, speziell mit deren instabilen Bereichen. Proportionale Elemente zeigen sich deutlich in impulsiven und instinktiven Reaktionen. Instabilität tritt technisch hier ein, wenn die Messgrösse verzögert auf die Stellglieder wirkt (Totzeit). Sie entspricht etwa jener Unsicherheit (Instabilität), die auftritt, wenn Befehle zu sofortigen (impulsiven) Reaktionen erteilt werden, die der momentanen Situation des Befehlsempfängers nicht angepasst sind. Integrale Elemente finden sich ausgeprägt im verstandesmässigen Interpretieren und Auswerten von Informationen. Charakteristisch ist hierfür ein Bewertungsvorgang, der nach grösseren Ausschlägen um einen «Endurteilswert» nach der Abklingzeit zu einem (im Gegensatz zu proportionalen Strecken) fehlenden Stellwert kommt. Instabilität tritt hier ein, wenn die Stellgeschwindigkeit relativ zur Strecke zu gross ist. Im regeltechnischen Sinne müssten solchen Informationsformen allgemein geeignete, auf das menschliche Wesen und den angesprochenen Bereich regeltechnisch abgestimmte Übergangsfunktionen zugrunde gelegt werden.

¹⁾ Eidgenössische Materialprüfungs- und Versuchsanstalt.

An Hand von Kommunikationsbetrachtungen können weitere Hinweise gegeben werden (Informationstheorie der elektrischen Nachrichtentechnik). Es lassen sich hier insbesondere drei Frequenzbegriffe als brauchbar erwiesen:

Standpunktwechselfrequenz: Eine wesentliche Differenz zwischen Mensch und Tier liegt im «Ermüdungsfaktor». Bei längerer Beanspruchung eines bestimm-gedanklichen Punktes fließen die Potentiale ab, wie etwa ein Stein in waag-rechter Hand nur kurze Zeit gehalten werden kann. Dieser Ermüdungsfaktor verlangt, dass ein bestimmter Mitteilungspunkt nur für eine optimale Zeitdauer gültig bleibt und dann in stufenweisem Abbau des Verständnisses eine andere Art der gedanklicher Aufmerksamkeit zur Wirkung gelange. Diese Zeiten liegen in der Grössenordnung von rund 2 min.

Standpunktwiederholungsfrequenz: Soll ein bereits berührter Punkt im Rahmen einer Mitteilung wieder aufgegriffen werden, so ist dessen Erholung abzuwarten; es ergeben sich Zeiten von 3 bis 4 min als Minimum.

Wert-Funktions-Wechselfrequenz: Um die vorhandenen Gedächtnisinhalte in der Interpretation einer Information heranzuziehen, ist ein Wechsel zwischen Aussagen und Angaben über funktionelle Zusammenhänge notwendig. Wird dieser Rhythmus unterbrochen, so wandert die Aufmerksamkeit ab, die Informationsleistung sinkt. Experimentell ergeben sich für typische naturwissenschaftliche Inhalte Frequenzen von 0,03 Hz, in Sonderfällen noch wesentlich geringere Werte.

Überlegungen der geschilderten Art sollen nicht im Sinne einer territorialen «Komplikation» in den wertvollen persönlichen Kontakt eingreifen. Ihr Wert für die Gestaltung von Instruktionen und Informationen soll andererseits nicht untergraben werden. Sie gestatten, den Zeitaufwand und die Unbestimmtheit in der Mitteilung naturwissenschaftlicher Informationen zu vermindern und ermöglichen so, den Horizont des in der kurzen Zeit eines Lebens Erfassbaren über die eigenen, quantitativ bedingten Erkenntnisgrenzen hinauszurücken.

Ein Impulsgenerator mit Sekundäremissionsröhren, von E. BALDINGER und M. NICOLET, Basel¹⁾.

Es wird ein Generator zur Erzeugung von rechteckigen Testimpulsen beschrieben, der als wesentliches Element die Sekundäremissionsröhre Philips P60 verwendet. Der Vorteil dieser Röhre besteht darin, dass sie kleine Schaltkapazitäten besitzt und im Impulsbetrieb Ströme bis zu 300 mA liefert.

Der Apparat erzeugt Rechteckimpulse von $1 \cdot 10^{-7}$ bis $128 \cdot 10^{-7}$ s Dauer sowie Spannungen zur Zeitablenkung und Hellsteuerung eines Kathodenstrahl-Oszillographen. Bei 52Ω Ausgangswiderstand ist die Anstiegszeit des Testimpulses kürzer als $2 \cdot 10^{-8}$ s. Die maximale Impulshöhe hängt von diesem Widerstand ab und kann bis zu 400 V betragen.

Eine Beschreibung der Schaltung erfolgt demnächst in der ZAMP.

Entwicklung einer programmgesteuerten elektronischen Rechenmaschine am Institut für angewandte Mathematik der ETH., von H. SCHLAEPI, Zürich²⁾.

Das Projekt der ERMETH (elektronische Rechenmaschine der ETH.) entstand infolge der stets wachsenden Nachfrage nach numerischer Rechenleistung in der Industrie und Wissenschaft. Mit der seit 1950 am Institut für angewandte

¹⁾ Physikalisches Institut der Universität.

²⁾ Institut für angewandte Mathematik der ETH.

Mathematik im Betrieb stehenden Relaisrechenmaschine kann der Bedarf länger nicht mehr gedeckt werden¹⁾.

Die ERMETH rechnet im Dezimalsystem und mit beweglichem Komma. Sie verfügt neben den Befehlen für das Rechnen mit beweglichem Komma über besondere Befehle für die Ausführung der arithmetischen Operationen mit festem Komma. Rechnen mit mehrfacher Stellenzahl und Errechnen von Befehlen ermöglicht.

Ein ERMETH-Wort kann drei verschiedene Bedeutungen haben, nämlich eine Zahl in halblogarithmischer Darstellung von der Form $a \cdot 10^e$, eine Zahl mit festem Komma und ein Befehlspar. Das Programm ordnet jedem Wort eine dieser Bedeutungen zu. Ein Wort umfasst 16 Dezimalstellen, die in Serie transferiert werden. Jede Dezimalstelle ist nach AIKEN durch vier Dualstellen mit den Gewichten $2-4-2-1$ verschlüsselt. Die Tetraden werden parallel transferiert und bearbeitet.

Hinsichtlich Organisation und Aufbau des Rechenwerks sowie des Befehlsverzeichnis kann auf eine frühere Veröffentlichung verwiesen werden²⁾. Die Additionszeit beträgt 5 ms, die Multiplikationszeit 15 ms, beide für bewegliches Komma und ohne Suchzeit.

Die logischen Schaltungen des Rechen- und Leitwerks sind gleichstromgepult. Sie verwenden «Gates» mit Germaniumdioden für die Verknüpfungen Konjunktion und Disjunktion sowie Inverter mit Doppeltrioden für diejenigen der Negation. Die zu bearbeitende Information wird in Flipflops bereitgestellt. In Schaltnetzwerken modifiziert, und nach Erreichen des Ruhewertes in anderen Flipflops abgesetzt. Die Schaltnetzwerke können aus Ketten von bis zu zweistufigen Diodennetzwerken bestehen, wovon jedes zur Pegelwiederherstellung durch einfach oder doppelt negierende Inverter gefolgt ist. Wo nötig, besorgen Kathodenfolger die Leistungsverstärkung. Die Elektronenröhren enthalten Schaltungen sind durchwegs mit der Type E90CC bestückt und so stark streng gegengekoppelt, dass ein Emissionsabfall auf 50 % des Nennwertes ihr Funktionieren noch nicht merklich beeinträchtigt. Als Diode wird durchwegs die OA55 eingesetzt, wobei die Schaltungen eine sehr starke Verminderung des Sperrwiderstandes zulassen. Die Impulsfrequenz beträgt im logischen Teil der ERMETH 32 kHz.

Der Speicher besteht aus einer Magnettrommel mit einer mittleren Suchzeit von 5 ms und kann 10000 Zahlen oder Doppelbefehle aufnehmen. Er besitzt 50 tetradische Signalkanäle mit 200 Magnetköpfen, zu denen weitere 20 für 5 regenerierenden Register im Rechen- und Leitwerk sowie 5 Hilfskanäle kommen. Um die Suchzeit den Operationszeiten anzupassen, werden die Signalimpulse von 10 Wörtern so ineinander verschachtelt, dass jeder zehnte Impuls zum selben Wort gehört. Die Impulsfrequenz im Speicher beträgt somit das Zehnfache der Frequenz der Rechenwerkimpulse. Für das im ERMETH-Speicher angewandte «Return-to-Zero»-Verfahren wurden neuartige Schreib- und Ableseschaltungen entwickelt, die eine erhebliche Ersparnis an elektronischen Schaltmitteln ermöglichen. Hierüber wird an anderer Stelle eingehend berichtet.

Die Ein- und Ausgabe-Ausrüstung der ERMETH umfasst Lochkartenstationen (10 Wörter je Sekunde), elektrische Schreibmaschinen (ein halbes Wort je Sekunde), Zeilendrucker (2 Wörter je Sekunde) sowie Lampen- und Drucktafel. Für die Rechenplanfertigung, Kontrolle und Auswertung ist eine von ERMETH unabhängige Einheit vorgesehen, die aus Lochkartenstationen, Zeilendrucker und einem vollständigen Bedienungspult besteht.

¹⁾ A. P. SPEISER, *Projekt einer elektronischen Rechenmaschine am Institut für angewandte Mathematik der ETH.* (ZAMP 4, 317 [1953].)

²⁾ J. R. STOCK, *An Arithmetic Unit for Automatic Digital Computers*, ZAMP 5, 168 (1954).

Bemerkungen über den Einfluss der Plasmaschwingung in Laufzeitröhren

VON OSKAR DÖHLER, Paris¹⁾, und WERNER KLEEN, München²⁾

In einer Arbeit gleichen Titels von F. LÜDI [1]³⁾ wird angegeben, dass der Leistungsgewinn einer Travelling-Wave-Röhre durch die Raumladungskräfte der Elektronen nicht beeinflusst wird. Dabei wird angeführt, dass dies Ergebnis im Gegensatz steht zu dem einer Untersuchung, die wir zusammen mit R. WARKE veröffentlicht haben [2].

Wir nehmen zur Veröffentlichung [1] wie folgt Stellung:

a) Experimentell stellt man in der Travelling-Wave-Röhre einen wesentlichen Einfluss der Raumladung auf den Leistungsgewinn G fest. Dies geht auch aus unseren Veröffentlichungen hervor. CUTLER [3] erhält zum Beispiel eine sehr gute Übereinstimmung zwischen gemessenen und unter Berücksichtigung des Einflusses der Raumladung berechneten Werten von G . Vernachlässigt man die Wirkung der Raumladung, so berechnet man dagegen für G Werte, die für die erwähnten Röhren BTL1 und BTL2 um 30 bis 40 dB, das heisst um den Faktor 10^3 bis 10^4 grösser sind als die gemessenen. Wird die Rechnung nicht auf der Grundlage der Theorie von PIERCE-CUTLER, sondern auf der unserer Arbeit [2] durchgeführt, so erhält man praktisch gleiche Übereinstimmung bei Einführung der Raumladungskräfte, etwa die gleichen Unterschiede bei Vernachlässigung derselben. In [2] sind ferner Kurven angegeben (siehe S. 174, Figur 5), die zeigen, dass die Berücksichtigung des Raumladungseinflusses nach [2] zu den gleichen Resultaten führt wie die der «Feldtheorie» von CHU und JACKSON [4], die diesem Einfluss auf exaktere Weise Rechnung trägt.

b) Gegen das in [1] benutzte Ersatzbild bestehen unseres Erachtens folgende Bedenken: In die Verzögerungsleitung werden Längskapazitäten C_l eingeführt. Würde man in einer Verzögerungsleitung Kondensatoren einfügen, deren Platten in axialer Richtung, das heisst in Richtung des Strahls dicht hintereinander liegen, so können Raumladungskräfte gar nicht wirksam werden. Die von den Elektronenraumladungen ausgehenden Kraftlinien würden auf diesen Kondensatorbelegungen enden, also gar keine Defokussierung der Elektronenpakete bewirken. Diese ist ja die Ursache der Verminderung des Leistungsgewinns infolge der Raumladung – verursachen. Das in [1] als Grundlage benutzte Ersatzbild erscheint uns damit als physikalisch nicht berechtigt. Will man die Raumladungseffekte durch Einführung einer Kapazität erfassen, so muss diese an anderer Stelle liegen, nämlich an der Stelle der Kapazität C_1 , die PIERCE [5] in ein Ersatzbild zur mathematischen Beschreibung der defokussierenden Raumladungseffekte einführt. Dieses Ersatzbild führt rechnerisch zum gleichen Ergebnis, zu dem auch unsere Arbeit [2] gelangt, wenn die praktisch meist erlaubte Näherung

$$\Gamma - \Gamma_0 \ll \Gamma_0$$

1) damit

$$\frac{\Gamma_0^2}{(\Gamma - \Gamma_0)^2} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma_0}{\Gamma - \Gamma_0}$$

angeführt wird (Bezeichnungen siehe [1]).

¹⁾ Compagnie Générale de T. S. F.

²⁾ Siemens & Halske AG.

³⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 438.

c) Auf Grund des Ersatzbildes in [1] mit Längskapazitäten und der unter a) hierzu gegebenen Erläuterung hätte man zu erwarten, dass bei Ersatz der Wellenleitung durch einen kreiszylindrischen Leiter unendlich guter Leitfähigkeit gar keine freien Raumladungswellen sich ausbilden können, da diese ja durch die Existenz der endlichen Raumladungskräfte bedingt sind. Dies bestätigen unseres Erachtens die Rechnungen in [1]. In Gleichung (7), S. 391, ist I_1 der divergenzfreie Gesamtstrom, also $\partial I_1 / \partial x = 0$. Auf S. 391 ist ferner angeführt die Gleichung

$$\dot{E}_a - \frac{\partial E_a}{\partial t} = \frac{I_1}{C_l}.$$

Damit muss auch gelten

$$\dot{E}'_a - \frac{\partial^2 E_a}{\partial x \partial t} = 0,$$

also

$$E_a = f(x) + g(t).$$

Dies ist aber eine Lösung, die keinesfalls eine Ausbreitung von Wellen beschreibt.

Aus den unter a) bis c) genannten Gründen halten wir die Ergebnisse unserer Arbeit zusammen mit R. WARNECKE veröffentlichten Arbeit 2 voll aufrecht.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] F. LÜDI, ZAMP 3, 390 (1952); siehe auch W. FREY und F. LÜDI, ZAMP 3, 237 (1950).
- [2] R. WARNECKE, O. DÖHLER und W. KLEEN, Wirel. Eng. 28, 167 (1951).
- [3] C. C. CUTLER, PIRE 39, 914 (1951).
- [4] L. J. CHU und J. D. JACKSON, PIRE 36, 853 (1948).
- [5] J. R. PIERCE, *Traveling-Wave Tubes* (Van Nostrand, New York 1950), S. 17, Figur 7, 1.

Erwiderung auf die voranstehenden Bemerkungen über den Einfluss der Raumladung auf die Plasmamachung in Laufzeitröhren

Von FRITZ LÜDI, Baden¹⁾

Trotz ausführlichen brieflichen Diskussionen mit Herrn W. KLEEN konnte ich bis jetzt seine Entgegenhaltungen nicht einsehen. Die Gründe seien hiermit dargelegt.

In meinen Bemerkungen sind durch Verwendung des dortigen Ersatzbildes (Figur 1 [1]²⁾ Gleichungen abgeleitet (8), (9), S. 392 [2], welche einerseits die strahlungsfreie Helix (inneres Feld $E_r = 0$) die Wellenausbreitung mit bekannter Ausbreitungskonstante Γ_0 liefert, andererseits ohne Helix (äußeres Feld E_a) die Plasmafrequenz Ω und die Ausbreitungskonstante Γ für die Raumladungswelle eines oder mehrerer Elektronenstrahlen (Doppelstrahlverstärker) ergibt. Bis hier stimmen diese Schlussfolgerungen mit denen anderer Autoren, insbesondere WARNECKE, DÖHLER und KLEEN [3], überein. Die Diskrepanz tritt bei T.W.T. auf, wo ich mit Berücksichtigung der Raumladungskräfte dasselbe

¹⁾ AG. Brown, Boveri & Cie.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 441.

wie ohne Berücksichtigung erhalte. Dieser Unterschied und die Gründe sind oben angeführt und «zur Diskussion gestellt».

Ich sehe auch jetzt noch den Grund für die Diskrepanz in der unsymmetrischen Verwendung des Feldes bei anderen Autoren (totales Feld $E_a + E_i$ für Bewegungsgleichungen der Elektronen, nur äusseres Feld E_a für die Influenzierung). Wie bereits in [1] ausgeführt, erhält man bei unsymmetrischer Verwendung des Feldes in den Gleichungen (8), (9), S. 392, ebenfalls die den anderen Autoren entsprechende raumladungsabhängige Gleichung (Verstärkung) für die Verstärkungskonstante Γ .

In der Gültigkeit unseres Ersatzschemas (Abschnitt B, DÖHLER und KLEEN) bin ich bis jetzt nicht. Die Längskapazität entspricht der Windungskapazität der Helix und bewirkt sowohl die Verzögerung der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit als auch das erforderliche Längsfeld für die Wechselwirkung mit dem Elektronenstrahl. Die Spannung über der Längskapazität ist nach allgemeinen elektrischen Gesetzen durch das totale Feld $dU_1 = (E_a + E_i) dx$ gegeben, wonach die oben besprochene Symmetriewirkung des totalen Feldes zum Ausdruck kommt. Den Längskapazitäten unseres Ersatzschemas entsprechen üblicherweise die Lochplatten einer Spezialausführung der T.W.T. nach KLEEN [4]. Mit dem Satz der Herren DÖHLER und KLEEN, dass die von den Elektronenraumladungen ausgehenden Kraftlinien auf den Kondensatorbelegungen (Helixwindungen) enden, bin ich einverstanden, ich habe denselben Grund dafür angemerkt. Es scheint mir eine gewisse Willkür in der Vorstellung zu liegen, dass die elektrischen Feldlinien beim paketierte Elektronenstrahl zur Hauptkomponente auf diesem anfangen und enden [5].

Ich bin einverstanden mit dem Abschnitt C der Herren DÖHLER und KLEEN. Die Kopplungsgleichungen (7), (8), S. 391 [1], aus denen für stromlose Elektronen ($i = 0$) $\dot{E}_a = I_1/C_l$ gefolgert wird, gelten wie die übrigen Differentialgleichungen (1) bis (6) [1] nur für eine Zelle des Ersatzschemas; darin sind die Parameter gemäss Rechnung mit Ersatzschema konstant, also auch I_1 als Leitungsladung auf die Längskapazität. Auf die Nachbarzelle ändert er sich jedoch sprunghaft, weil Knoten mit Verzweigungsgesetz. Erst die Verbindung der Kopplungsgleichungen (7), (8), S. 391 [1], mit den Differentialgleichungen (1) bis (6) führt zum gemeinsamen Lösungsansatz $\sim e^{pt} e^{\Gamma x}$ auf die Wellenausbreitung sämtlicher Wechselgrössen, auch für E_a !

Bezüglich der experimentellen Übereinstimmung mit der Theorie (Abschnitt A, DÖHLER und KLEEN) erwähne ich, dass bei Wahl des in (1) eingeführten Kopplungsfaktors $\alpha = 0,435$ eine solche erzielt wird, gebe aber offen zu, dass dieser Faktor nicht explizit berechnet ist; er trägt der Streuung der Feldlinien am Rand der Kondensatorplatten, also auch bei Lochplatten, Rechnung, da ja nur diese Feldlinien mit dem Elektronenstrahl in Wechselwirkung treten. Diese Streuung ist die Eindringtiefe in den Elektronenstrahl scheint mir weitgehend durch das Verhältnis Helixdurchmesser zu verkürzter Wellenlänge bestimmt zu sein. Ich habe mir einen Vergleich mit dem Magnetron. Dort spielt die Eindringtiefe des elektrischen Feldes in den Interaktionsraum eine entscheidende Rolle für die Energieübertragung auf die Elektronen. Wenn die defokussierenden Raumladungskräfte nicht durch die Felder der Kondensatorplatten (Anodensegmente) kompensiert würden, wären so grosse Leistungen (grosse Elektronenballungen) kaum verständlich.

Schliesslich betone ich, dass es mir in erster Linie um die prinzipielle Seite des Problems ging, dass sich ein Nachdenken darüber noch lohnt und sich die verschiedenen Standpunkte vielleicht näherbringen lassen, was möglicherweise von dritter Seite geschieht.

Nachtrag bei der Korrektur

Inzwischen ist es mir durch Aufdeckung eines Fehlers in ZAMP 1, 237 (1952) aber bei Aufrechterhaltung der Methode gelungen, Übereinstimmung in den Resultaten für die Travelling-Wave-Tube mit den andern Autoren zu erreichen. In ZAMP 1 war die Kopplung zwischen Elektronenstrahl und Helix durch 6 Gleichungen

$$I_1 = \alpha i + p C_l E_{tot}, \quad dU_1 = E_{tot} dx, \quad (p + \Gamma v_0) v = \frac{e}{m} \alpha E_{tot}, \quad (p + j \omega) \dots$$

gegeben. Die Setzung von αE_{tot} in der Bewegungsgleichung ist falsch, denn da folgt bei der Setzung $E_{tot} = E_a + E_i$ aus $I_1 = 0$ (keine Helix) $E_i = -\alpha i / (p C_l)$ womit E_i in der Bewegungsgleichung nur mit dem Faktor α^2 auf den freien Strahl wirken würde. Die Kopplung wird dann richtig beschrieben, wenn auf den Strahl das Feld $E_2 = \alpha E_a - E_i$ und auf die Kopplungskapazität C_l/cm das Feld $E_1 = E_a + \alpha E_i$ über den Kopplungsfaktor α wirkt (Figur 2 in ZAMP 1, 24) hierbei ist

$$E_a = -\frac{I_1}{p C_l} \quad \text{aus } E_1 \text{ für } E_i = 0 \quad (\text{kein Elektronenstrahl})$$

und

$$E_i = -\frac{i}{p C_l} \quad \text{aus } E_2 \text{ für } E_a = 0 \quad (\text{keine Helix})$$

unter Benützung von $\Gamma E_i = 4 \pi q F$ und der Kontinuitätsgleichung $\Gamma i = p q =$ Dadurch bekommen die Gleichungen (8) und (9), S. 392 in ZAMP 3 (1952), eine etwas andere Gestalt (hier nur für einen Elektronenstrahl plus Helix geschrieben)

$$\left(E_a - \frac{\alpha i}{p C_l}\right) = \frac{p \Gamma^2 L}{p^2 L C_l \Gamma^2 (1 - p^2 L C_l)} \alpha i, \quad i = \frac{e/m \cdot i_0/v_0 \cdot p}{p \Gamma v_0^2} \left(\alpha E_a - \frac{i}{p C_l}\right)$$

Daraus folgt die charakteristische Gleichung für Γ nach Umformung mit

$$\Gamma_0 = \frac{p^2 L C_l}{(1 - p^2 L C_l)}, \quad \Gamma \approx \Gamma_0 = -\frac{j \omega}{v_0}$$

$$\Omega^2 = \frac{e}{m} \cdot \frac{q_0}{C_l} = \frac{e}{m} 4 \pi \frac{q_0}{F} = \text{Plasmafrequenz},$$

$$\Gamma - \Gamma_0 = \frac{-\alpha^2 \Gamma_0^3 / C_l \cdot 1/2 \cdot e/m \cdot q_0}{(p \Gamma v_0^2)^2 + (1 - \alpha^2) \Omega^2}$$

Damit ist Übereinstimmung mit der Gleichung in Part 3, Abschnitt I, von W. NECKE, DÖHLER und KLEEN [3] erreicht, wenn für den Kopplungswiderstand

$$R = \frac{\alpha^2 \omega^2}{v_0^3 C_l}, \quad C = \text{Kapazität/cm}$$

gesetzt wird.

Ohne den unterlaufenen Fehler wären wir schon in ZAMP 1 zwangsläufig auf die raumladungsgeschwächte Verstärkung Γ der Travelling-Wave-Tube gekommen. Die Korrektur des Fehlers bedingt jetzt im Gegensatz zu der Meinung in ZAMP 3 eine entscheidende Abhängigkeit der Raumladungsschwächung vom Kopplungsfaktor α ; sie verschwindet ganz bei voller Kopplung $\alpha = 1$ [und gilt Gleichung (13) ZAMP 3, $\alpha = 0$ gibt Gleichung (10), (11), (12) ZAMP 3, in Übe

Einstimmung mit meinen Bemerkungen über das Magnetron und die Figur 4. von PIERCE in der voranstehenden Entgegnung. Es ist ferner ersichtlich, dass ich modellmässige – fehlerfreie – Behandlungen zu richtigen Resultaten führen. schliesslich fühle ich mich der fördernden Kritik von Herrn KLEEN zu Dank verpflichtet.

LITERATURVERZEICHNIS

- 1] W. FREY und F. LÜDI, ZAMP 7, 237 (1950).
- 2] F. LÜDI, ZAMP 3, 390 (1952).
- 3] R. WARNECKE, O. DÖHLER und W. KLEEN, Wirel. Eng. 28, 167 (1951).
- 4] J. R. PIERCE, Figur 4, 8 (D. van Nostrand Company, Inc., New York 1950).
- 5] L. J. CHU und J. D. JACKSON, PIRE 36, 853 (1948).

Wissenschaftliche Jahrestagung der Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik vom 31. Mai bis 4. Juni 1955 in Berlin

Die nächste wissenschaftliche Jahrestagung der GAMM. findet in Berlin in der Zeit vom 31. Mai bis 4. Juni 1955 (Pfingstwoche) statt. Mit der Leitung des wissenschaftlichen Tagungsausschusses ist Herr Prof. Dr.-Ing. I. SZABO, Technische Universität Berlin-Charlottenburg, betraut.

H. GÖRTLER

Acknowledgment

Professor H. FORD wishes to acknowledge the help of Dr. J.M.ALEXANDER in preparing Figures 10b to 10d in his paper in ZAMP 5, 1–35 (1954).

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Design of Crystal Vibrating Systems for Projectors and Other Applications. By WILLIAM J. FRY, JOHN M. TAYLOR, and BERTHA W. HENVIS. Revised and Enlarged Second Edition (Dover Publications, New York, 1948). 182 pages with about 160 figures; \$3.95.

Die Piezokristalle finden in Technik und Wissenschaft immer mannigfachere Anwendungen, der Entwurf eines wirksamen Kristallelementes vorgegebener Charakteristik ist aber selbst für den Spezialisten eine zeitraubende Berechnungs- und Versuchsarbeit.

Der Inhalt des vorliegenden Buches entspricht den Untersuchungen zur Konstruktion der Unterwassersuchgeräte (SONAR). Das damit veröffentlichte Research Manual der amerikanischen Marine enthält in Tabellen und Kurven-Tabellen alle nötigen Angaben für die Dimensionierung der kompliziertesten Anwendung des Piezokristalls als Schallstrahler, der gegen ein Medium beliebiger Schallhärte arbeitet und der aus Piezokristall, mit ein- oder beidseitig an den Endflächen ange kitteten Trägheits- oder Stützkörpern, die aus ein bis drei verschiedenen Metallen zusammengesetzt sein können, besteht. Die notwendigen

Grössen, Eingangsimpedanz und Wirkungsgrad sind Kurventafeln zu entnehmen ebenso für die Detektion andererseits die Empfindlichkeit des Elementes und seine akustische Impedanz. Kurze, vollständige Anleitungen sind den Kurventafeln vorangestellt, und als praktische Anwendungen sind die Beispiele Ammoniumphosphat und Seignettesalz angeführt. Diese beiden Salze bildeten das Ziel der Untersuchungen, da sie für den Aufbau von Schallstrahlern infolge ihrer hohen elektromechanischen Kopplung geeignet sind.

Der Vollständigkeit halber ist im zweiten Teil des Buches die Theorie der Schwingungen piezoelektrischer Körper mit beliebigen mechanischen und elektrischen Randbedingungen enthalten. Für den Gebrauch der Kurventafeln kommt man jedoch ohne deren Kenntnis aus.

S. Steinema

Randwertprobleme. Von F. SCHWANK (B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft Leipzig 1951). 406 S., 147 Abb.; DM 22.80.

Der Titel «Randwertprobleme» umschreibt nur einen Teil – allerdings den grösseren – des im Buch behandelten Stoffes. Es kommen zur Hauptsache die folgenden Gebiete zur Sprache: Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen speziell Randwertaufgaben, dann Funktionentheorie, Integralgleichungen, Variationsrechnung und Differenzengleichungen. Ein Anhang befasst sich vorwiegend mit unendlichen Reihen. Nur angedeutet oder nicht enthalten sind die eigentlich numerischen Methoden, wie Differenzenverfahren und im weiteren die Laplace-Transformation.

Der Anlage nach handelt es sich weder um ein Lehrbuch noch ein Handbuch, sondern es ist in erster Linie ein Werk, das dem Praktiker einen ersten Überblick über die Anwendungsmöglichkeiten der Analysis geben will. Aus diesem Grund wurde keine Systematik angestrebt und auch kein lückenloser mathematischer Aufbau (keine Existenz- und Konvergenzbeweise). Die einzelnen Methoden werden an verhältnismässig einfachen Beispielen aus dem Gebiet der Ingenieurwissenschaften, der Elektrotechnik und der Physik erläutert. Die zum Verständnis der Beispiele notwendigen Zwischenrechnungen sind immer ausgeführt. Das Buch enthält als wesentlichen Bestandteil sehr viele Literaturangaben, die auf weitere und kompliziertere Probleme hinweisen.

Sehr erwünscht wäre ein ausführliches Namenverzeichnis, um das Auffinden der Literaturzitate zu erleichtern, eventuell auch noch eine systematische Zusammenstellung (etwa nach den Lösungsverfahren oder Sachgebieten geordnet) der behandelten und erwähnten Beispiele, was die Brauchbarkeit des Buches für den Praktiker erhöhen würde.

Im ganzen gesehen dürfte das Buch das gesteckte Ziel erreichen, dem Ingenieur oder Physiker bei der Lösung seiner Probleme behilflich zu sein; ebenso kann das Buch – es enthält besondere Hinweise auf mathematische Spezialwerke – auch einem Studenten der angewandten Mathematik dienen zu einer vorläufigen Orientierung.

E. Roth-Desmets

An Introduction to Statistics. By E. CLARK (John Wiley & Sons, New York, 1953). 264 pp., \$4.25.

Elementare Darstellung der einfachsten Methoden und Resultate der modernen mathematischen Statistik für Leser mit geringer mathematischer Ausbildung. Die Theorie wird durch zahlreiche Beispiele aus der Praxis erläutert. Die Darstellung ist klar, die Auswahl des Stoffes zweckmässig. Das Buch eignet sich für die erste Orientierung auf dem Gebiete der mathematischen Statistik sehr gut.

W. Sauer

Drei Beispiele aus der Elektroservotechnik

Zusammenfassender Bericht

Von EDUARD GERECKE, Zürich¹⁾

Einleitung

In einer früheren Arbeit wurde in dieser Zeitschrift die theoretische Seite Berechnung von Regulierungen²⁾ behandelt. Die drei folgenden elementaren Beispiele sind charakteristisch für die Elektroservotechnik. Sie zeigen zunächst das statische Verhalten des geschlossenen Regelkreises in graphischer Darstellung. Aus den Kennlinien der einzelnen Teile, wie Generatoren, Motoren, separate und Verstärker, wird die äussere Kennlinie des geschlossenen Regelkreises mit Proportionalregler konstruiert.

Heute interessiert sich die Technik immer mehr für das dynamische Verhalten gekoppelter Systeme, und zwar nicht nur hinsichtlich der Stabilität, sondern vornehmlich wegen der Möglichkeit des Baues von genau und schnell arbeitenden, also mit geringen Zeitverzögerungen behafteten Servomechanismen.

Es wird gezeigt, wie in vielen Fällen durch das Schliessen des Regelkreises Zeitkonstanten reduziert werden und welches offensichtlich der Grund dafür ist. An dem Zahlenbeispiel eines grossen Walzmotors werden die verschiedenen Stabilitätskriterien besprochen. Die Arbeit bedient sich vornehmlich graphischer Methoden, da diese dem Ingenieur bei der Projektierung und Dimensionierung der Einzelteile wertvolle Dienste leisten. Seine Aufgabe ist es mit konstruktivem Geschick technisch einfache und wirtschaftlich tragbare Lösungen zu finden. Die beschriebenen Methoden lassen auch die Behandlung komplizierter Probleme zu, wie zum Beispiel das dynamische Verhalten von grossen Drehstromgeneratoren mit den zugehörigen Turbinen und Fernleitungen. Treten jedoch nichtlineare Glieder auf, so sind solche Systeme heute einer thematischen Behandlung noch nicht zugänglich.

Es wurde durchgehend die vom Schweizerischen Elektrotechnischen Verein empfohlene Schreibweise verwendet³⁾.

¹⁾ Institut für Allgemeine Elektrotechnik der ETH.

²⁾ HEINRICH H. WEBER, *Methodik der Berechnung von Regulierungen*, ZAMP 4, 233 (1953).

³⁾ *Regeln und Leitsätze zur Buchstabensymbole und Zeichen*, Publikation Nr. 192 d. 2. Auflage Schweizerischen Elektrotechnischen Vereins (SEV) (Zürich 1953).

A. Fremderregte Gleichstrommaschine

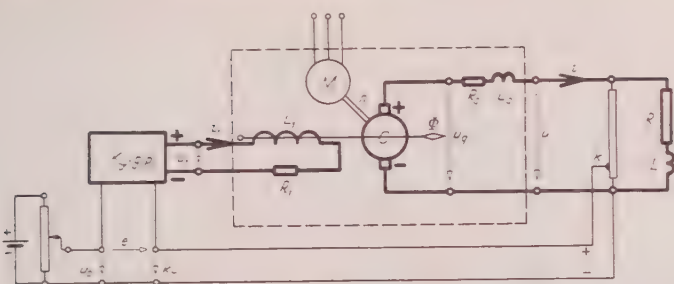
Als erstes Beispiel soll die graphische Behandlung der Regelung der Klemmenspannung U eines mit konstanter Drehzahl n laufenden fremderregten Gleichstromgenerators nach Figur 1 besprochen werden. Figur 2 zeigt die Verhältnisse für den offenen und geschlossenen Regelkreis im stationären Zustand. Die äusseren Kennlinien AB des offenen Kreises ($k = 0$) sind bei Vernachlässigung der Ankerrückwirkung parallele Gerade mit einer Neigung entsprechend dem «Quellenwiderstand» R_q des Ankerkreises. Im geschlossenen Regelkreis wird die Klemmenspannung U über ein Potentiometer mit dem Teilverhältnis k dem Verstärker mit der Übertragungsfunktion $K_v g(p)$ in Gegenerschaltung zur frei wählbaren Vergleichsspannung U_0 zugeführt. Im Leerlauf ($I = 0$) führt das graphisch in Figur 2 vom Punkt A zum Punkt A_1 auf der Potentiometergeraden K_1 und dann zum Punkt A_2 auf der statischen «Verstärkerkennlinie K_2 », bei welcher vertikal dessen Eingangsspannung $E = U_0 - kU$ und horizontal dessen Ausgangsstrom I_1 eingetragen sind. Zum Erregerstrom des Generators kann die zugehörige Quellenspannung U_q der «Leerlaufkennlinie K_3 » im Punkt A_3 entnommen werden. Der Polygonzug $AA_1A_2A_3A$ stellt daher die elektrischen Verhältnisse im geschlossenen Regelkreis bei Leerlauf dar. Bei Belastung im offenen Regelkreis durch den Strom I sinkt die Klemmenspannung U längs der Geraden AB laut

$$U = U_q - R_q I$$

um den Betrag $AB_0 = \Delta U = R_q I$ ab.

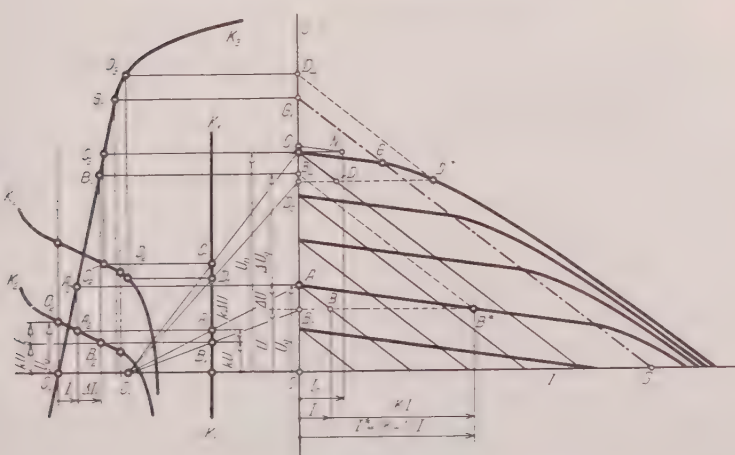
Wie verändert sich nun diese Kennlinie im geschlossenen Regelkreis? Lässt man den Spannungsabfall ΔU zu, so sinkt die Gegenspannung kU am Verstärker um $(k \Delta U)$ (Punkte B_1 und B_2). Demzufolge tritt ein um ΔI_1 grösserer Erregerstrom auf, der eine grössere Quellenspannung $(U_q - \Delta U_q)$ entsprechend den Punkten B_3 und B_4 hervorruft. Damit stellt sich ein viel grösserer Belastungsstrom I^* (Punkt B^*) ein, wobei unter Vernachlässigung der Ankerrückwirkung $B_4B^* \parallel AB$ ist.

Durch das Schliessen des Regelkreises geht also die ursprüngliche Kennlinie AB in die viel flachere Gerade AB^* über, wie wenn der Quellenwiderstand R_q kleiner geworden wäre. Die entsprechende Konstruktion für den höhergelegten Leerlaufpunkt C ergibt zufolge der Krümmung der Kennlinien K_2 und K_3 eine im Vergleich zu AB^* steilere Kennlinie CD^* . Auf ein Absinken der Klemmenspannung U um ΔU reagiert also der Regelkreis durch eine Erhöhung der Quellenspannung U_q um ΔU_q ; Figur 3 ist typisch für den «Proportionalregler». Die Übertragungsfunktion $K_v g(p)$ des Verstärkers habe für $p = 0$ den Wert K_v . Der Erregerstrom I_1 in der Feldwicklung mit dem Widerstand R_1 , der Induktivität L_1 und der Zeitkonstanten $T_1 = L_1/R_1$ wächst infolge



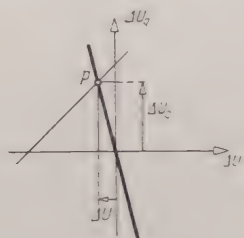
Figur 1

Gleichstromgenerator mit gegenzekoppeltem Regelkreis.



Figur 2

Aussere Kennlinien des Generators bei offenem und geschlossenem Regelkreis.



Figur 3

Fehler und Quellenspannungsänderung beim Proportionalregler.

der Spannungsabsenkung $k \Delta U$ um

$$I_1 = k \Delta U \frac{K_v}{R_1} = \frac{k K_v}{R_1} \Delta U^*,$$

was unter Berücksichtigung der Übertragungsfunktion C des Generators eine Erhöhung der Quellenspannung um

$$\Delta U_q = A B_4 = C \Delta I_1 = \frac{k K_v C}{R_1} \Delta U = K \Delta U$$

hervorrufen. Nach Figur 2 ist damit:

$$B_0 B_4 = U + \Delta U_q = (1 + K) \Delta U, \quad B_0 A = \Delta U = R_q I = R_q^* I^*.$$

$$R_q^* = \frac{R_q}{1 + K}, \quad K = \frac{k K_v C}{R_1}.$$

Der geschlossene Regelkreis reduziert also den Quellenwiderstand R_q auf einen $(1 + K)$ -mal kleineren Wert R_q^* .

Die Kennlinien des geregelten Kreises setzen sich nach Figur 2 aus einem links der Grenzgeraden $G_1 G_2$ gelegenen geraden Teil und aus einem durch die Krümmung der Kennlinien K_2 und K_3 bedingten gekrümmten Teil zusammen. Sie sind zueinander kongruent und lassen sich durch Translation längs $G_1 G_2$ zur Deckung bringen. Statt der Konstanten K und C ist im gekrümmten Teil für kleine Variationen die Neigung der Tangenten in den Punkten D_2 bzw. D_3 an die Kennlinien K_2 und K_3 massgebend. Wünscht man in dem sogenannten Nennbetriebsgebiet, also bis zum Nennstrom I_n und bis zur Nennspannung U_n , überall parallele Gerade als Kennlinien zu erhalten, so lässt sich der hierfür notwendige gerade Teil von K_2 bzw. K_3 sofort abgrenzen.

Das dynamische Verhalten kann an Hand der Blockschemas Figur 4 beurteilt werden. Zu der unabhängigen Variablen $u_0(t)$ tritt der willkürliche Belastungsstrom $i(t)$ als «Störgrösse». Der Momentanwert $u(t)$ der Klemmenspannung kann zum Beispiel als Überlagerung einer Exponentialschwingung mit der komplexen Frequenz $p = \sigma + j\omega$ ($j^2 = -1$) über einen konstanten Wert U aufgefasst werden:

$$u(t) = U + \operatorname{Re}(U e^{pt}).$$

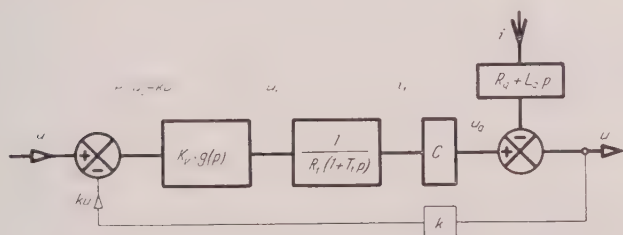
Im linearen Teil der Kennlinien K_2 und K_3 gilt dann nach Figur 5 für den Zeiger \bar{U} :

$$U = G_1(p) U_0 - G_2(p) I,$$

$$\left. \begin{aligned} G_1(p) &= \frac{K}{k} \cdot \frac{g(p)}{1 + K g(p)} \cdot \frac{1}{1 + T_1/[1 + K g(p)] p}, \\ G_2(p) &= \frac{K}{k} \cdot \frac{g(p)}{\bar{z}_1 + K g(p)}, \quad \bar{z}_1 = 1 + T_1 p, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

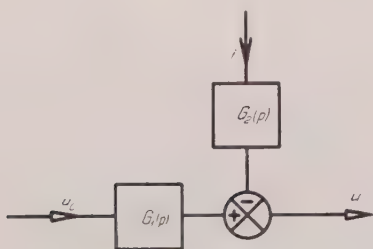
$$\left. \begin{aligned} G_2(p) &= \bar{Z}_q \frac{1 + T_1 p}{1 + K g(p) + T_1 p}, \quad \bar{Z}_q = R_q + L_q p, \\ G_2(p) &= \bar{Z}_q \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_1 + K g(p)}. \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

Die Beziehung Z_q ist das die Spannungsregelung bedingende Glied. Obige Gleichungen führen für $p = 0$ und $g(0) = 1$ zum bereits behandelten statischen Verhalten nach Gleichung (2).



Figur 4

Blockschema des geregelten Generators.



Figur 5

Resultierendes Blockschema.

Das dynamische Verhalten kann für den Fall $g(p) = 1$, wenn also der Regler viel rascher arbeitet als die Gleichstrommaschine, gut übersehen werden. Für Variationen U_0 der Bezugsspannung geht die relativ grosse Zeitkonstante T_1 des Feldes nach (4a) auf einen $(1 + K)$ -mal kleineren Wert zurück. Dasselbe tritt für die Quellenimpedanz Z_q bei Stromvariationen \dot{I} ein, jedoch nur für ganz kleine Werte von p ; für grosse p nähert sich der Bruch rechts im Nenner für $G_2(p)$ der Einheit. Die geregelte Maschine reagiert also rascher auf Veränderungen als die ungeregelte. Eine plötzliche Belastungsschwankung, die durch eine sprungweise Variation der komplexen Impedanz Z erfasst

werden. Mit der reziproken komplexen Übertragungsfunktion

$$h_v(p) = \frac{1}{g(p)} \quad (4)$$

des Verstärkers wird

$$G_1(p) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 + h_v(p) \bar{z}_1/K}, \quad (4)$$

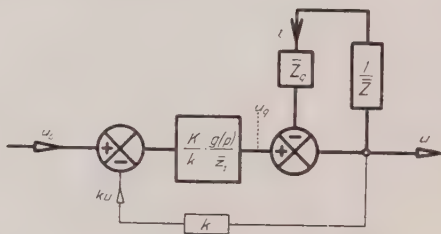
$$G_2(p) = \frac{\bar{Z}_q}{K} \cdot \frac{h_v(p) \bar{z}_1}{1 + h_v(p) \bar{z}_1/K}. \quad (4)$$

Der Ausdruck für G_2 zeigt die Reduktion der Quellenimpedanz für $p = 0$, der Term rechts gibt allgemein den Frequenzgang von $p = 0$ ($K:1+K$) bis $p = \infty$ ($1:1$) an.

Figur 6 erläutert die Rückwirkung der Netzimpedanz \bar{Z} auf die Spannungshaltung und führt zu

$$\bar{U} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{1 + h_v(p) (\bar{z}_1/K) [1 + (Z_q/Z)]} \bar{U}_0. \quad (4)$$

Die technisch wichtigsten Spannungsschwankungen treten bei konstantem infolge von beliebigen zeitlichen Variationen von \bar{Z} auf. Leider können dadurch entstehenden nichtlinearen Differentialgleichungen durch die Laplace-Transformation nicht erfasst werden.



Figur 6

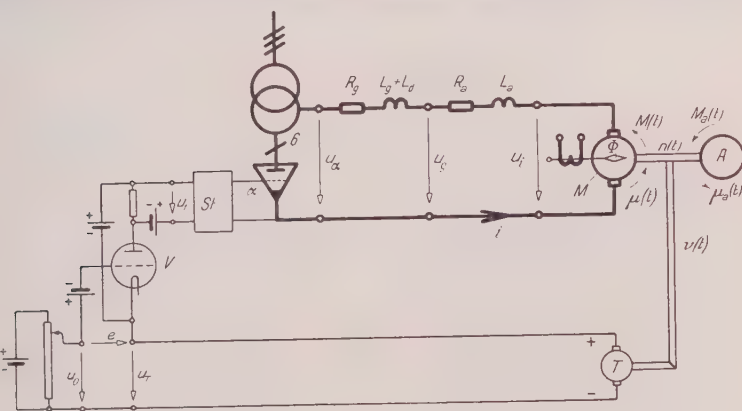
Blockschema mit Belastungskreis.

Für $g(p) = 1$ kann der Verstärkungsgrad K beliebig hoch gewählt werden ohne dass Instabilität auftritt. Hat jedoch der Verstärker im Vergleich zur Maschine eine wesentliche Zeitverzögerung, wie solche zum Beispiel bei magnetischen Verstärkern auftreten, so müssen zur Beurteilung des maximal zulässigen Wertes von K die Stabilitätskriterien herangezogen werden.

Regler für konstanten Strom lassen sich analog graphisch und dynamisch behandeln. Die Quellenimpedanz wird dabei $(1 + K)$ -mal grösser, die äusseren Kennlinien des geschlossenen Kreises fallen steil ab. Analog lassen sich Kaskadenschaltungen von mehreren Maschinen oder Verstärkern und von vielen Arten von Proportionalreglern unter Benützung ihrer Kennlinien graphisch behandeln.

B. Antrieb für konstante Drehzahl

Die Kontrolle der Drehzahl n des Motors M und der Arbeitsmaschine A geschieht nach Figur 7 durch einen gesteuerten Stromrichter und mittels des



Figur 7

Gesteuerter Stromrichterantrieb mit Tachometerdynamo und Verstärkerröhre.

tachometergenerators T , dessen Gleichspannung U_T mit dem einstellbaren Sollwert U_0 verglichen wird. Die folgenden Überlegungen gelten analog, wenn statt des Stromrichters ein Gleichstromgenerator verwendet wird. Zunächst sollen die statischen Verhältnisse ähnlich wie im ersten Beispiel graphisch behandelt werden. Der Fehler ($E = U_0 - U_T$) wirkt auf das Gitter der Verstärkerröhre V , deren Ausgangsgleichspannung U_1 dem Gittersteuergerät St zugeführt wird. Die Veränderung der Leerlaufgleichspannung U_α am gesteuerten Stromrichter wird in bekannter Weise durch zeitliche Verzögerung des Einbausatzes der einzelnen Anoden gegenüber dem nichtgesteuerten Zustand erreicht. Beim m -Phasen-Gleichrichter, zum Beispiel $m = 6$, sinkt dann die Leerlaufspannung U_α gegenüber ihrem Maximalwert U_m ab laut

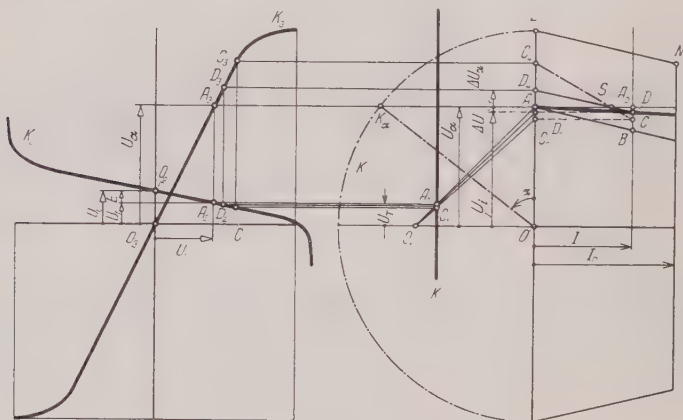
$$U_\alpha = U_m \cos \alpha \quad (5)$$

mit α als Zündverzögerungswinkel.

Die äusseren Kennlinien des gesteuerten Stromrichters (Figur 8) sind parallele Gerade ähnlich denjenigen einer fremderregten Gleichstrommaschine (Figur 2). Das Steuergerät St erzeugt nun einen um so grösseren Steuerwinkel α , je negativer die Eingangsspannung U_1 ist. Die Kennlinie K_3 in Figur 8 stellt U_α als Funktion von U_1 dar. Aus dem Kreis K mit dem Radius U_m lässt sich für

jeden Wert U_z der Steuerwinkel α sowohl für Gleichrichter- ($0 < \alpha < 90^\circ$) wie auch für Wechselrichterbetrieb ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$) konstruieren.

Der Stromrichter weist einen ohmschen (R_θ) und einen induktiven, durch die Wirkung der Streuung L_θ während den Überlappungszeiten bedingten Spannungsabfall auf. Unter Berücksichtigung des Ankerwiderstandes R_a er



Figur 8

Statische Kennlinien des Stromrichterantriebes.

geben sich daher für den Mittelwert U_i der induzierten Ankerspannung lau

$$U_i = U_a - \left(R_\theta + R_a + \frac{2\pi}{m} f L_\theta \right) I = U_a - R I \quad (6)$$

parallele Gerade (Figur 8, $AB \parallel LN$) als Kennlinien (f = Frequenz). Bei vielen Problemen der Servotechnik erweist sich die Einführung von bezogenen Größen, also von homogenen Koordinaten, als sehr zweckmässig. Als Bezugsgrößen werden die «Nennwerte» gewählt, also der Nennwert der Drehzahl n_n , des Stromes I_n , des Drehmomentes M_n des Motors und die maximale Gleichspannung U_m . Die bezogenen Werte lauten:

$$u = \frac{M}{M_n}, \quad \mu_a = \frac{M_a}{M_n}, \quad v = \frac{n}{n_n}, \quad v_z = \frac{U_z}{U_m}, \quad (7)$$

wobei M_a das Gegendrehmoment der Arbeitsmaschine bedeutet. Für die von konstanten Feldfluss Φ induzierte Ankerspannung U_i und für das Drehmoment M gelten bei Vernachlässigung der Ankerrückwirkung:

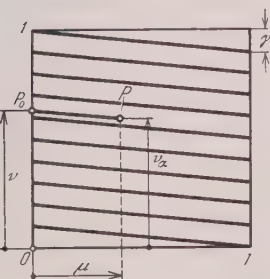
$$U_i = C \omega, \quad U_m = C \omega_n, \quad M = C i, \quad M_n = C I_n, \quad (8)$$

daher ist:

$$\nu = \frac{U_i}{U_m} = \frac{n}{n_n} = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \mu = \frac{M}{M_n} = \frac{i}{I_n}. \quad (8a)$$

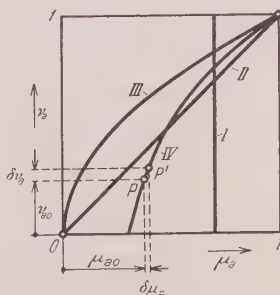
In Division der Gleichung (6) mit U_m folgt der Zusammenhang zwischen bezogenen Drehzahl ν und dem bezogenen Drehmoment μ im offenen Regelkreis (Figur 9) unter Vernachlässigung der Reibung zu:

$$\nu = \nu_a - \gamma \mu, \quad \gamma = \frac{R I_n}{U_m}. \quad (9)$$



Figur 9

ene Drehzahl-Drehmomenten-Kennlinie
des Stromrichterantriebes.



Figur 10

Bezogene Drehzahl-Drehmomenten-Kennlinie
der Arbeitsmaschine.

entsprechenden Kennlinien der Arbeitsmaschine zeigt Figur 10 für die

- I: $\mu_a = \text{konstant}$ (zum Beispiel Hubwerk),
- II: $\mu_a = \nu_a$ (linear),
- III: $\mu_a = \nu_a^2$ (zum Beispiel Pumpe, Ventilator),
- IV: beliebig.

Im offenen Regelkreis fällt nach Figur 8 die induzierte Spannung U_i und mit der Drehzahl ν nach der Geraden AB ab, falls $A_0B = RI$ gewählt wird. Wie liegen nun die Verhältnisse beim geschlossenen Regelkreis? Nimmt man einen vorgegebenen Strom I zunächst einen willkürlichen Spannungsabfall an, so ergibt eine zu Figur 2 analoge Konstruktion mittels der Kennlinien und K_3 des Verstärkers beziehungsweise des Steuergerätes eine Erhöhung der Quellenspannung U_a um ΔU . Die Verbindungslinien C_4C , D_4D usw. für verschiedene Werte von ΔU gehen nun alle im linearen Bereich durch einen Punkt S . Es stellt sich diejenige Gerade D_4D im geschlossenen Regelkreis ein, die parallel zu den Kennlinien für U_i , also parallel zu AB , liegt, woraus

unter Vernachlässigung der Reibung folgt:

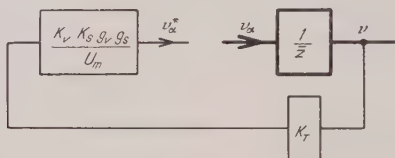
$$\Delta U_\alpha = K \Delta U, \quad \Delta U + \Delta U_\alpha = (1 + K) \Delta U = R I,$$

$$k = \frac{U_T}{U_i}, \quad K_v = \frac{U_1}{U_T}, \quad K_s = \frac{dU_\alpha}{dU_1},$$

$$U = \frac{R}{1 + K} I, \quad K = k K_v K_s.$$

Beim geschlossenen Regelkreis ist also der Drehzahlabfall $(1 + K)$ -mal kleiner als beim offenen. K ist der Verstärkungsfaktor im geschlossenen Regelkreis.

Für die Untersuchung des dynamischen Verhaltens schneiden wir den Regelkreis an den Steuergittern des Stromrichters auf (Figur 11), fügen dort ne-



Figur 11

Aufgeschnittener Regelkreis.

einer konstanten Spannung eine Störspannung ein und untersuchen das Verhalten aller Regelgrößen unter der Wirkung dieser erzwungenen Schwingung, die wir als eine allgemeine Exponentialschwingung von der Form

$$\operatorname{Re} [\bar{A} e^{pt}] = A e^{-\sigma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

mit der beliebigen Kreisfrequenz ω , der beliebigen negativen oder positiven Dämpfung σ , also von der beliebigen komplexen Frequenz $p = \sigma + j\omega$ wählen. Die massgebenden Gleichungen folgen einerseits aus dem Spannungsgleichgewicht des elektrischen Kreises und andererseits aus dem mechanischen Kinetik nach NEWTON.

Die am inneren Widerstand R_g und an der Streuinduktivität L_g des Stromrichters, an einer eventuellen Glättungsdrrosselspule L_d , am Ankerwiderstand R_a und an der Ankerinduktivität L_a auftretenden Spannungen bedingen die Spannungsdifferenz zwischen den Momentanwerten $u_x(t)$ der Quellenspannung und der induzierten Ankerspannung $u_i(t)$, welche (angenähert infolge Änderung der Überlappungszeit) beträgt:

$$u_x(t) - u_i(t) = \left(R_g + R_a + \frac{2\pi}{m} f L_g \right) i + (L_g + L_d + L_a) \frac{di}{dt} = R i + L \frac{di}{dt}$$

Die komplexen Zeiger folgt daraus:

$$\left. \begin{aligned} U_z &= U_i \quad \left[(R_g + R_a + \frac{2\pi}{m} f L_g) + (L_g + L_d + L_a) p \right] I, \\ R &= R_g + R_a + \frac{2\pi}{m} f L_g, \quad L = L_g + L_d + L_a, \\ U_z &= U_i = (R + p L) I = R (1 - T_e p) I, \quad T_e = \frac{L}{R} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

aus durch Division mit U_m für die bezogenen Zeiger:

$$\bar{v}_x = r = \frac{R I_n}{U_m} (1 - T_e p) \frac{\bar{I}}{I_n} = \gamma (1 - T_e p) \bar{u}, \quad \gamma = \frac{R I_n}{U_m}. \quad (14)$$

Differenz der Drehmomente $M(t)$ des Motors und $M_a(t)$ der Arbeitsmaschine für die Beschleunigung der Massen und für die zur Drehzahl proportional kommende Reibung aufgebracht laut

$$M(t) - M_a(t) = J \frac{d\omega}{dt} + r \frac{\omega}{\omega_n} M_n, \quad (15)$$

aus durch Division mit M_n für die komplexen Zeiger folgt:

$$\frac{\bar{M} - \bar{M}_a}{M_n} = \frac{\omega_n J}{\bar{M}_n} p \bar{v} + r \bar{v} = r \bar{v} + T_n p \bar{v}, \quad (16a)$$

$$T_n = r T_m = \frac{\omega_n J}{M_n}, \quad \omega = 2\pi n, \quad (16b)$$

$$\mu = \mu_a + (r + T_n p) \bar{v} = r (1 + T_m p) \bar{v} = r \bar{z}_m \bar{v}. \quad (16c)$$

Die Zeit zum Hochfahren der Maschinen unter der Wirkung des Nennmoments ($M_a = 0$) bis zur Nenndrehzahl n_n . Linearisiert man nach Figur 10 kleine Variationen den Zusammenhang zwischen Drehzahl und Drehmoment der Arbeitsmaschine laut

$$\mu_a = \mu_{a0} + K_a \delta v_a, \quad K_a = \frac{d\mu_a}{dv_a}, \quad \bar{\mu}_a = K_a \bar{v}_a, \quad (17)$$

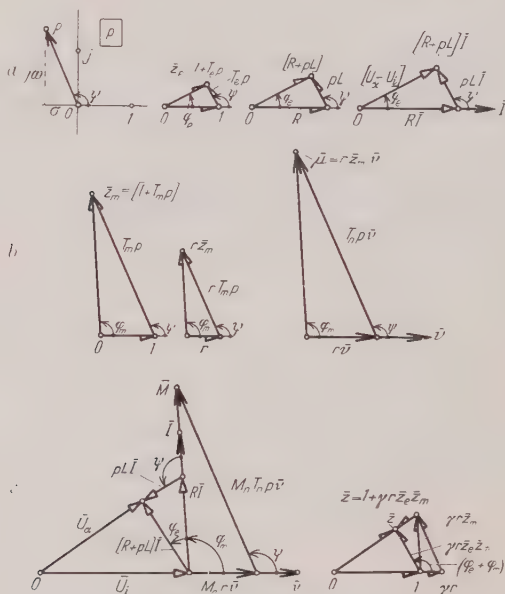
ergt schliesslich für die starre Welle ($v_n = r$) beim offenen Regelkreis:

$$\bar{\mu} = r' (1 + T'_m p) \bar{v} \quad \text{mit} \quad r' = r + K_a, \quad T'_m = \frac{r}{r'} T_m. \quad (18)$$

In diesen Gleichungen auftretenden Grössen, wie die Impedanz ($R + p L$), bezogenen Impedanzen oder Zeitglieder

$$\bar{z}_e = 1 + T_e p, \quad \bar{z}_m = 1 + T_m p \quad (19)$$

des elektrischen bzw. mechanischen Kreises sind in den Figuren 12a, b und c für komplexe Werte von $p = |\dot{p}| \exp(j\psi)$ dargestellt. Aus diesen ergeben sich die ohmsche und induktive Spannung $R\bar{I}$ bzw. $pL\bar{I}$, das Reibungsmoment $M_n r \bar{v}$ in Phase mit \bar{v} sowie das Newtonsche Beschleunigungsmoment $M_n T_n \dot{p}$ um ψ voreilend. Die Differenzspannung $(\bar{U}_x - \bar{U}_i)$ bewirkt den Ankerstrom dieser das Drehmoment M ; dieses, vermindert um das Gegenmoment \bar{M}_a , b



Figur 12

Zeigerdiagramme für eine komplexe Frequenz p .

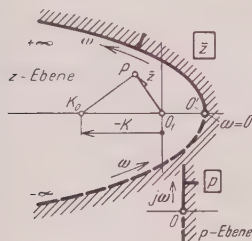
wirkt die Drehzahl \bar{n} , die ihrerseits die induzierte Spannung \bar{U}_i hervorruft. Nimmt man \bar{U}_x oder \bar{v}_x als Ursache, r als Wirkung, so findet man aus c (Figur 12c) die Zusammenhänge

$$\bar{U}_x - \bar{U}_i = R \bar{z}_e \bar{I}, \quad M - \bar{M}_a = r M_n \bar{z}_m \bar{v} \quad (12)$$

und damit die für die kombinierte Wirkung des elektrischen und mechanischen Kreises charakteristische inverse Übertragungsfunktion $\bar{z}(p)$ zwischen den zugehörigen Leerlauf- und Lastdrehzahlen

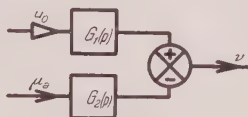
$$\bar{z}(p) = \frac{\bar{v}_x}{\bar{v}} = 1 + \gamma' r \bar{z}_e \bar{z}_m.$$

man sieht daraus, dass man diese Zusammenhänge graphisch auch für komplexe Frequenzen darstellen kann, während dies bis anhin nur für ungedämpfte Schwingungen ($p = j\omega$) üblich war. $\bar{z}(p)$ vermittelt als quadratische Funktion in p eine konforme Abbildung der «Frequenzebene p » auf eine zweiblättrige Riemannsche Fläche $\bar{z}(p)$. Das Bild der imaginären Achse ($p = j\omega$) ist eine Schleife und wird als komplexe Frequenzgangkurve bezeichnet (Figur 13).



Figur 13

eigenfrequenzgangkurve der kombinierten Impedanz \bar{z} .



Figur 14

Blockschema für die bezogene Drehzahl v .

Die Exponentialschwingung v bewirkt über das Tachometer Figur 11, über die Verstärkerröhre V und das Steuergerät St eine Exponentialschwingung \bar{v}_α^* der Leerlaufspannung des Stromrichters im aufgeschnittenen Regelkreis. Es sei

$$\bar{v}_\alpha^* = -\frac{K_T K_v K_s}{U_m} g_p(p) g_s(p) \bar{v} = -K g(p) \bar{v} = -\frac{K}{h_v(p)} v \quad (22)$$

mit $g(p)$ als resultierendem Zeitglied. Eigenschwingungen des geschlossenen Regelkreises resultieren aus $\bar{v}_\alpha^* = \bar{v}_\alpha$, es sind dies ebenfalls Exponentialschwingungen, deren komplexe Frequenzen daher die Bedingung

$$\bar{z}(p) + K g(p) = 0, \quad h_v(p) \bar{z}(p) + K = 0 \quad (23)$$

erfüllen. Das System ist stabil, wenn alle Wurzeln dieser Gleichung negative Realteile aufweisen.

Die bezogene Drehzahl \bar{v} lässt sich im linearen Bereich als Funktion der zwei unabhängigen Variablen U_0 und M_a nach Figur 14 darstellen:

$$\bar{v} = G_1(p) \bar{U}_0 - G_2(p) \bar{\mu}_a \quad (24)$$

mit

$$G_1(p) = \frac{K}{K_T} \cdot \frac{g(p)}{\bar{z}(p) + K g(p)} = \frac{K}{K_T} \cdot \frac{1}{h(p) \bar{z} + K}, \quad (24a)$$

$$G_2(p) = \gamma \frac{\bar{z}_e}{\bar{z}(p) + K g(p)} = \gamma \frac{h(p) \bar{z}_e}{h(p) \bar{z} + K}. \quad (24b)$$

$G_2(p)$ erhält man durch mehrmaliges Anwenden der Formel

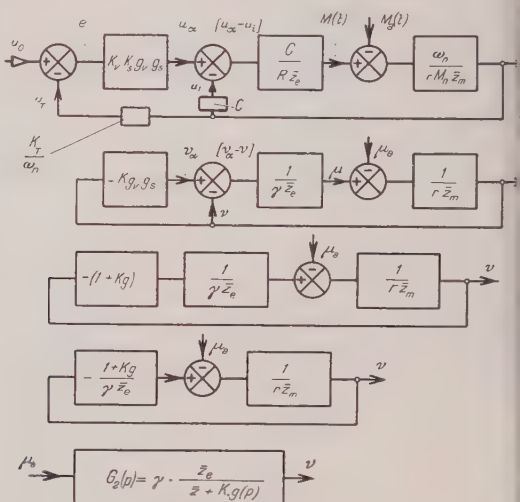
$$G = \frac{G_d}{1 + G_d G_g} \quad (2)$$

für den gegengekoppelten Kreis nach Figur 15 auf Figur 16 mit $\bar{\mu}_a$ als Ursache und bei konstantem U_0 . Dieses Verfahren wird bei komplizierten Servosystem mit mehrfachen Gegenkopplungen mit Erfolg angewandt und entspricht dem Auflösen von Gleichungen mit mehreren Unbekannten.



Figur 15

Gegengekoppeltes System.



Figur 16

Blockschema zur Ermittlung der Übertragungsfunktion zwischen $M_d(t)$ und $\omega(t)$.

Sind die Zeitverzögerungen des Verstärkers und des Steuersatzes vernachlässigbar gegenüber den übrigen, ist also $g(p) = 1$, so gehen die Eigenfrequenzen aus der Gleichung

$$\bar{z}(p) + K = 0 \quad (2)$$

hervor. Hiefür fällt in Figur 13 P auf K_0 , und es sind zum Bildpunkt K_0 zwei Originalpunkte in der p -Ebene zu suchen. Denkt man sich den Verstärkungsfaktor K von Null ansteigend, so interessiert das Wandern der zugehörigen Wurzeln p_1, p_2 in der Frequenzebene. Diese Wurzelmethode kann zur Bestimmung der oberen Grenze von K bestimmt werden, die eintritt, wenn die Wurzeln die imaginäre Achse überschreiten, das System also instabil wird. Man sucht dazu das Bild der negativen reellen Achse der z -Ebene in der p -Ebene.

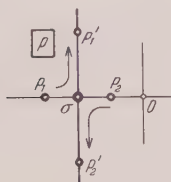
Im vorliegenden Falle liegen die Verhältnisse besonders einfach. Aus (21)

$$T_e T_m p^2 + (T_e + T_m) p + \frac{1+K}{\gamma r} = 0 \quad (27)$$

daraus

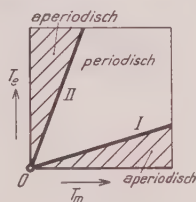
$$\sigma = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_e} + \frac{1}{T_m} \right); \quad (28)$$

liegen komplexe Wurzeln unabhängig von K stets auf der Senkrechten im Abstand $(-\sigma)$ vom Ursprung. Reelle Wurzeln sind zudem negativ. Sind die reellen Wurzeln des offenen Regelkreises beispielsweise negativ reell, und verändert man nun die Gegenkopplung sukzessive durch Steigern von K , so gehen diese beiden Wurzeln zunächst in eine Doppelwurzel $(-\sigma)$ über und werden schließlich komplex mit zunehmender Frequenz ω (Figur 17). Je stärker die Gegenkopplung, um so höher ist also die Frequenz der Exponentialschwingung



Figur 17

Wandern der Wurzeln in der komplexen Frequenzebene.



Figur 18

Die drei Gebiete für aperiodische und periodisch gedämpfte Übergänge.

gleichbleibender Dämpfung σ . Ein stabiles System zweiten Grades wird bedingt durch eine beliebig starke, keine Zeitverzögerung aufweisende Gegenkopplung nicht instabil. Dieses Wandern der Wurzeln bei wachsender Gegenkopplung kann analog studiert werden für Systeme höheren Grades in p . Man geht vom offenen Kreis aus, wobei für stabile Systeme alle Wurzeln auf der negativ reellen Achse liegen und bei zunehmendem Wert von K eventuell in die imaginäre Achse in die rechte Halbebene übertreten können.

Die wichtige Grenze zwischen aperiodischem und periodisch gedämpftem Übergang, also bei der kritischen Dämpfung mit verschwindender Determinante, tritt bei $g(p) = 1$ zu den zwei Gleichungen

$$= \frac{\gamma}{4} \left(1 - \frac{1}{2} \gamma r + \dots \right) \frac{1}{1+K}, \quad \frac{T_e}{T_m} = \frac{4}{\gamma r^2} \left(1 + \frac{1}{2} \gamma r + \dots \right) (1+K). \quad (29)$$

Die Beziehung zwischen den beiden Zeitkonstanten T_e , T_m wird durch zwei Beispiele nach Figur 18 dargestellt. Schwingungen zwischen dem magnetischen Energiespeicher L und dem mechanischen Energiespeicher J sind um so schwieriger

riger zu vermeiden, je stärker die Gegenkopplung ist. Um so kleiner wird gleichzeitig die Periodendauer der gedämpften Schwingung und erreicht schließlich einen Wert, für den die Voraussetzungen der Theorie nicht mehr gültig sind. Denn beim 6-Phasen-Stromrichter bei 50 Hz Netzfrequenz erfolgt die Wirkung der Steuergitter unstetig nach je 3,33 ms, die Signale weisen eine «Totzeit» auf. Zu hohe Verstärkungen sind also zwecklos. Glätturdrosseln L_d erhöhen T_c und damit die Neigung zu Schwingungen.

Dem folgenden Zahlenbeispiel liegt ein plötzliches Abfallen des Gegenmomentes um den Wert ΔM_n , laut $\mu_a(t) = +\Delta[1]_t$ zugrunde.

Die Laplace-Transformierte von v für diese Schrittfunktion (als Spezialfall einer Exponentialschwingung $p = 0$) von μ_a ergibt sich bei $g(p) = 1$ aus (2)

$$L(v) = \gamma \Delta \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + K + \gamma r} = \frac{T_e p}{K},$$

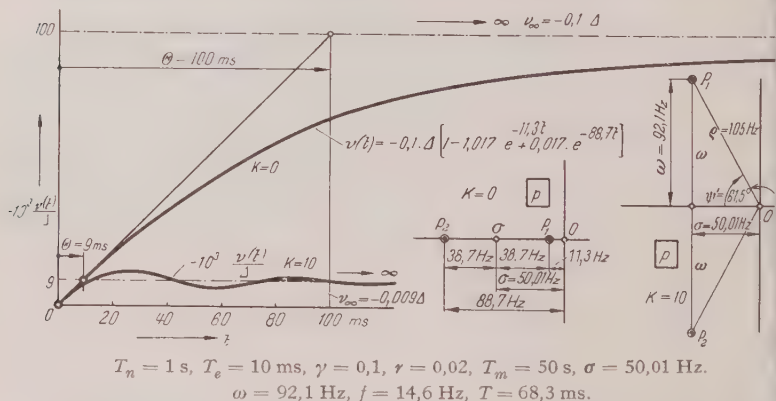
deren Lösung für reelle Wurzeln p_1, p_2 lautet:

$$\frac{v}{\Delta} = \frac{-\gamma}{1 + K + \gamma r} (1 + c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t}) \quad (3)$$

und für komplexe ($\psi' = \pi - \psi$):

$$\frac{v}{\Delta} = \frac{-\gamma}{1 + K + \gamma r} \left(1 - e^{-\sigma t} \frac{\sin(\omega t + \psi')}{\sin \psi'} \right) + \frac{1}{\omega T_n} e^{-\sigma t} \sin \omega t. \quad (3')$$

Die Figur 19 zeigt den Verlauf von v für den offenen ($K = 0$) und den geschlossenen Regelkreis mit $K = 10$, wobei für letzteren der Endwert 11mal kleiner



Figur 19

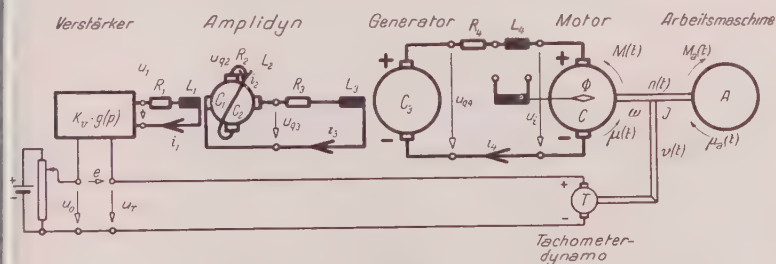
Oszillogramm der bezogenen Drehzahl $v(t)$ beim offenen und geschlossenen Regelkreis. Lage Wurzeln in der Frequenzebene.

l zudem viel schneller erreicht wird, da die Anfangstangenten für beide identisch sind. Darin liegt der Grund für die «Verkleinerung der Zeitkonstanten» bei steigendem K . Nimmt man als Zeitkonstante die Zeit bis zur Erreichung des Endwertes mit der Anfangsgeschwindigkeit, so verhalten sich diese wie 1:11.

Haben der Verstärker und der Gittersteuersatz wesentliche Zeitverzögerungen [$g(p) \neq 1$], so kann das System instabil werden.

C. Drehzahlregelung eines Walzmotors

Das folgende Zahlenbeispiel¹⁾ behandelt nach Figur 20 einen mittels einer Tachometerdynamo T , eines Verstärkers und einer Amplidynmaschine gere-



Figur 20

Schema des Walzmotorantriebes.

alten Ward-Leonard-Satz zum Konstanthalten der Drehzahl eines Walzmotors von

$P_n = 785 \text{ kW}$	Nennleistung,
$I_n = 1250 \text{ A}$	Nenngleichstrom,
$U_{in} = 628 \text{ V}$	induzierte Nennankerspannung,
$n_n = 150 \text{ U./min} = 2,5 \text{ Hz}$	Nenn Drehzahl.

Wir betrachten sukzessive die Übertragungsfunktionen der einzelnen Organe (Figur 21a).

Verstärker

$$K_v = 12, \quad g(p) = 1.$$

Amplidynmaschine

Längsfeld:	$R_1 = 80 \Omega$	$L_1 = 8 \text{ H}$	$T_1 = 0,1 \text{ s}$	$\bar{z}_1 = 1 + T_1 p$
Querfeld:	$R_2 = 1,06 \Omega$	$L_2 = 0,318 \text{ H}$	$T_2 = 0,3 \text{ s}$	$\bar{z}_2 = 1 + T_2 p$
Maschinenkonstante:	$C_1 C_2 = 2870 \Omega \Omega$			voll kompensiert.

¹⁾ HAROLD CHESTNUT und ROBERT W. MAYER, *Servomechanisms and Regulating System Design*, Bd. I (John Wiley and Sons Inc., New York und London 1951), Seite 468.

Generator

$$R_3 = 7,75 \, \Omega, \quad L_3 = 24,4 \, \text{H}, \quad T_3 = 3,15 \, \text{s} \quad C_3 = 18,5 \, \Omega, \quad \bar{z}_3 = 1 + T_3 p.$$

Motor

$$\begin{aligned} \text{Induzierte Spannung:} \quad & U_i = C \omega, \quad U_{in} = C \omega_n, \\ \text{Drehmoment:} \quad & M = C I, \quad M_n = C I_n, \\ \text{Maschinenkonstante:} \quad & C = 40 \, \text{N m A}^{-1} = 40 \, \text{Vs}, \\ \text{Winkelgeschwindigkeit:} \quad & \omega_n = 2 \pi n_n = 15,7 \, \text{Hz}. \end{aligned}$$

Stromkreis – Generator – Motor

$$\begin{aligned} \text{Widerstand:} \quad & R_4 = 12 \, \text{m}\Omega, \\ \text{Induktivität:} \quad & L_4 = 0 \quad \text{vernachlässigt.} \end{aligned}$$

Arbeitsmaschine

$$M_a = \text{konstant (Fall I von Figur 10)}, \quad g_a(p) = 0.$$

Aggregat Motor-Arbeitsmaschine

$$\begin{aligned} \text{Trägheitsmoment:} \quad & J = 6000 \, \text{kg m}^2, \\ \text{Reibung:} \quad & r = 0. \end{aligned}$$

Tachometer

$$\bar{U}_T = K_T \bar{v}, \quad K_T = 15,708 \, \text{V}.$$

In Figur 21a sind die Übertragungsfunktionen der einzelnen Glieder dargestellt. Das Zeitglied des aus beiden Ankern bestehenden Kreises ist

$$\bar{z}_4 = 1 + T_4 p \quad \text{mit} \quad T_4 = L_4 : R_4.$$

Aus Figur 21b erhält man:

$$v = G_1(p) \bar{u}_0 - G_2(p) \bar{\mu}_a,$$

$$G_1(p) = \frac{K}{K_T} \cdot \frac{g(p)}{h(p) + K g(p)}, \quad G_2(p) = \gamma \frac{\bar{z}_4}{\bar{z}} \cdot \frac{h(p)}{h(p) + K g(p)} \quad (2)$$

mit

$$z = 1 + \gamma r \bar{z}_4 \bar{z}_m, \quad \gamma = \frac{R_4 I_n}{U_{in}}, \quad (3)$$

$$h(p) = \bar{z} \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3, \quad (4)$$

$$K = \frac{K_T K_v C_1 C_2 C_3}{\omega_n C R_1 R_2 R_3} = 24,236. \quad (5)$$

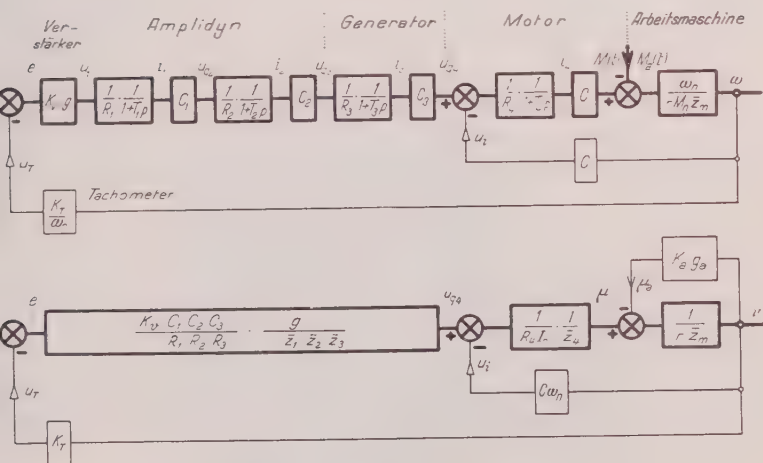
Mit der reziproken Übertragungsfunktion $h_v(p)$ des Verstärkers

$$h_v(p) = \frac{1}{g(p)} \quad (6)$$

hält man:

$$G_1(p) = \frac{K}{K_T} \cdot \frac{1}{h_v(p) \bar{h}(p) + K}, \quad (33a)$$

$$G_2 = \gamma \frac{\bar{z}_4}{z} \cdot \frac{h_v(p) \bar{h}(p)}{h_v(p) \bar{h}(p) + K}. \quad (33b)$$



Figur 21

Blockschema des Antriebes nach Figur 20.

Im vorliegenden Beispiel wurden L_4 und r vernachlässigt, damit erhält man:

$$\bar{z}_4 = 1, \quad \bar{z} = 1 - \gamma r \bar{z}_m = 1 - \gamma T_n p = 1 - T_0 p = \bar{z}_0,$$

$$T_0 = \gamma T_n = \gamma \frac{\omega_n J}{M_n} = \frac{R_4 J}{C^2} = 45 \text{ ms} \quad (34)$$

und für die Hochfahrzeit $T_n = 1,88 \text{ s}$. Der Ausdruck \bar{z} ist also in eine lineare Funktion von p übergegangen. Der Spannungsverstärkungsfaktor zwischen der Fehlerspannung E und der Quellenspannung U_{q4} des Generators beträgt

$$K_e = \frac{U_{q4}}{E} = \frac{K_v C_1 C_2 C_3}{R_1 R_2 R_3} = 969,46. \quad (35)$$

Die Übertragungsfunktionen G_1 und G_2 für den offenen Regelkreis sind besonders einfach:

$$G_1(p) = \frac{K_e}{U_{ni}} \cdot \frac{1}{h_v(p) \bar{h}(p)}, \quad (36)$$

$$G_2(p) = \gamma \frac{\bar{z}_4}{z} = \gamma \frac{1}{\bar{z}_0}. \quad (37)$$

Das Produkt $h(p)$ der vier Zeitglieder ist in der Kenneleyschen Schreibweise

$$h(p) = \bar{z}_0 \bar{z}_1 z_2 z_3 = (1 + T_0 p) (1 + T_1 p) (1 + T_2 p) (1 + T_3 p),$$

$$h(p) = \prod_v A_v / \sum_v \varphi_v = H / \underline{\varphi}, \quad \bar{z}_v = 1 + T_v p = A_v / \underline{\varphi}_v.$$

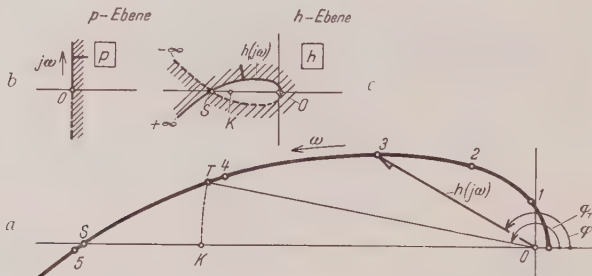
Die Eigenfrequenzen des gesamten Systems ergeben sich aus den Nullstellen von

$$h_v(p) h(p) + K = 0. \quad (3)$$

Der für viele Servoprobleme charakteristische Ausdruck $h_v(p) h(p)$ ist oft ein Produkt von linearen und quadratischen Gliedern in p . Ist speziell $g(p) =$ so wird

$$h(p) = -K. \quad (3')$$

Wenn die vier Wurzeln dieser Gleichung negative Realteile haben, so ist das System stabil. Will man die Bestimmung dieser Wurzeln vermeiden, so muß man eines der Stabilitätskriterien anwenden. Wir zeichnen beispielsweise das Bild der Geraden $p = j\omega$, also die komplexe Frequenzgangskurve $h(j\omega)$ der h -Ebene, Figur 22a (Leonhard-Kurve). Die rechte p -Halbebene (Figur 22c) geht dabei in das schraffierte Gebiet (Figur 22c) über. Da nun der Punkt



Figur 22

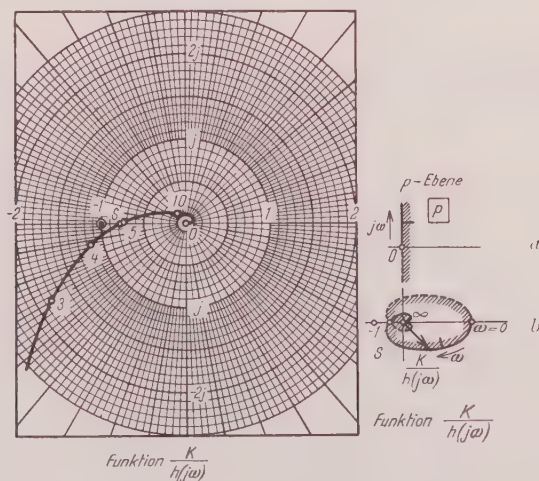
Leonhard-Kurve der Funktion $h(p)$.

$$h(j\omega) = (1 + 0,045 j\omega) (1 + 0,1 j\omega) (1 + 0,3 j\omega) (1 + 3,15 j\omega) = H e^{i\varphi}$$

ω	0,3	1	2	3	4	5	10
H	1,38	3,46	7,60	13,4	21,3	33,6	154,2
φ	$51^\circ 04'$	$97^\circ 24'$	$128^\circ 26'$	$150^\circ 22'$	$167^\circ 43'$	$181^\circ 53'$	229°

$K = -24,24$) im nichtschraffierten Gebiet liegt, ist das System stabil. Der höchstzulässige Wert des Verstärkungsfaktors K der Schleife liegt bei 33,2, wenn der Punkt K auf den Schnittpunkt S fällt. Die Marge ist also nicht sehr gross. Will man vorsichtig sein, so wird man ein stabilisierendes, phasendrehendes Glied einbauen.

Die Nyquist-Methode verlangt nach Gleichung (33a), (33b) oder (38) das Aufzeichnen der Kurve $[K: h_v(j\omega) h(j\omega)]$, wofür in den USA Vordrucke ver-



Figur 23
Nyquist-Diagramm.

endet werden¹⁾. Befindet sich wie in den Figuren 23 und 23b der Punkt $-1/0j$ ausserhalb der schraffierten Fläche, so liegt Stabilität vor. Figur 24 zeigt schliesslich die doppellogarithmische Darstellung der Amplitude H und Phase q von $h(j\omega)$ sowie den zugehörigen charakteristischen Polygonzug der Asymptoten nach BODE. Man sucht hier den Schnittpunkt S für $q = \pi$ und ermittelt, ob der zugehörige Amplitudenwert $H(S)$ grösser als K ist. Oder man geht zu, ähnlich wie in Figur 22, ob die Phase q_T des Punktes T für $H = K$ kleiner als π ist.

Noch einige Zahlenwerte zur Erläuterung der Präzision. Die Quellenspannung des Generators beträgt bei Nennbetrieb $R_4 I_n = 15$ V mehr als die induzierte Motorspannung $U_{ni} = 628$ V. Im offenen Regelkreis steigt deshalb bei

¹⁾ HAROLD CHESTNUT UND ROBERT W. MAYER, *Servomechanisms and Regulating System Design*, Bd. I (John Wiley and Sons Inc., New York und London 1951), Seite 468.

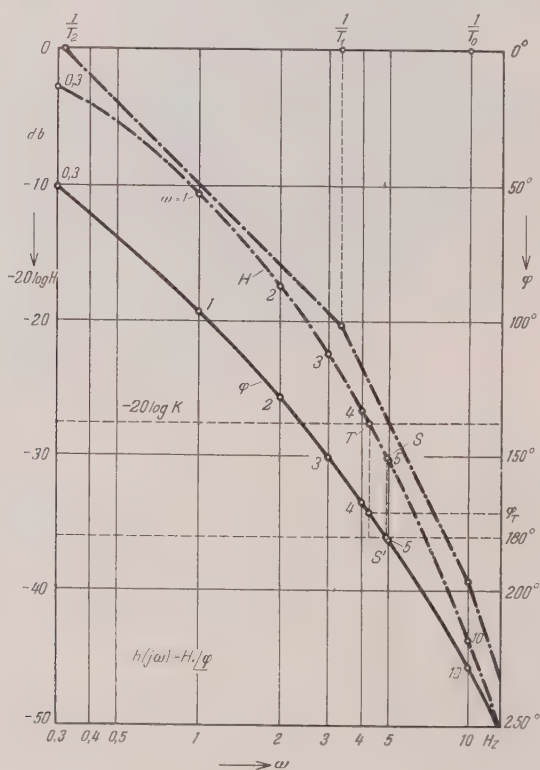
voller Entlastung die Drehzahl um

$$\gamma' = \frac{R_4 I_n}{U_{n1}} = \frac{\Delta \omega}{\omega_n} = 2,39\%.$$

Die Spannung $\bar{U}_0 = E$ ist dabei $K_e = 969,46$ mal kleiner und beträgt 663,3 mV. Wie sich aus (32) und (33b) für $\Delta \mu_a = 1$ und $\bar{U}_0 = 0$ entnehmen lässt, beträgt im geschlossenen Regelkreis bei voller Entlastung die Drehzahlerhöhung

$$\Delta \nu = \frac{\gamma}{1 + K} = 0,95\%;$$

wir haben also eine Ein-Promille-Steuerung. Bei voller Entlastung von der Nennleistung steigt die induzierte Spannung von 628 V um 0,95% an.



Figur 24
Bode-Diagramm.

4 V, während gleichzeitig die Quellenspannung U_{q1} von 643 V auf diesen zurückgeht. Die Tachometerspannung U_T steigt ebenfalls um $0,95\%$ von 15,723 V auf 15,723 V. Diese minime Änderung um nur 14,9 mV bewirkt also eine Änderung der mechanischen Leistung um 785 kW. Dabei bleibt die Quellenspannung konstant bei $U_0 = 16,371$ V, während die Fehlerspannung von 663,3 mV auf $E_0 = 648,4$ mV zurückgeht. Sie ist ja proportional zu $1/969,46$ mal kleiner. Man kann daraus ermessen, welche hohen Anforderungen an die Präzision und Konstanz aller Teile des gesamten Regelkreises zu stellen werden.

Die Drehzahl $r = v_a$ nach den Figuren 10 und 21 b durch $K_a g_a(p)$ mit dem Drehmoment μ_a verknüpft, so ergibt sich aus (32) eine zu (4c) analoge Beziehung:

$$\bar{r} = \frac{G_1(p)}{1 + [\gamma \bar{z}_1 K_a \bar{g}_a(p)/\bar{z} + K g(p)]}$$

Setzt sich $K_a g_a(p)$ zeitlich, so resultiert eine nichtlineare Differentialgleichung.

Bei der experimentellen Untersuchung des Frequenzganges von Servosystemen kommt gegenüber der Rechnung weitere Einflüsse, wie Wirbelströme, die mechanische Hysterese, die Reibung usw. Wie man aus den Werten von ω der Tabelle 24 ersieht, benötigt man hierfür zur Untersuchung grösserer Aggregate Motoren mit sinusförmiger Spannung und enorm kleiner Frequenz, zum Beispiel 0,1... 10 Hz.

Da die Eisensättigung mit berücksichtigt werden, so müssen zur Behandlung der dadurch auftretenden nichtlinearen Differentialgleichungen Analogiegeräte mit nichtlinearen Gliedern herausgezogen werden.

Résumé

Cette étude traite trois exemples tirés de l'électro-servotechnique. On construit d'abord dans un graphique les caractéristiques extérieures d'un générateur réglé en circuit fermé. Puis on discute le réglage automatique du nombre de tours du moteur commandé par un redresseur. Enfin le réglage en circuit fermé d'un moteur accouplé à un laminoire est traité par un calcul numérique; les différentes méthodes de stabiliser permettent de déterminer l'amplification de limite.

Ergangen: 31. März 1954.)

Deformations Possible in Every Isotropic, Incompressible Perfectly Elastic Body

By JERALD LAVERNE ERICKSEN, Washington, D.C., U.S.A.¹⁾

1. Introduction

The problem considered here is that of determining deformations which can be produced in every isotropic, incompressible, perfectly elastic body by the application of surface tractions when there is no body force acting. Examples of such deformations may be found in the general solutions for homogeneous deformation [1]²⁾, [2], torsion of a right circular cylinder [1], [3], bending of a block [4], deformation of a spherical shell subject to internal and external pressures [5], and in a five-parameter family of solutions recently obtained for materials possessing transverse isotropy [6]. These latter solutions were discovered in an attempt to solve the problem discussed here. Three of the solutions obtained here are new.

Let the points of an undeformed elastic body be assigned coordinates X^a in a coordinate system with metric tensor³⁾ G_{ab} . Suppose the body is subject to a deformation, and let the points of the deformed body be assigned coordinates x^i in any independently selected coordinate system with metric tensor g_{ij} . Greek indices always refer to the coordinates X^a , Latin to the coordinates x^i . It is assumed that the deformation is described by a one-to-one mapping,

$$x^i = x^i(X^a), \quad (1)$$

which is at least three times continuously differentiable.

When the inertial and body forces vanish, the equations governing the behavior of a material of the type considered here become

$$t_{ij}^j = 0, \quad (1)$$

$$t_i^i = -p \delta_i^i - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} (c^{-1})_i^i - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} c_i^i, \quad (1)$$

$$|c_j^i| = 1, \quad (1)$$

¹⁾ Applied Mathematics Branch, Mechanics Division, Naval Research Laboratory.

²⁾ Numbers in brackets refer to the Bibliography on page 489.

³⁾ We use standard tensorial notation. See, e.g., [7].

where t_j^i is the stress tensor, p is an arbitrary pressure, $|c_j^i|$ is the determinant of the matrix $\|c_j^i\|$ of the tensor c_j^i ,

$$c_{ij} = G_{\alpha\beta} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial X^\beta}{\partial x^j}, \quad (1.5)$$

$$(c^{-1})^{ij} = G^{\alpha\beta} \frac{\partial x^i}{\partial X^\alpha} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial X^\beta}, \quad (1.6)$$

$$I = (c^{-1})_i^i, \quad II = \frac{1}{2} [I^2 - (c^{-1})^{ij} (c^{-1})_{ij}], \quad (1.7)$$

and $\Sigma = \Sigma(I, II)$ is the strain energy, assumed to be at least three times continuously differentiable with respect to I and II . As is easily verified,

$$(c^{-1})^{ij} c_{jk} = \delta_k^i. \quad (1.8)$$

Since we are working in Euclidean space, the Riemann tensor based on $G_{\alpha\beta}$ vanishes. It then follows from (1.5) that the Riemann tensor R_{ijkl} based on c_{ij} must vanish. Analytically¹⁾,

$$R_{ijkl} = 2 \left(-\frac{\partial^2 c_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 c_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 c_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 c_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} \right) - (c^{-1})^{mn} \left[\left(\frac{\partial c_{jm}}{\partial x^k} + \frac{\partial c_{km}}{\partial x^j} - \frac{\partial c_{jk}}{\partial x^m} \right) \left(\frac{\partial c_{in}}{\partial x^l} + \frac{\partial c_{ln}}{\partial x^i} - \frac{\partial c_{il}}{\partial x^n} \right) - \left(\frac{\partial c_{jm}}{\partial x^l} + \frac{\partial c_{lm}}{\partial x^j} - \frac{\partial c_{jl}}{\partial x^m} \right) \times \left(\frac{\partial c_{in}}{\partial x^k} + \frac{\partial c_{kn}}{\partial x^i} - \frac{\partial c_{ik}}{\partial x^n} \right) \right] = 0. \quad (1.9)$$

For R_{ijkl} to be the zero tensor, it is necessary and sufficient that the six components $R_{1212}, R_{2323}, R_{3131}, R_{1223}, R_{2331}, R_{3112}$ vanish.

Suppose we are given a symmetric tensor c_{ij} such that the matrix $|c_{ij}|$ is positive definite. We can then use (1.8) to determine $(c^{-1})^{ij}$. If these tensors satisfy (1.9), and if $G_{\alpha\beta}$ is a given Euclidean metric tensor, there will exist, at least locally, a mapping of the form (1.1) such that (1.5) and (1.6) are satisfied. In order that c_{ij} determine deformations²⁾ possible in an incompressible material, it must satisfy (1.4). Suppose these kinematical conditions are satisfied and that the function $\Sigma(I, II)$ is specified. Then, if it is possible to determine t_j^i and p such that (1.2) and (1.3) are satisfied, c_{ij} corresponds to a deformation possible in a material for which Σ is the strain energy. Even if such a deter-

¹⁾ TRUESDELL has compiled a long list of papers in which equations (1.9) or equations equivalent to these are discussed. See Math. Rev. 12, 556 (1951).

²⁾ As is well known, c_{ij} determines the deformation only to within a rigid motion of the undeformed material.

mination be possible for one choice of Σ , it will not, in general, be possible for arbitrary choices of Σ . We will determine the exceptional tensors c_{ij} such that this determination is possible for every choice of Σ under rather weak restrictions on the form of c_{ij} . We shall compute the corresponding stresses and describe a simple physical situation to which the solution applies in some cases where such information is not available in the literature.

We shall make use of the fact that a matrix of the form

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

is positive definite if and only if $a > 0$, $b > 0$, and $bd > c^2$. Also, if u_i and v_i are two vectors such that $u_i v_i = u_i v_i$, and if v_i is not the null vector, then there exists a scalar $\lambda = u_i v^i / v^i v_i$ such that $u_i = \lambda v_i$. If $u_i = u_{,i}$ and $v_i = v_{,i}$, where u and v are scalars, then λ and u must be functions of v . If u_i and v_i are both null vectors then, of course, $u_i = \lambda v_i$ holds for any λ .

2. Differential Equations Determining the Exceptional Tensors c

From (1.2) and (1.3),

$$\begin{aligned} p^{ij} = & 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} (c^{-1})^{ij} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} c^{ij} + 2 \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I^2} I_{,i} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I \partial II} II_{,i} \right) (c^{-1})^{ij} \\ & - 2 \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I \partial II} I_{,j} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial II^2} II_{,j} \right) c^{ij}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Differentiating (2.1), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{p}_{i,jk} = & a_{ik}^1 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} + a_{ik}^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} + a_{ik}^3 \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I^2} + a_{ik}^4 \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I \partial II} + a_{ik}^5 \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial II^2} \\ & + a_{ik}^6 \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial I^3} + a_{ik}^7 \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial I^2 \partial II} + a_{ik}^8 \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial I \partial II^2} + a_{ik}^9 \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial II^3}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

where

$$\begin{aligned} a_{ik}^1 &= (c^{-1})^j_{i,jk}, \\ a_{ik}^2 &= c^j_{i,jk}, \\ a_{ik}^3 &= I_{,k} (c^{-1})^j_{i,j} + [I_{,j} (c^{-1})^j_i]_{,k}, \\ a_{ik}^4 &= II_{,k} (c^{-1})^j_{i,j} - I_{,k} c^j_{i,j} + [II_{,j} (c^{-1})^j_i]_{,k} - (I_{,j} c^j_i)_{,k}, \\ a_{ik}^5 &= -II_{,k} c^j_{i,j} - (II_{,j} c^j_i)_{,k}, \end{aligned}$$

$$a_{ik}^6 = I_{,k} I_{,j} (c^{-1})_i^j,$$

$$a_{ik}^7 = II_{,k} I_{,j} (c^{-1})_i^j + I_{,k} II_{,j} (c^{-1})_i^j - I_{,k} I_{,j} c_i^j,$$

$$a_{ik}^8 = II_{,k} II_{,j} (c^{-1})_i^j - II_{,k} I_{,j} c_i^j - I_{,k} II_{,j} c_i^j,$$

$$a_{ik}^9 = II_{,k} II_{,j} c_i^j.$$

order that there exist a function p satisfying (2.1), it is necessary and sufficient that the right member of (2.2) be a symmetric tensor. Suppose c_{ij} such that this condition is satisfied for every choice of the function $\Sigma(I, II)$. At a given point P , I and II have definite values, and we can choose Σ such that all but one of the derivatives of Σ occurring in (2.2) vanish at P . It then follows easily that the tensor which is multiplied by the non-zero derivative must be symmetric at P . It is thus clear each of the tensors $a_{ik}^1, \dots, a_{ik}^9$ must be symmetric. We must thus determine symmetric tensors c_{ij} which satisfy (2.4) and (1.9), which are such that the matrix c_{ij} is positive definite, and such that each of the tensors $a_{ik}^1, \dots, a_{ik}^9$ is symmetric.

Suppose that I and II are not both constant, and exclude isolated points where $I_{,i} = II_{,i} = 0$. The condition that a_{ik}^9 be symmetric is

$$II_{,k} II_{,j} c_i^j = II_{,i} II_{,j} c_k^j,$$

and $II_{,i} = 0$ implies that $II_{,j} c_i^j = 0$. Thus there exists a scalar A such that

$$II_{,j} c_i^j = A II_{,i}. \quad (2.3)$$

Either $II_{,i} = 0$ or $II_{,i}$ is an eigenvector of c_j^i and A is the corresponding eigenvalue. Since the eigenvectors of c_j^i and its inverse, $(c^{-1})_j^i$, coincide either $II_{,i} = 0$ or $II_{,i}$ is an eigenvector of $(c^{-1})_j^i$. A similar analysis applied to a_{ik}^6 shows that either $I_{,i} = 0$, or $I_{,i}$ is an eigenvector of $(c^{-1})_j^i$, hence of c_j^i . Thus

$$I_{,j} c_i^j = \bar{A} I_{,i}, \quad (2.4)$$

where \bar{A} is the eigenvalue corresponding to $I_{,i}$ unless $I_{,i} = 0$, in which case \bar{A} is arbitrary. Setting the anti-symmetric part of a_{ik}^8 equal to zero, then using the above results, we obtain

$$(A - \bar{A})(II_{,k} I_{,i} - I_{,k} II_{,i}) = 0. \quad (2.5)$$

We assert that we can take $A = \bar{A}$. This is clearly true if $I_{,i} = 0$ or $II_{,i} = 0$. If then A or \bar{A} is arbitrary. Suppose neither $I_{,i} = 0$ nor $II_{,i} = 0$ and that $A \neq \bar{A}$. Then (2.5) implies that $I_{,i}$ and $II_{,i}$ are parallel. But $I_{,i}$ and $II_{,i}$, being eigenvectors of c_j^i corresponding to distinct eigenvalues, are perpendicular, so we are led to a contradiction. Thus $A = \bar{A}$. We next assert that I and II must

be functionally dependent. If I or II is constant, the assertion follows. If not, and if all the eigenvalues of c_i^j are distinct, then $I_{,i}$ and $II_{,i}$, being eigenvectors of c_i^j corresponding to the same eigenvalue, are parallel. Thus I and II are functionally dependent. Let c_1, c_2, c_3 be the eigenvalues of c_i^j . Then, from (1

$$I = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}, \quad II = \frac{1}{c_1 c_2} + \frac{1}{c_2 c_3} + \frac{1}{c_3 c_1}, \quad (2.6)$$

and, from (1.4),

$$c_1 c_2 c_3 = 1. \quad (2.7)$$

In a region where c_i^j has equal eigenvalues, it follows from these equations that I and II are functionally dependent, so the assertion is true. Thus there exists a nonconstant function B such that $I = I(B)$, $II = II(B)$. From (2.6) and (2.7), we then have $c_1 = c_1(B)$, $c_2 = c_2(B)$, $c_3 = c_3(B)$. We assume the notation chosen so that $A = \dot{A} = c_1$. Then (2.3) and (2.4) yield

$$B_{,j} c_i^j = c_1 B_{,i}. \quad (2.8)$$

Now

$$\begin{aligned} a_{ik}^5 &= -II' B_{,k} c_{i,j}^j - (II' B_{,j} c_i^j)_{,k} \\ &= -II' B_{,k} c_{i,j}^j - (II' c_1 B_{,i})_{,k} \\ &= -II' B_{,k} c_{i,j}^j - (II' c_1)' B_{,i} B_{,k} - II' c_1 B_{,ik}, \end{aligned}$$

where primes denote differentiation with respect to B . Thus, in order that a_{ik}^5 be symmetric, we must have

$$II' (B_{,k} c_{i,j}^j - B_{,i} c_{k,j}^j) = 0.$$

Thus either II is constant, or there exists a scalar D such that

$$c_{i,j}^j = D B_{,i}. \quad (2.9)$$

A similar analysis applied to a_{ik}^3 yields

$$I' [B_{,k} (c^{-1})_{i,j}^j - B_{,i} (c^{-1})_{k,j}^j] = 0,$$

so either I is constant, or there exists a scalar E such that

$$(c^{-1})_{i,j}^j = E B_{,i}. \quad (2.10)$$

In order that a_{ik}^4 be symmetric, (2.9) and (2.10) must hold when I or II is constant, so these conditions hold generally. For the anti-symmetric part of a_{ik}^2 to vanish, c_i^j must be the gradient of a scalar. This condition, together with (2.8), implies that $D = D(B)$. Similarly, the symmetry of a_{ik}^1 requires that $E = E(B)$.

Now c_j^i and $(c^{-1})_j^i$ can be written in the form

$$c_j^i = c_1 a^i a_j + c_2 b^i b_j + c_3 c^i c_j, \quad (2.11)$$

$$(c^{-1})_j^i = \frac{1}{c_1} a^i a_j + \frac{1}{c_2} b^i b_j + \frac{1}{c_3} c^i c_j, \quad (2.12)$$

where a^i , b^i , and c^i are mutually orthogonal unit eigenvectors of c . It follows from (2.8) that we may take

$$a_i = \frac{B_{,i}}{\sqrt{B_{,k} B_{,k}}}. \quad (2.13)$$

So, since a^i , b^i , and c^i are mutually orthogonal unit vectors,

$$\delta_j^i = a^i a_j + b^i b_j + c^i c_j. \quad (2.14)$$

From equations (2.11) to (2.14),

$$c_{ij} = (c_1 - c_3) \frac{B_{,i} B_{,j}}{B_{,k} B_{,k}} + (c_2 - c_3) b_i b_j + c_3 g_{ij}, \quad (2.15)$$

$$(c^{-1})^{ij} = \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_3} \right) \frac{B^{,i} B^{,j}}{B^{,k} B^{,k}} + \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3} \right) b^i b^j + \frac{1}{c_3} g^{ij}. \quad (2.16)$$

Substituting the expression for c_{ij} given by (2.15) into (2.9) and using the fact that $B_{,i}$ and b_i are orthogonal, we obtain

$$(c_1 - c_3) \left(\frac{B^{,i} B^{,j}}{B^{,k} B^{,k}} \right)_{,i} + (c_2 - c_3) (b^i b^j)_{,i} = (D - c'_1) B^{,j},$$

while (2.10) and (2.16) yield

$$\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_3} \right) \left(\frac{B^{,i} B^{,j}}{B^{,k} B^{,k}} \right)_{,i} - \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3} \right) (b^i b^j)_{,i} = \left[E - \left(\frac{1}{c_1} \right)' \right] B^{,j}.$$

In order that these equations hold simultaneously, we must have

$$\left(\frac{B^{,i} B^{,j}}{B^{,k} B^{,k}} \right)_{,i} = F(B) B^{,j} \quad \text{if } c_1 = c_3, \quad (b^i b^j)_{,i} = G(B) B^{,j} \quad \text{if } c_2 = c_3.$$

Here F and G are rational functions of c_1 , c_2 , c_3 , D , E , and c'_1 .

To recapitulate, we have shown that, if I and II are not both constant, the following conditions must be satisfied:

$$c_1 = c_1(B), \quad c_2 = c_2(B), \quad c_3 = c_3(B), \quad (2.17)$$

$$c_1 c_2 c_3 = 1, \quad (2.18)$$

$$b_i b^i = 1, \quad (2.19)$$

$$B_{,i} b^i = 0, \quad (2.15)$$

$$\begin{pmatrix} B^{,i} B^{,j} \\ B^{,k} B_{,k} \end{pmatrix}_{,i} = F(B) B^{,j} \quad \text{if } c_1 \neq c_3, \quad (2.16)$$

$$(b^i b^j)_{,i} = G(B) B^{,j} \quad \text{if } c_2 \neq c_3, \quad (2.17)$$

Also, c_{ij} must be positive definite. If these conditions are satisfied, tensors c_{ij} and $(c^{-1})^{ij}$ given by (2.15) and (2.16) are such that each of tensors $a^1_{ik}, \dots, a^9_{ik}$ is symmetric. Furthermore, (1.4) is satisfied.

If I and II are both constant, we can not be sure that these equations hold. If they do, it follows from the analysis made in the following sections that c_{ij} is a constant tensor. It seems very likely that a deformation for which I, and $|c^i_j|$ are constant must necessarily be homogeneous, so that c_{ij} is a constant tensor. Certainly one can always determine a homogeneous deformation which I, II, and $|c^i_j|$ take on prescribed values, provided only that the values be consistent with the requirement that $|c_{ij}|$ be positive definite would be of some interest to prove a general theorem from which the result conjectured here follows as a special case, namely that the invariants I, and $|c^i_j|$ determine the deformation to within a rigid motion of the material as a whole. It is well known that, if these invariants are equal for two tensors $\mathbf{c} = c_{ij}$ and $\bar{\mathbf{c}} = \bar{c}_{ij}$, then there exists an orthogonal matrix \mathbf{a} such that $\mathbf{c} = \mathbf{a}^{-1} \bar{\mathbf{c}} \mathbf{a}$ [8]. The difficulty arises in showing that, if \mathbf{c} and $\bar{\mathbf{c}}$ satisfy (1.1) then \mathbf{a} is constant.

Since solutions corresponding to deformations for which c_{ij} is constant are discussed in [1] and [2], we shall not discuss them here.

3. Remarks Concerning Solutions of Equations (2.19) to (2.22)

From (2.13) and (2.21),

$$a^i_{,i} a^j + a^j_{,i} a^i = F \sqrt{B^{,k} B_{,k}} a^j,$$

so a^i and $a^j_{,i} a^i$ are linearly dependent. But, since a^i is a unit vector, $a^j_{,i} a^i$ are perpendicular, hence linearly independent unless

$$a^j_{,i} a^i = 0. \quad (3.1)$$

Thus

$$a^i_{,i} = F \sqrt{B^{,k} B_{,k}}. \quad (3.2)$$

Equations (2.13) and (3.1) yield

$$(B^{,i} B_{,i})_{,j} = 2 (B^{,i} B_{,i})^{-1} (B^{,k} B_{,kl} B^{,l}) B_{,j},$$

in which it follows that $B^{-1} B_{,i}$ is a function of B , $B^{-1} B_{,i} = H(B)$. Then (2) becomes

$$a'_{,i} = F H. \quad (3.3)$$

so,

$$a_{i,j} = \left(\frac{B_{,i}}{H} \right)_{,j} = \frac{B_{,ij}}{H} - B_{,i} B_{,j} \frac{H'}{H^2} = a_{j,i}. \quad (3.4)$$

Using the divergence of (3.1), then using (3.3) and (3.4), we obtain

$$(a'_{,i} a^i)_{,j} = a'_{,ji} a^i + a'_{,i} a^i_{,j} = (F H)' H + a^{i,j} a_{i,j} = 0. \quad (3.5)$$

We assert that the surfaces $B = \text{const}$ are surfaces of constant mean and Gaussian curvature. The constancy of the mean curvature follows from (3.3) and the fact that $\frac{1}{2} a'_{,i}$ is the mean curvature ϱ . The Gaussian curvature (given by¹⁾)

$$\frac{1}{2} [(a'_{,i})^2 - a^{i,j} a_{i,j} - a'_{,i} a^i a'_{,k} a^k], \quad (3.6)$$

which, by (3.1), (3.3), and (3.5) is a function of B , so the assertion is proved.

Suppose the mean and Gaussian curvatures of a surface S are constant. Then the principal curvatures $1/\varrho_1$ and $1/\varrho_2$ of S are constant²⁾. Introduce surface coordinates (u^1, u^2) such that the coordinate curves are lines of curvature. Then, on S , the metric tensor \mathbf{g} and second fundamental tensor \mathbf{d} are of the form

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ \varrho_1 & \\ 0 & g_{22} \\ & \varrho_2 \end{bmatrix},$$

and the Mainardi-Codazzi relations become

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^2} \cdot \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right) \frac{\partial \log g_{11}}{\partial u^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial u^1} \cdot \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} \right) \frac{\partial \log g_{22}}{\partial u^1} &= 0. \end{aligned}$$

¹⁾ That (3.6) gives the Gaussian curvature of a surface with unit normal a^i can be seen by using the equation of the surface in the form $z = h(x, y) = 0$, where (x, y, z) are rectangular Cartesian coordinates, and using the fact that

$$a_x = \mp \frac{p}{\sqrt{1 - p^2 - q^2}}, \quad a_y = \mp \frac{q}{\sqrt{1 - p^2 - q^2}}, \quad a_z = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - p^2 - q^2}},$$

where $p = \partial z / \partial x$, $q = \partial z / \partial y$. The expression (3.6) then reduces to the well known form

$$\frac{r t - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad \text{where } r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

²⁾ The equations and theorems of differential geometry used in this discussion may be found [10], pp. 150, 217–221, 225, 228–230.

Since $1/q_1$ and $1/q_2$ are constant, either $1/q_1 = 1/q_2$, in which case S is a plane or a sphere, or $g_{11} = g_{11}(u^1)$, $g_{22} = g_{22}(u^2)$. In the latter case, we can reparameterize the coordinate curves so that $g_{11} - g_{22} = 1$. GAUSS's equation then requires that $1/q_1 q_2 = 0$. Assuming the notation chosen so that $1/q_2 = 0$, we have

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where q_1 is a constant. It then follows that, in a suitably chosen rectangular Cartesian coordinate system (x, y, z) , S is given parametrically by

$$x = q_1 \cos \frac{u^1}{q_1}, \quad y = q_1 \sin \frac{u^1}{q_1}, \quad z = u^2,$$

so S is a right circular cylinder. Thus the surfaces $B = \text{const}$ are sphere planes, or right circular cylinders.

Now consider the curves $x^i = x^i(s)$ satisfying the differential equation

$$\frac{dx^i}{ds} = a^i. \quad (3.1)$$

Taking the absolute derivative of (3.7) and using (3.1), we obtain

$$\frac{D}{ds} \cdot \frac{dx^i}{ds} = \frac{Da^i}{ds} = a^i_{,j} \frac{dx^j}{ds} = a^i_{,j} a^j = 0,$$

which is a sufficient condition that these curves be straight lines. Thus there exists a congruence of straight lines normal to the surfaces $B = \text{const}$. For this condition to be compatible with the results obtained above, the surfaces $B = \text{const}$ must be concentric spheres, parallel planes, or concentric circular cylinders.

Let us digress for a moment and consider a problem in fluid dynamics which is solved by this analysis. If there are no body forces acting, the steady irrotational motion of an ideal fluid with a barotropic equation of state is governed by the equations

$$B_{,ij} B^{,j} = \frac{1}{\rho} p_{,i}, \quad \rho = \rho(p), \quad (\rho B^{,i})_{,i} = 0, \quad (3.2)$$

where B is the velocity potential, ρ the density, and p the pressure. It follows from these equations that

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 = \text{const}$$

and

$$\left(\frac{B^{,i} B^{,j}}{B^{,k} B^{,k}} \right)_{,i} = - \frac{v_{,j} B^{,j}}{v^2} \left(2 + v^2 \frac{d\rho}{dp} \right) B^{,i} + \frac{v^{,i}}{v}, \quad (3.3)$$

ere $v = \sqrt{B_{,k} B_{,k}}$ is the speed. Consider the problem of determining all flows of this type for which the speed is constant over the equipotential surfaces, $v = v(B)$. Then (3.10) reduces to

$$\left(\frac{B_{,i} B_{,j}}{B_{,k} B_{,k}} \right)_{,j} = - \frac{v'}{v} \left(1 + v^2 \frac{d\rho}{dp} \right) B_{,i}.$$

From (3.8) and (3.9), ρ and p are functions of v , hence of B , so

$$- \frac{v'}{v} \left(1 + v^2 \frac{d\rho}{dp} \right) = F(B).$$

Since the equipotential surfaces are concentric spheres, parallel planes, or concentric circular cylinders. Since these flows are well known, we shall not discuss them further.

Let us now consider (2.19), (2.20), and (2.22). From (2.22),

$$b_{i,i} b^i + b_{,i}^i b^i = G(B) B_{,i}. \quad (3.11)$$

Multiplying (3.11) by b_j , summing on j , then using (2.19) and (2.20), we obtain

$$b_{i,i}^i = 0, \quad (3.12)$$

that

$$b_{i,i} b^i = (b_{i,i} - b_{i,i}) b^i = \left(\frac{\partial b_j}{\partial x^i} - \frac{\partial b_i}{\partial x^j} \right) b^i = P_{,j}, \quad (3.13)$$

where $P = \int G dB$. But (3.12) and (3.13) are the equations governing the steady motion of a fluid of unit density, subject to no body force, if b_i be interpreted as the velocity vector, P the pressure. By (2.19) the speed is constant. Suppose there exists a family of surfaces $\psi = \text{const}$ to which b_i is normal. Then, by PRIG's generalization [11] of a result due to HAMEL [12], $\psi = \psi(a\theta + bz)$, where a and b are constants and (r, θ, z) are cylindrical coordinates. From (2.19), b_i is a unit vector, so

$$b_i = \pm \frac{\psi_{,i}}{\sqrt{\psi_{,k} \psi_{,k}}}.$$

Thus

$$b_r = 0, \quad b_\theta = \pm \frac{a r}{\sqrt{a^2 + b^2 r^2}}, \quad b_z = \pm \frac{b r}{\sqrt{a^2 + b^2 r^2}}. \quad (3.14)$$

Equation (2.20) then yields

$$a \frac{\partial B}{\partial \theta} + b r^2 \frac{\partial B}{\partial z} = 0,$$

so that

$$B = B(r, a z - b r^2 \theta). \quad (3.15)$$

Since this result does not hold unless there exists a family of surfaces to which b_i is normal, we shall not use it when a more general analysis can be made.

4. The Case where the Eigenvalues of c_{ij} are Distinct

When the eigenvalues of c_{ij} are all distinct, (2.21), (3.12), and (3.13) hold. As was shown in section 3, the surfaces $B = \text{const}$ are then concentric spheres, parallel planes, or concentric circular cylinders. Suppose they are concentric spheres and choose a spherical coordinate system $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$ in which $B = B(r)$. From (2.20),

$$B_{,i} b^i = B_{,r} b^r = 0,$$

so $b^r = 0$. From (2.19)

$$g^{ij} b_i b_j = \frac{b_\theta^2}{r^2} + \frac{b_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} = 1.$$

We thus have

$$b_r = 0, \quad b_\theta = r \cos \psi_1, \quad b_\varphi = r \sin \theta \sin \psi_1, \quad (4.1)$$

where ψ_1 is some function of the coordinates. Equations (3.12) and (4.1) yield

$$b_{,i}^i = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial \sin \theta \cos \psi_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \sin \psi_1}{\partial \varphi} \right] = 0. \quad (4.2)$$

From (3.13) and (4.1)

$$\left(\frac{\partial b_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial b_\varphi}{\partial \theta} \right) b^\varphi = \left(\frac{\partial b_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial b_\varphi}{\partial \theta} \right) b^\theta = 0,$$

so

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial b_\varphi}{\partial \theta} = r \left[\frac{\partial \cos \psi_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial \sin \theta \sin \psi_1}{\partial \theta} \right] = 0. \quad (4.3)$$

Now (4.2) and (4.3) require that

$$\cos \psi_1 \left(\cos \theta + \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \right) - \sin \psi_1 \sin \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = 0,$$

$$\sin \psi_1 \left(\cos \theta + \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \right) + \cos \psi_1 \sin \theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = 0.$$

For these equations to be satisfied simultaneously, we must have

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} = -\cos \theta.$$

Since these equations admit no solution, this case cannot occur.

We next consider the case where the surfaces $B = \text{const}$ are parallel planes and introduce a rectangular Cartesian coordinate system $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ in which $B = B(x)$. By an analysis similar to that given above, we find that

$$b_x = 0, \quad b_y = \cos \psi_2, \quad b_z = \sin \psi_2, \quad (4.4)$$

are $\psi_2 = \psi_2(x)$. Using (2.15) to (2.18) and (4.4) to calculate c_i and $(c^{-1})^i$, find that

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{HK-J^2} & 0 & 0 \\ 0 & H & J \\ 0 & J & K \end{pmatrix}, \\ (c^{-1})^{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{K}{HK-J^2} & -\frac{J}{HK-J^2} \\ 0 & -\frac{J}{HK-J^2} & \frac{H}{HK-J^2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

where

$$\begin{aligned} H &= (c_2 - c_3) \cos^2 \psi_2 + c_3, \\ J &= (c_2 - c_3) \cos \psi_2 \sin \psi_2, \\ K &= (c_2 - c_3) \sin^2 \psi_2 + c_3, \end{aligned}$$

functions of x . Making these substitutions in (1.9), we obtain, after some simplification,

$$H'' = J'' = K'' = 0, \quad J'^2 = H' K',$$

where primes denote differentiation with respect to x . Thus

$$\begin{aligned} H &= a_1 x + a_2, \quad J = a_3 x + a_4, \quad K = a_5 x + a_6, \\ H K - J^2 &= (a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4) x + a_2 a_6 - a_4^2, \end{aligned}$$

where the a 's are constants such that

$$a_3^2 = a_1 a_5. \quad (4.6)$$

We exclude the case where c_{ij} is a constant tensor, that is where $a_1 = a_3 = a_5 = 0$. We now introduce a rectangular Cartesian coordinate system $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ such that

$$x = \bar{x} + \lambda, \quad y = \bar{y} \cos \mu + \bar{z} \sin \mu, \quad z = -\bar{y} \sin \mu + \bar{z} \cos \mu,$$

where

$$\lambda = \frac{a_4^2 - a_2 a_6 - 2 a_3 a_4}{a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4}, \quad \tan \mu = -\frac{a_3}{a_1} \quad \text{if } a_1 \neq 0, \quad \mu = \frac{\pi}{2} \quad \text{if } a_1 = 0.$$

This transformation is not defined if

$$a_1 a_6 + a_2 a_5 = 2 a_3 a_4. \quad (4.7)$$

If (4.7) holds, then by (4.6) and (4.7)

$$a_1^2 a_6^2 + 2 a_3^2 (a_2 a_6 - a_4^2) + a_2^2 a_5^2 = 0.$$

Since $\|c_{ij}\|$ must be positive definite, $HK - J^2 > 0$, so that, in this case $a_2 a_6 > a_4^2$. Thus each of the three terms in (4.8) is nonnegative and $a_2 a_6 > a_4^2$. Thus $a_1 - a_3 = a_5 = 0$, a possibility which we have excluded, so the transformation is defined. Transforming c_{ij} and $(c^{-1})^{ij}$ to this new coordinate system and dropping the bars on the variables, we obtain

$$\begin{aligned} \|c_{ij}\| &= \begin{vmatrix} \frac{1}{b_1 b_4 x} & 0 & 0 \\ 0 & b_1 x + b_2 & b_3 \\ 0 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}, \\ \| (c^{-1})^{ij} \| &= \begin{vmatrix} b_1 b_4 x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_1 x} & \frac{-b_3}{b_1 b_4 x} \\ 0 & \frac{-b_3}{b_1 b_4 x} & \frac{b_1 x + b_2}{b_1 b_4 x} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

where the b 's are constants such that $b_2 b_4 - b_3^2$. In order that $\|c_{ij}\|$ be positive definite, it is necessary and sufficient that

$$b_4 > 0, \quad b_1 x > 0.$$

From (1.7), (4.9), and (4.10),

$$I = b_1 b_4 x + \frac{b_1 x + b_2 + b_4}{b_1 b_4 x}, \quad II = b_1 x + b_2 + b_4 + \frac{1}{b_1 b_4 x}.$$

Equations (2.1), (4.9), and (4.10) then yield $\partial p / \partial y = \partial p / \partial z = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \cdot \frac{db_1 b_4 x}{dx} + 2 \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I^2} \cdot \frac{dI}{dx} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I \partial II} \cdot \frac{dII}{dx} \right) b_1 b_2 x \\ &\quad - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{b_1 b_4 x} - 2 \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I \partial II} \cdot \frac{dI}{dx} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial II^2} \cdot \frac{dII}{dx} \right) \frac{1}{b_1 b_4 x} \\ &\quad + 2 \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial I} b_1 b_4 x - \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \cdot \frac{1}{b_1 b_4 x} \right], \end{aligned}$$

so

$$p = p_0 + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} b_1 b_4 x - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \cdot \frac{1}{b_1 b_4 x},$$

p_0 is an arbitrary constant. Using (1.3) to calculate the stresses, we

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= -p_0, \quad t_{xy} = t_{xz} = 0, \\ t_{yy} &= -p_0 - 2 \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} b_4 + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \right) \left(\frac{1}{b_1 b_4 x} - b_1 x \right) - 2 b_2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II}, \\ t_{zz} &= -2 b_3 \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} \cdot \frac{1}{b_1 b_4 x} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \right), \\ t_{xx} - p_0 &+ 2 \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} b_1 x + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \right) \left(\frac{1}{b_1 b_4 x} - b_4 \right) + 2 \frac{b_2}{b_1 b_4 x} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial I}. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Equations (4.9) and (4.11) constitute a general solution to the equations of equilibrium. In order to gain a better understanding of this solution, we shall choose a deformation compatible with (4.9). It is convenient to take the coordinates X^2 to be cylindrical, $X^1 = R$, $X^2 = \Theta$, $X^3 = Z$. Then, by (1.5) and (4.9),

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 + R^2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{b_1 b_4 x},$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{\partial R}{\partial y} + R^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} \cdot \frac{\partial R}{\partial z} + R^2 \frac{\partial \Theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} \right)^2 + R^2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 = b_1 x + b_2,$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} \cdot \frac{\partial R}{\partial z} + R^2 \frac{\partial \Theta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot \frac{\partial Z}{\partial z} = b_3 \pm \sqrt{b_2 b_4},$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 + R^2 \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial z} \right)^2 = b_4.$$

The above equations are satisfied if

$$R = 2 \sqrt{\frac{x}{b_1 b_4}}, \quad \Theta = b_1 \sqrt{b_4} \frac{y}{2}, \quad Z = \pm \sqrt{b_2} y \pm \sqrt{b_4} z,$$

which

$$x = b_1 b_4 \frac{R^2}{4}, \quad y = \frac{2 \Theta}{b_1 \sqrt{b_4}}, \quad z = \frac{Z}{\sqrt{b_4}} \mp 2 \sqrt{b_2} \frac{\Theta}{b_1 b_4}. \quad (4.12)$$

Orientation of the cylindrical system with respect to the Cartesian system is assigned arbitrarily. Changing this orientation is mathematically equivalent to subjecting the material to a rigid motion before deforming it. The deformation (4.12) can be described as follows: We start with a portion of a

right circular cylinder bounded by the surfaces

$$R = R_1, \quad R = R_2, \quad \Theta = \pm \Theta_0, \quad Z = \pm Z_0.$$

This solid is first deformed into a rectangular parallelepiped bounded by the planes

$$x = x_1 = b_1 \frac{R_1^2}{4}, \quad x = x_2 = b_1 \frac{R_2^2}{4}, \quad y = \pm y_0 = \pm 2 \frac{\Theta_0}{b_1}, \quad z = \pm Z_0.$$

The latter solid is then subjected to a simple extension in the direction of the x -axis which deforms it into the rectangular parallelepiped

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x}_1 = b_4 x_1, & x &= \bar{x}_2 = b_4 x_2, \\ y &= \pm \bar{y}_0 = \pm \frac{y_0}{\sqrt{b_4}}, & z &= \pm \bar{z}_0 = \pm \frac{Z_0}{\sqrt{b_4}}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

so b_4 is the extension ratio, measured from the position occupied by the body after the first deformation. Finally, it is subjected to a simple shearing deformation which deforms it into the solid bounded by the planes

$$x = \bar{x}_1, \quad x = \bar{x}_2, \quad y = \pm \bar{y}_0,$$

and

$$z = \pm \bar{z}_0 - \sqrt{\frac{b_2}{b_4}} y \quad \text{if } b_3 > 0, \quad z = \pm \bar{z}_0 + \sqrt{\frac{b_2}{b_4}} y \quad \text{if } b_3 < 0.$$

Thus $\sqrt{b_2/b_4}$ is a measure of the amount of shear.

We must now consider the case where the surfaces $B = \text{const}$ are concentric circular cylinders. It is convenient to introduce a cylindrical coordinate system $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = z$ in which $B = B(r)$. By an analysis similar to that employed in discussing the case where the surfaces $B = \text{const}$ are concentric spheres, we obtain

$$b_r = 0, \quad b_\theta = r \cos \psi_3, \quad b_z = \sin \psi_3, \quad (4.2)$$

where ψ_3 is a solution of the equations

$$\sin \psi_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} + r \cos \psi_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0, \quad \cos \psi_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} + r \sin \psi_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = 0.$$

As is easily verified, these equations are satisfied if and only if $\psi_3 = \psi_3(r)$.

g (2.15) to (2.18) and (4.14) to calculate c_{ij} and $(c^{-1})^{ij}$, we obtain

$$\begin{aligned} \left\| c_{ij} \right\| &= \begin{vmatrix} \frac{r^2}{L N - M^2} & 0 & 0 \\ 0 & L & M \\ 0 & M & N \end{vmatrix}, \\ \left\| (c^{-1})^{ij} \right\| &= \begin{vmatrix} \frac{L N - M^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N}{L N - M^2} & \frac{-M}{L N - M^2} \\ 0 & \frac{-M}{L N - M^2} & \frac{L}{L N - M^2} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

re

$$L = [(c_2 - c_3) \cos^2 \psi_3 + c_3] r^2,$$

$$M = (c_2 - c_3) r \sin \psi_3 \cos \psi_3,$$

$$N = (c_2 - c_3) \sin^2 \psi_3 + c_3,$$

functions of r . Making these substitutions in (1.9), we obtain, after some simplification,

$$L'' = \frac{L'}{r}, \quad M'' = \frac{M'}{r}, \quad N'' = \frac{N'}{r}, \quad (M')^2 = L' M',$$

where primes denote differentiation with respect to r . Thus

$$L = a_1 r^2 + a_2, \quad M = a_3 r^2 + a_4, \quad N = a_5 r^2 + a_6,$$

$$L N - M^2 = (a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4) r^2 + a_2 a_6 - a_4^2,$$

where the a 's are constants such that

$$a_3^2 = a_1 a_5. \quad (4.15)$$

c_{ij} to be positive definite, it is necessary and sufficient that

$$a_1 r^2 + a_2 > 0, \quad (a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4) r^2 + a_2 a_6 - a_4^2 > 0. \quad (4.16)$$

Suppose first that

$$a_1 a_6 + a_2 a_5 = 2 a_3 a_4. \quad (4.17)$$

Then from (4.16),

$$a_2 a_6 > a_4^2. \quad (4.18)$$

Squaring both sides of (4.17), then using (4.15), we obtain

$$a_1^2 a_6^2 + 2 (a_2 a_6 - a_4^2) a_3^2 + a_2^2 a_5^2 = 0.$$

By (4.18), each term in this expression is non negative and $a_2 a_6 \neq 0$. Then $a_1 : a_3 = a_5 : 0$. Furthermore, by (4.16), $a_2 > 0$, $a_6 > 0$. Thus there exist constants b_1, b_2, b_3 such that

$$b_1 = \sqrt{a_2 a_6 - a_4^2}, \quad b_2 = \sqrt{\frac{a_6}{a_2 a_6 - a_4^2}}, \quad b_3 = \frac{a_4}{a_6}.$$

It then follows that

$$\|c_{ij}\| = \begin{vmatrix} \frac{r^2}{b_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 + b_1^2 b_2^4 b_3^2}{b_2^2} & b_1^2 b_2^2 b_3 \\ 0 & b_1^2 b_2^2 b_3 & b_1^2 b_2^2 \end{vmatrix}, \quad (4.19)$$

$$\|(c^{-1})^{ij}\| = \begin{vmatrix} \frac{b_1^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & b_2^2 & -b_2^2 b_3 \\ 0 & -b_2^2 b_3 & \frac{1 + b_1^2 b_2^4 b_3^2}{b_1^2 b_2^2} \end{vmatrix}, \quad (4.20)$$

$$I = \frac{b_1^2}{r^2} + r^2 b_2^2 + \frac{1 + b_1^2 b_2^4 b_3^2}{b_1^2 b_2^2}, \quad II = \frac{r^2}{b_1^2} + \frac{1 + b_1^2 b_2^4 b_3^2}{b_2^2 r^2} + b_1^2 b_2^2.$$

Equation (2.1) then yields $\partial p / \partial \theta = \partial p / \partial z = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \frac{b_1^2}{r^2} + 2 \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I^2} \cdot \frac{dI}{dr} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I \partial II} \cdot \frac{dII}{dr} \right) \frac{b_1^2}{r^2} \\ &\quad - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \frac{r^2}{b_1^2} - 2 \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I \partial II} \cdot \frac{dI}{dr} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial II^2} \cdot \frac{dII}{dr} \right) \frac{r^2}{b_1^2} \\ &\quad - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{b_1^2}{r^2} - r^2 b_2^2 \right) - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{r^2}{b_1^2} - \frac{1 + b_1^2 b_2^4 b_3^2}{r^2 b_2^2} \right) \\ &= \frac{d}{dr} \left[2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \cdot \frac{b_1^2}{r^2} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \cdot \frac{r^2}{b_1^2} - \Sigma \right], \end{aligned}$$

so

$$\dot{p} = \dot{p}_0 + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \cdot \frac{b_1^2}{r^2} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \cdot \frac{r^2}{b_1^2} - \Sigma, \quad (4.21)$$

where \dot{p}_0 is a constant. Using (1.3), (4.19), (4.20), and (4.21), we can compute the stresses. The physical components of the stress tensor are found to

en by

$$\left. \begin{aligned} \widehat{r}r &= \Sigma \quad \widehat{p}_0, \quad \widehat{r}\theta = 0, \quad \widehat{r}z = 0, \\ \widehat{\theta}\theta &= 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \left(b_2^2 r^2 - \frac{b_1^2}{r^2} \right) - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \left(\frac{1 + b_1^2 b_2^4 b_3^2}{b_2^2 r^2} - \frac{r^2}{b_1^2} \right) + \Sigma \quad \widehat{p}_0, \\ &= \frac{d}{dr} r (\Sigma - \widehat{p}_0), \\ \widehat{\theta}z &= -2 b_2^2 b_3 r \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \frac{b_1^2}{r^2} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \right), \\ \widehat{z}z &= 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \left(\frac{1 + b_1^2 b_2^4 b_3^2}{b_1^2 b_2^2} - \frac{b_1^2}{r^2} \right) + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \left(\frac{r^2}{b_1^2} - b_1^2 b_2^2 \right) + \Sigma \quad \widehat{p}_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

we choose the coordinates X^α to be rectangular Cartesian, $X^1 = X$, $X^2 = Y$, $X^3 = Z$, we may write a deformation corresponding to (4.19) in the form

$$r = \sqrt{2 b_1 X}, \quad \theta = b_2 Y, \quad z = \frac{Z}{b_1 b_2} - b_2 b_3 Y.$$

This deformation can be decomposed into two parts: we start with a rectangular parallelepiped bounded by the planes $X = X_1$, $X = X_2$, $Y = \pm Y_0$, $Z = \pm Z_0$. This solid is then deformed into the solid bounded by the circular cylinders

$$r = r_1 = \sqrt{2 b_1 X_1}, \quad r = r_2 = \sqrt{2 b_1 X_2},$$

and the planes

$$\theta = \pm \theta_0 = \pm b_2 Y_0, \quad z = \pm z_0 = \pm \frac{Z_0}{b_1 b_2}.$$

A solution corresponding to this part of the deformation is discussed in some detail in [4], where it is shown that, if the bending is to be accomplished by terminal couples, the constants b_1 , b_2 , and \widehat{p}_0 should be chosen so that

$$b_1 = \pm b_2 r_1 r_2, \quad \widehat{p}_0 = \Sigma(r_1). \quad (4.23)$$

In the present case, the bending deformation described above is followed by a deformation which carries the body into the solid bounded by the cylindrical surfaces $r = r_1$ and $r = r_2$, the planes $\theta = \pm \theta_0$ and the helical surfaces $z + b_3 \theta = \pm z_0$. By (4.22), the surfaces $r = r_1$ and $r = r_2$ are subject to normal stresses only, the planes $\theta = \pm \theta_0$ to a shearing stress in the direction of the z -axis and a normal stress, the helical surfaces to a normal stress and a shearing stress in the direction of the helices obtained by intersecting these surfaces with the cylinders $r = \text{const}$. One can always choose \widehat{p}_0 so that the surface $r = r_1$ is free of stress. Suppose this is done and that b_1 and b_2 are chosen in accordance

with (4.23), so that $I(r_1) = I(r_2)$. Consider a neo-Hookean material, that is material for which $\Sigma = \alpha (I - 3)$, where α is a constant. In this case the surface $r = r_2$ is free of stress and the resultant normal force acting on the plane $\theta = \pm \theta_0$,

$$N = 2 z_0 \int_{r_1}^{r_2} \widehat{\theta\theta} \, dr = 2 z_0 r (\Sigma - p_0) \Big|_{r_1}^{r_2},$$

vanishes. For a general form of the strain energy, these conditions are not satisfied. In general, these will be normal forces acting on these surfaces. If these are not supplied, the material will tend to expand or contract in the r directions when the latter part of the deformation is effected.

Suppose now that (4.17) does not hold. If $a_1 (a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4) < 0$ then from (4.15) and (4.16),

$$\begin{aligned} (a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4) r^2 &< - \left(\frac{a_2}{a_1} \right) (a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4) \\ &= a_4^2 - a_2 a_6 - a_4^2 + \frac{2 a_2 a_3 a_4}{a_1} - \frac{a_2^2 a_5}{a_1} \\ &\leq a_4^2 - a_2 a_6 - a_4^2 + 2 |a_2 a_4| \sqrt{\frac{a_5}{a_1}} - \frac{a_2^2 a_5}{a_1} \\ &= a_4^2 - a_2 a_6 - \left[|a_4| - |a_2| \sqrt{\frac{a_5}{a_1}} \right]^2 \\ &\leq a_4^2 - a_2 a_6, \end{aligned}$$

which contradicts (4.16). Thus $a_1 (a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4) \geq 0$. Similarly $a_5 (a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4) \geq 0$. Using these conditions, it is easy to show that there exist real constant b_1, \dots, b_6 such that

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 a_6 + a_2 a_5 - 2 a_3 a_4, & b_1 b_3 b_5 &= -a_3, \\ b_1 b_2 &= a_4^2 - a_2 a_6, & b_1 b_2 b_3 b_4 &= a_4, \\ b_1 b_3^2 &= a_1, & b_1 b_5^2 &= a_5, \\ b_1^2 b_4^2 - b_1 b_2 b_3^2 &= a_2, & b_1^2 b_6^2 - b_1 b_2 b_5^2 &= a_6. \end{aligned}$$

In terms of these,

$$\begin{array}{ccc} r^2 & 0 & 0 \\ b_1 (r^2 - b_2) & & \\ \hline 0 & b_1 [b_1 b_4^2 + b_3^2 (r^2 - b_2)] & -b_1 [b_1 b_4 b_6 + b_3 b_5 (r^2 - b_2)] \\ 0 & -b_1 [b_1 b_4 b_6 + b_3 b_5 (r^2 - b_2)] & b_1 [b_1 b_6^2 + b_5^2 (r^2 - b_2)] \end{array}$$

The solution corresponding to these strains is discussed in [6], where it is shown that deformations corresponding to (4.24) are possible not only in all isotropic incompressible materials, but in all incompressible materials possessing transverse isotropy.¹⁾

5. The Case where $c_2 = c_3$

If $c_2 = c_3$ and $c_1 = c_3$, then by (2.18), $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, so the material is unstrained. If $c_2 = c_3$, but $c_1 \neq c_3$, (2.21) holds, so the results obtained in Section 3 apply. Thus the surfaces $B = \text{const}$ are parallel planes, concentric circular cylinders or concentric spheres. Furthermore, from (2.15) and (2.16),

$$(c_1 \quad c_3) \frac{B_{,i} B_{,j}}{B_{,k} B_{,k}} = c_3 g_{ij} = (c^{-1})^{ij} = \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_3} \right) \frac{B_{,i} B_{,j}}{B_{,k} B_{,k}} + \frac{1}{c_3} g^{ij}, \quad (5.1)$$

where

$$c_1 c_3^2 = 1. \quad (5.2)$$

Suppose first that the surfaces $B = \text{const}$ are parallel planes and introduce a rectangular Cartesian coordinate system $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ in which $B = B(x)$. Then from (2.17), (5.1), and (5.2),

$$c_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{1}{c_3^2} & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix},$$

where $c_3 = c_3(x)$. Since this is a special case of (4.5), we obtain no new solutions here. Similarly, no new solutions are obtained in the case where the surfaces $B = \text{const}$ are concentric circular cylinders. Suppose they are concentric spheres and introduce a spherical coordinate system $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$ in which $B = B(r)$. Then (2.17), (5.1), and (5.2) yield

$$c_{ij} = \begin{vmatrix} \frac{1}{c_3^2} & 0 & 0 \\ 0 & c_3 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix}, \quad \|(c^{-1})^{ij}\| = \begin{vmatrix} c_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_3 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c_3 r^2 \sin^2 \theta} \end{vmatrix},$$

where $c_3 = c_3(r)$. Making these substitutions in (1.9), we obtain

$$c_3 [(c_3 r^2)']^2 = 4 r^2,$$

¹⁾ Note added in Proof: The bending solutions discussed in [13] are included among those given by (4.22) and (4.24).

from which $c_3 = r^{-2} (r^3 - a)^{2/3}$, where a is a constant. Taking the coordinate X^3 to be spherical, $X^1 = R$, $X^2 = \Theta$, $X^3 = \Phi$, we may then write a corresponding deformation in the form

$$r = (\pm R^3 - a)^{1/3}, \quad \theta = \pm \Theta, \quad \varphi = \Phi.$$

A solution corresponding to one of these deformations is discussed in [5].

6. The Case where $c_1 = c_3$

Since there is no essential difference between the cases $c_1 = c_3$ and $c_1 = c_2$, we shall consider only the former, assuming that $c_1 = c_2$. Then from (2.1), (2.16), and (2.18),

$$c_{ij} = (c_2 - c_3) b_i b_j + c_3 g_{ij}, \quad (c^{-1})^{ij} = \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_3} \right) b^i b^j + \frac{1}{c_3} g^{ij}, \quad (6)$$

where

$$c_2 c_3^2 = 1. \quad (6')$$

We restrict our attention to the case where there exists a family of surfaces to which b_i is normal so that (3.14) and (3.15) hold. Let us first consider the case where $b = 0$, so that $B = B(r, z)$. From (2.17), (3.14), (6.1), and (6.2), we obtain

$$\begin{aligned} \|c_{ij}\| &= \begin{vmatrix} e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda} r^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda} \end{vmatrix}, \\ \| (c^{-1})^{ij} \| &= \begin{vmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{2\lambda}}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\lambda} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (6'')$$

where $\lambda = \lambda(r, z) = \log c_3$. From the conditions of compatibility (1.9), we obtain

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r \partial z} &= 3 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} &= 0, \\ 2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} &= 3 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} \right)^2 - \frac{5}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2, \\ 2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} &= 3 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} \right)^2. \end{aligned}$$

that these quantities must all be constant. If $r = 0$, this follows immediately from (6.5) and (6.7). Suppose $\partial \lambda / \partial z = 0$. Using (6.6) and (6.7) and using (6.5), we obtain

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2 = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial r} \quad (6.8)$$

Differentiating (6.8) with respect to z , then using (6.4), (6.7), and (6.8), we find

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial r} = \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} \right)^2 \quad (6.9)$$

in which $\partial^2 \lambda / \partial r \partial z = 0$. But from (6.4), we must then have $\partial \lambda / \partial r = -1/r$, which does not satisfy (6.9). Thus λ must be constant. It now follows from (6.5) that c_{ij} is a constant tensor.

Suppose now that $c_{11} = 0$. We may then introduce a cylindrical Cartesian coordinate system (x, y, z) in which

$$b_x = 0, \quad b_y = 0, \quad b_z = 1, \quad B = B(x, y),$$

and in (2.17), (6.1), and (6.2) we then obtain

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{P} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{P} & 0 \\ 0 & 0 & P^2 \end{pmatrix}, \quad (c^{-1})^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & P & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{P^2} \end{pmatrix},$$

where $P = P(x, y) \neq 0$. Setting $K_{1,2,2} = 0$ in (1.9), we obtain

$$P \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2.$$

If $K_{1,2,2} = 0$ requires that

$$P \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2,$$

and these conditions and the condition $K_{1,2,2} = 0$ we can easily show that P must be constant. Thus c_{ij} is a constant tensor.

Suppose now that $c_{11} \neq 0$, and introduce a curvilinear coordinate system (ξ, η, ζ) such that

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y}{P}, \quad \zeta = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right).$$

In this coordinate system, $B = B(\eta, \zeta)$,

$$\|g_{ij}\| = \begin{vmatrix} \frac{\zeta^2}{a^2 + b^2 \zeta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2 + b^2 \zeta^2} & 2b\zeta \frac{a\xi - b\eta}{(a^2 + b^2 \zeta^2)^2} \\ 0 & 2b\zeta \frac{a\xi - b\eta}{(a^2 + b^2 \zeta^2)^2} & 1 + 4b^2 \zeta^2 \frac{a\xi - b\eta}{(a^2 + b^2 \zeta^2)^3} \end{vmatrix},$$

$$g^{ij} = \begin{vmatrix} \frac{a^2 + b^2 \zeta^2}{\zeta^2} & 0 & 0 \\ 0 & (a^2 + b^2 \zeta^2) \left[1 + 4b^2 \zeta^2 \frac{(a\xi - b\eta)^2}{(a^2 + b^2 \zeta^2)^3} \right] & 2b\zeta \frac{a\xi - b\eta}{a^2 + b^2 \zeta^2} \\ 0 & -2b\zeta \frac{a\xi - b\eta}{a^2 + b^2 \zeta^2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$b_\xi = \pm \frac{\zeta}{\sqrt{a^2 + b^2 \zeta^2}}, \quad b_\eta = b_\zeta = 0, \quad b^{\xi} = \pm \sqrt{a^2 + b^2 \zeta^2}, \quad b^\eta = b^\zeta = 0$$

From (2.17), (6.1) and (6.2), we then obtain

$$\|c_{ij}\| = \begin{vmatrix} Q^{-2} g_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & Q g_{\eta\eta} & Q g_{\eta\zeta} \\ 0 & Q g_{\eta\zeta} & Q g_{\zeta\zeta} \end{vmatrix}, \quad \|(c^{-1})^{ij}\| = \begin{vmatrix} Q^2 g^{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g^{\eta\eta}}{Q} & \frac{g^{\eta\zeta}}{Q} \\ 0 & \frac{g^{\eta\zeta}}{Q} & \frac{1}{Q} \end{vmatrix}$$

where $Q = Q(\eta, \zeta) = c_3$. Setting $R_{\xi\eta, \xi\eta} = 0$, we obtain, after some simplification

$$\left. \begin{aligned} & \frac{4b^2 \zeta^4}{(a^2 + b^2 \zeta^2)^2} Q \cdot \frac{\partial Q}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial Q^{-2}}{\partial \eta} (a\xi - b\eta)^2 \\ & = 2b\zeta (a\xi - b\eta) \left[\frac{1}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{\zeta^2}{Q^2 (a^2 + b^2 \zeta^2)} \right. \\ & \quad + 2 \frac{b^2 \zeta^3}{a^2 + b^2 \zeta^2} \cdot \frac{\partial Q^{-2}}{\partial \eta} \\ & \quad \left. + \frac{\zeta^2}{a^2 + b^2 \zeta^2} \cdot \frac{1}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial Q^{-2}}{\partial \eta} \right] \\ & \quad + \left[\frac{4a^2 b^2 \zeta^2 Q}{(a^2 + b^2 \zeta^2)^2} - \frac{1}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial \zeta} (a^2 + b^2 \zeta^2) \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{\zeta^2}{Q^2 (a^2 + b^2 \zeta^2)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Now $a\xi - b\eta$, η , and ζ are functionally independent and $Q = Q(\eta, \zeta)$. In order that (6.10) hold identically in these quantities, the coefficient of each power of $a\xi - b\eta$ must vanish, from which

$$\frac{\partial Q}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \frac{(a^2 + b^2 \zeta^2)}{\zeta^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{\zeta^2}{Q^2 (a^2 + b^2 \zeta^2)} = \frac{4a^2 b^2 \zeta^2 Q^2}{(a^2 + b^2 \zeta^2)^2}.$$

then follows that $R_{\xi\zeta\eta\xi} \neq 0$ unless $Q = 1$, in which case $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, the material is unstrained.

Acknowledgment: I take this opportunity to express my appreciation to Professor R. S. RIVLIN for the interest he has shown in this work.

BIBLIOGRAPHY

- R. S. RIVLIN, *Large Elastic Deformations of Isotropic Materials, IV: Further Developments of the General Theory*, Phil. Trans. Roy. Soc. London [A] 241, 379-397 (1948).
- C. TRUESDELL, *The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*, J. Rational Mech. Anal. 1, 125-300 (1952).
- R. S. RIVLIN, *A Note on the Torsion of an Incompressible Highly Elastic Cylinder*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 45, 485-487 (1948).
- R. S. RIVLIN, *Large Elastic Deformations of Isotropic Materials, V: The Problem of Flexure*, Proc. Roy. Soc. London [A] 195, 463-475 (1949).
- A. E. GREEN and R. T. SHIELD, *Finite Elastic Deformation of Incompressible Isotropic Bodies*, Proc. Roy. Soc. London [A] 202, 407-419 (1950).
- J. L. ERICKSEN and R. S. RIVLIN, *Large Elastic Deformations of Homogeneous Anisotropic Materials*, to appear in the J. Rational Mech. Anal.
- O. VEBLEN, *Invariants of Quadratic Differential Forms*, Cambridge Tracts Math. and math. Phys. No. 24 (Cambridge, 1927).
- M. BÔCHER, *Introduction to Higher Algebra* (Macmillan, New York, 1907).
- A. J. MCCONNELL, *Applications of the Absolute Differential Calculus* (Blackie and Son Ltd., London, 1931).
- L. P. EISENHART, *Differential Geometry* (Princeton University Press, Princeton, 1941).
- R. C. PRIM, *Steady Rotational Flow of Ideal Gases*, J. Rational Mech. Anal. 1, 425-497 (1952).
- G. HAMEL, *Potentialströmungen mit konstanter Geschwindigkeit*, Sitz.-Ber. Preuss. Akad. Wiss. 1937, 5-20.
- J. E. ADKINS, A. E. GREEN and R. T. SHIELD, *Finite Plane Strain*, Phil. Trans. Roy. Soc. London [A] 246, 181-213 (1953).

Résumé

Nous avons dérivé trois solutions des équations de l'élasticité non linéaire. Nous avons déterminé les déformations qui sont possibles dans un solide isotrope incompressible quelconque.

(Received: January 21, 1954.)

Die Konstruktion der mittleren Linie bei Oberflächenprofilen und einige Zusammenhänge zwischen den zur Kennzeichnung von Oberflächen benutzten Grössen

Von MAX GARY, Braunschweig¹⁾

1. Übersicht

Das Ziel der Prüfung technischer Oberflächen besteht darin, diesen eine oder mehrere Kennzahlen zuzuordnen, die geeignet sind, diese Oberflächen zu bewerten. Es liegt dasselbe Problem vor wie bei der Untersuchung statistischer Massen. Es handelt sich um eine Mannigfaltigkeit von ∞^2 Grössen, denen eine oder mehrere Zahlen zugeordnet werden sollen. Dadurch erwachsen eine Reihe von Fragen:

In welcher Weise können diese Kennzahlen eindeutig gefunden werden?

Welche Oberflächen werden umgekehrt durch diese Kennzahlen beschrieben? Das heisst, haben die erhaltenen Kennzahlen überhaupt einen Sinn?

Und schliesslich, wenn mehrere Kennzahlen ermittelt wurden: Wie können die einen aus den anderen berechnet werden?

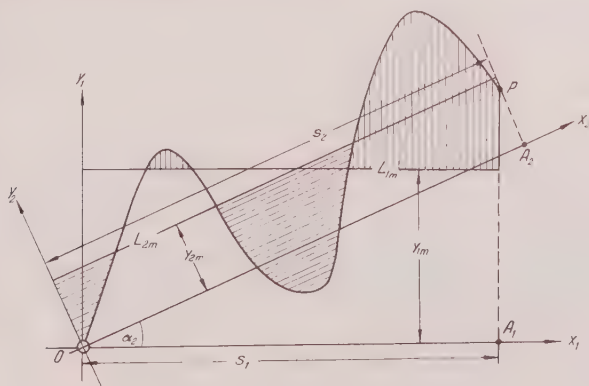
2. Profilschnitte und Flächenkennzeichnung

Legt man durch eine Fläche einen ebenen Profilschnitt (siehe Figur 1), ergibt sich durch die Form der entstehenden Kurve ein Kennzeichen für die Fläche. Die Fläche liege dabei in einem rechtwinkligen Koordinatensystem und die Ebene des Profilschnitts wie auch diejenigen weiterer Profilschnitte sollen senkrecht zu einer im folgenden als Basisebene bezeichneten Koordinatenebene sein, nämlich jener, über der die Fläche ausgebreitet ist.

Nun ist die Mannigfaltigkeit der Geraden einer Ebene ∞^2 , und auf jeder dieser Geraden gibt es ∞^1 mögliche Lagen einer Bezugsstrecke S_0 , dass also insgesamt ∞^3 verschiedene Profilschnitte der Länge S_0 herangezogen werden könnten, um eine Aussage über die Fläche zu treffen. Diese Profilschnitte schneiden sich zum Teil oder fallen gar teilweise zusammen. Es ist offensichtlich, dass zunächst nur solche Profilschnitte, die höchstens einen Punkt gemeinsam haben, zur Berechnung einer oder mehrerer Flächenkennzahlen benutzt werden dürfen.

¹⁾ Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt.

Zweckmässig scheint es zu sein, aus einer Auswahl von verschiedenen gegebenen Profilausschnitten, die sich selbst nicht schneiden, durch harmonische Analyse die Fourier-Koeffizienten zu bestimmen und, vorausgesetzt, dass deren *Verwertung ein noch festzusetzendes Mass nicht überschreitet*, durch Mittelwertbildung oder durch die sonstigen in der Statistik üblichen Verfahren neue zugeordnete Fourier-Koeffizienten zu berechnen, die als Kennzahlen für die gesamte Oberfläche angesehen werden können.



Figur 1

Ebener Profilschnitt durch eine Fläche.

Sofern sich zeigt, dass bei den einzelnen technischen Oberflächenbearbeitungsverfahren eine erkennbare Verteilung der Fourier-Koeffizienten auftritt, die in den Einzelfällen lediglich durch einen konstanten Faktor voneinander verschieden sind, ist es sinnvoll, diesen Fourier-Koeffizienten selbst wieder die Zahlen zuzuordnen:

Wenn die Fourier-Koeffizienten mit

$$a_r, b_r \quad (r = 1, 2, 3, \dots, n)$$

bezeichnet werden, entsprechend einer Reihenentwicklung – die Darstellbarkeit mit endlich vielen Reihengliedern vorausgesetzt –

$$y = \sum_1^n \left(a_r \cos r \frac{2\pi}{S_b} x + b_r \sin r \frac{2\pi}{S_b} x \right) + a_0, \quad (1)$$

lässt sich der Wert

$$h_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{S_b} \int_0^{S_b} y^2 dx} \quad (2)$$

in der Form

$$h_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_1^n (a_r^2 + b_r^2) + \frac{1}{2} a_0^2}$$

finden.

Es ist dies nicht die einzige Möglichkeit, die Grössen

$$a_r, b_r \quad (r = 1, 2, 3, \dots, n)$$

einer Zahl zuzuordnen.

Bildet man zum Beispiel

$$R_m = \sum_1^n |a_r| + \sum_1^n |b_r| + a_0$$

und lässt zu, dass die Harmonischen beliebige Phasenverschiebung haben, erhält man einen Wert R_m , der den maximal möglichen Abstand eines oder mehrerer Punkte der untersuchten Fläche von der Basisebene darstellt. I zieht man hingegen die einzelnen Profilschnitte, aus denen die Fourier-Koeffizienten berechnet wurden, auf die «mittlere Linie», so ist R_m als «mittl. Flächenrauhentiefe» zu bezeichnen. Hierauf wird im folgenden Abschnitt näher eingegangen.

Eine weitere Möglichkeit, den Grössen

$$a_0, a_r, b_r \quad (r = 1, 2, 3, \dots, n)$$

eine Zahl zuzuordnen, ist durch die Formel

$$h_{AVE} = \frac{1}{S_b} \int_0^{S_b} \left| \sum_1^n \left(a_r \cos r \frac{2\pi}{S_b} x + b_r \sin r \frac{2\pi}{S_b} x \right) + a_0 \right| dx$$

gegeben.

Nachdem man sich durch Prüfung der Streuung der Fourier-Koeffizienten Klarheit darüber verschafft hat, in welchen Fällen es sinnvoll ist, eben die Koeffizienten oder gar die aus ihnen berechneten Grössen als Repräsentanten einer ganzen Fläche zu betrachten, kann man, wo dies also angängig ist, auch gleich aus den einzelnen Profilkurven die Grössen h_{RMS} , h_{AVE} oder R ermitteln und deren Mittelwert oder nach einer in der Statistik üblichen anderen Methode einen zugeordneten Wert bestimmen.

Hier tritt ein neues Problem auf.

Wie eingangs erwähnt, ist die zu untersuchende Fläche auf die Basisebene bezogen. Diese Ebene ist in Wirklichkeit bei einer vorgegebenen Oberfläche nicht realisiert. Sie muss erst eingeführt werden, und zwar bezogen auf die Fläche selbst.

Nun muss hier eingefügt werden, dass die Oberfläche in der Praxis durch aufgezeichneten Profilkurven, die selbst keine Bezugslinie haben, erst gegel-

d. Es muss daher für jede Profilkurve eine Bezugslinie, «mittlere Linie», annt, bestimmt werden. Dass diese mittleren Linien nicht exakt nur einer zigen Ebene – der Basisebene – angehören, ist dann unvermeidlich.

3. Bestimmung der mittleren Linie

Im DIN-Blatt 4762 (Februar 1952) wird als Definition der «mittleren Linie» angegeben: «Die innerhalb der Bezugsstrecke so gelegte Linie, dass die mme der werkstoffgefüllten Flächen über ihr und der werkstofffreien Flächen ter ihr gleich und ein Minimum sind». Ob diese Definition hinreichend ist, eindeutig die «mittlere Linie» zu finden und nach welchem Verfahren dann se Linie auch wirklich gefunden werden kann, ist bisher nicht bekannt.

Bei dieser Definition erhebt sich nämlich sofort die Frage: Soll über einer stimmten Bezugsstrecke durch zwei Senkrechte in den Endpunkten der Be- gsstrecke aus der Profilkurve ein bestimmtes Stück ausgeschnitten werden d jetzt die «mittlere Linie» so bestimmt werden, dass die erwähnte Forde- ng erfüllt ist? Oder ist die Profilkurve lediglich durch zwei Punkte begrenzt d soll die «mittlere Linie» dann entsprechend der aufgestellten Forderung sucht werden? Im letzteren Falle wäre die Forderung: «Die innerhalb der zugsstrecke so gelegte Linie, dass...» usw. unverständlich. Im folgenden wird n Näherungsverfahren beschrieben, nach dem sich diese Aufgabe lösen lässt. erdings ist über die genaue Länge der Bezugsstrecke zunächst keinerlei ssage gemacht. Vielmehr wird lediglich verlangt, dass auf der Profilkurve ei Punkte das zu betrachtende Stück derselben begrenzen. Die Länge der zugsstrecke ergibt sich erst hinterher. Zunächst sei die Profilkurve (siehe gur 1) in bezug auf das willkürliche rechtwinklige Koordinatensystem (x_1, y_1) geben. Dann lässt sich durch Planimetrieren die Gerade L_{1m} finden:

$$y_{1m} = \frac{1}{S_1} \int_0^{S_1} y_1(x_1) dx_1. \quad (6)$$

ne weitere Planimetrierung der Flächenstücke, die auf einer Seite der Linie L_{1m} liegen und die von dieser Linie und der Profilkurve sowie gegebenenfalls och vom Lot durch den Punkt P auf die x_1 -Achse begrenzt werden, liefert den ert F_1 (siehe gestrichelte Fläche in Figur 1).

Dreht man jetzt das Koordinatensystem um den Winkel α_2 , der im Gegen- nn des Uhrzeigers positiv gewählt sei, um den Punkt O , dann erhält man das ue Koordinatensystem (x_2, y_2) . Die senkrechte Projektion des Punktes P uf die x_2 -Achse liefert den Punkt A_2 .

Durch die Strecke OA_2 ist die Bezugsstrecke S_2 gegeben. Wiederum erhält an durch zwei Planimetrierungen den F_1 entsprechenden Wert F_2 und die

neue mittlere Linie L_{2m} . Die Fortsetzung des Verfahrens, wobei der Koordinatenanfang stets beibehalten wird, liefert durch Interpolation aus den zugeordneten Werten

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 = 0 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & & & \\ F_1 & F_2 & F_3 & \dots & & & \end{array}$$

den zum Winkel α^* gehörenden Minimalwert F^* . Diese Interpolation wird zweckmäßig graphisch durchgeführt.

Der Wert F_3 muss in jedem Falle ermittelt werden, um den Maximalwert F^* wenigstens genähert zu bestimmen.

Die graphische Interpolation kann auch durch die numerische ersetzt werden:

$$\alpha^* = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + \frac{(F_3 - F_2)(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)}{2[F_1(\alpha_2 - \alpha_3) + F_2(\alpha_3 - \alpha_1) + F_3(\alpha_1 - \alpha_2)]}.$$

Der Wert F^* folgt dann zur Kontrolle aus zwei weiteren Planimetrierungen.

Zur näherungsweisen Bestimmung der mittleren Linie sind somit mindestens sechs Planimetrierungen erforderlich. Die Kontrolle bedingt zusätzlich zwei weitere Planimetrierungen.

An Stelle der Definition der mittleren Linie entsprechend dem Normblatt wäre auch eine andere Festlegung denkbar:

Mittlere Linie = Achse des kleinsten Trägheitsmoments der Fläche, gebildet aus der Profilkurve und der Verbindungslinie der Begrenzungspunkte derselben.

Der Vorteil: Die Definition ist eindeutig. Durch zwei Planimetrierungen mit einem Quadratplanimeter erhält man eindeutig den Schwerpunkt der Fläche. Durch drei weitere Planimetrierungen mit einem Potenzplanimeter zur Bestimmung von $\oint y^3 dx$ erhält man die gesuchte Linie. Sämtliche Planimetrierungen können mit einem einzigen Instrument vorgenommen werden¹⁾.

4. Der Zusammenhang von h_{AVE} mit h_{RMS} in Gestalt einer Abschätzung

Bezieht man die Darstellung der Profilkurve auf die mittlere Linie (Gerade), dann verschwindet das absolute Glied in Gleichung (1): $a_0 = 0$. Des Weiteren sei verlangt, dass nur eine endliche Anzahl von Reihengliedern auftritt.

Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichheit

$$\left(\sum_1^n a_r c_r \right)^2 \leq \left(\sum_1^n a_r^2 \right) \left(\sum_1^n c_r^2 \right)$$

¹⁾ Vgl. L. A. OTT, *Systematische Entwicklung der Planimeter und Integrimeter aus der einfachen Grundform*, Messtechnik 13, 41–48 (1937).

läßt sich aus Gleichung (5)

$$h_E \leq \frac{1}{S} \int_0^S \sqrt{\sum_1^n (a_r^2 + b_r^2)} \left[\sum_1^n \left(\cos^2 r \frac{2\pi}{S} x - \sin^2 r \frac{2\pi}{S} x \right) \right] dx, \quad (8)$$

$$h_E \leq \frac{1}{S} \int_0^S \sqrt{\sum_1^n (a_r^2 + b_r^2)} \sqrt{n} dx,$$

$$h_E \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_1^n (a_r^2 + b_r^2)}. \quad (9)$$

Bei Benutzung von Gleichung (3), in der $a_0 = 0$ ist, folgt

$$h_{RMS} \geq \frac{h_{AVE}}{\sqrt{2n}}; \quad (10)$$

maximale Anzahl der für die Darstellung der Profilkurve benötigten Kosinus- oder Sinusfunktionen.

Eine untere Schranke für h_{AVE} läßt sich für spezielle Fälle von Profilkurven angeben. Unter der Voraussetzung, dass sich die Profilkurve in der Form

$$y = a_r \sin r \frac{2\pi}{S} x + a_\mu \sin \mu \frac{2\pi}{S} x \quad (11)$$

darstellen läßt, gilt

$$h_{AVE} = \frac{1}{S} \int_0^S |y| dx \geq \frac{1}{S} \int_0^S \left| a_r \sin r \frac{2\pi}{S} x \right| dx - \frac{1}{S} \int_0^S \left| a_\mu \sin \mu \frac{2\pi}{S} x \right| dx, \quad (12)$$

was unmittelbar einzusehen ist. Folglich:

$$h_{AVE} \geq \frac{2}{\pi} (|a_r| - |a_\mu|). \quad (13)$$

Wenn es gelingt, für eine nach bestimmten Herstellungsverfahren erzeugte Fläche die obigen Voraussetzungen (zwei Sinuswellen) als erfüllt zu erkennen, kann für den Quotienten h_{RMS}/h_{AVE} eine obere Schranke angegeben werden.

Ist

$$|a_\mu| = \frac{|a_r|}{m} \quad \text{mit } m > 1, \quad (14)$$

folgt

$$h_{AVE} = \frac{2}{\pi} |a_r| \left(1 - \frac{1}{m} \right)$$

und nach Gleichung (3)

$$h_{RMS} = \frac{a_r}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}.$$

Daher:

$$h_{RMS} \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{m - 1} h_{AVE} \quad (I)$$

Beispiel: $m = 10$. $h_{RMS} = h_{AVE} \cdot 1,24$.

In der Elektrotechnik heisst die Grösse

$$\frac{h_{RMS}}{h_{AVE}} = \text{«Formfaktor»} = \frac{E_{eff}}{E_{mittel}}$$

Einen Überblick über die Werte h_{RMS} und h_{AVE} für einige Kurvenformen in den Bezeichnungen der Elektrotechnik gibt das Archiv für Technisches Messung 3620-2.

Summary

Attention is directed first to the analogy between the problem of evaluating collectives and that of finding a numerical expression for an existing surface.

For the value h_{RMS}/h_{AVE} , approximations are made using Fourier series the surface profile based on the center line. h_{AVE} = center line average (= h_{CL}). For h_{AVE} , an upper bound calculated from the Fourier coefficients is stated. With this, and as h_{RMS} may be determined in a definite form, a lower bound h_{RMS}/h_{AVE} is obtained. Provided that the surface profile is the superimposition of two harmonics, a lower bound for h_{AVE} and then an upper bound for h_{RMS}/h_{AVE} could be found. In order to get a base line for which the areas embraced by the profile above and below the line are equal and a minimum, a graphical method is constructed.

(Eingegangen: 25. November 1953.)

Anwendungen des Quotienten-Differenzen-Algorithmus

VON HEINZ RUTISHAUSER, Zürich¹⁾

1. Einleitung

Nach einer ersten Mitteilung²⁾ über die theoretischen Grundlagen des QD-Algorithmus sollen nun einige Anwendungen behandelt werden. Vorher wiederholen wir aber die Definition des QD-Algorithmus:

Mit den Ausgangswerten $s_v = s_1^{(v)}$ wende man nacheinander für $v = 0, 1, 2$ und dann für $\sigma = 1, 2, 3, \dots$ unter Beachtung von $e_0^{(v)} = 0$ die folgenden Formeln an:

$$q_\sigma^{(v)} = \frac{s_\sigma^{(v+1)}}{s_\sigma^{(v)}}, \quad d_\sigma^{(v)} = q_\sigma^{(v+1)} - q_\sigma^{(v)}, \quad e_\sigma^{(v)} = d_\sigma^{(v)} + e_{\sigma-1}^{(v+1)}, \quad s_{\sigma+1}^{(v)} = s_\sigma^{(v+1)} e_\sigma^{(v)}.$$

¹⁾ Institut für angewandte Mathematik der ETH.

²⁾ H. RUTISHAUSER, *Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, ZAMP 5, 233 (1954). Diese Arbeit wird im folgenden immer mit I zitiert; sie enthält auch das gemeinsame Literaturverzeichnis beider Arbeiten. Eine weitere Arbeit über Anwendungen des QD-Algorithmus (Bestimmung Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix) wird in Bd. 6, 1955, dieser Zeitschrift erscheinen.

Die so erhaltenen Grössen werden wie folgt in ein Schema eingeordnet (QD-Schema der s_v):

$$\begin{array}{ccccccc}
 s_1^{(0)} & & & & & & \\
 & q_1^{(0)} & & & & & \\
 s_1^{(1)} & & d_1^{(0)} = e_1^{(0)} & & s_2^{(0)} & & \\
 & q_1^{(1)} & & & & q_2^{(0)} & \\
 s_1^{(2)} & & d_1^{(1)} = e_1^{(1)} & & s_2^{(1)} & & d_2^{(0)} \quad e_2^{(0)} \parallel s_3^{(0)} \\
 & q_1^{(2)} & & & & q_2^{(1)} & \\
 s_1^{(3)} & & d_1^{(2)} = e_1^{(2)} & & s_2^{(2)} & & d_2^{(1)} \quad e_2^{(1)} \parallel s_3^{(1)} \quad q_3^{(0)} \\
 & \cdot & & & \cdot & & \cdot \\
 & \cdot & & & \cdot & & \cdot \\
 & \cdot & & & \cdot & & \cdot \\
 & \cdot & & & \cdot & & \cdot
 \end{array}$$

Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass man für die Anwendungen häufig nur die Werte $q_\sigma^{(v)}$ und $e_\sigma^{(v)}$ benötigt, man kann dann die Kolonnen $s_2^{(v)}$, $d_2^{(v)}$, $s_3^{(v)}$, $d_3^{(v)}$... weglassen und erhält so das QD-Schema in komprimierter Form [hierzu die Formeln (I, 4)]:

$$\begin{array}{ccccccc}
 s_1^{(0)} & | & & & & & \\
 & q_1^{(0)} & & & & & \\
 s_1^{(1)} & | & e_1^{(0)} & & & & \\
 & q_1^{(1)} & & q_2^{(0)} & & & \\
 s_1^{(2)} & | & e_1^{(1)} & & e_2^{(0)} & & \\
 & q_1^{(2)} & & q_2^{(1)} & & q_3^{(0)} & \\
 s_1^{(3)} & | & e_1^{(2)} & & e_2^{(1)} & & \cdot \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot &
 \end{array}$$

2. Umwandlung einer Potenzreihe in einen Kettenbruch

Ist eine im Unendlichen reguläre Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{z^{n+1}} = f(z)$$

gegeben, so kann man aus dem QD-Schema der Koeffizienten s_v nach (I, 9) unmittelbar die für die Aufstellung des S-Kettenbruches notwendigen Grössen ablesen; es ist nämlich

$$f(z) = \frac{s_0}{z} - \frac{q_1^{(0)}}{1} - \frac{e_1^{(0)}}{z} - \frac{q_2^{(0)}}{1} - \frac{e_2^{(0)}}{z} - \dots \quad (2)$$

Das gilt in vielen Fällen auch dann noch, wenn die Reihe für $f(z)$ überall divergiert, beispielsweise für

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2!}{z^3} - \frac{3!}{z^4} + \dots \quad \left(\text{asymptotische Reihe für } e^z \int \frac{e^{-x}}{x} dx \right)$$

Das QD-Schema lautet nämlich in diesem Fall:

ν	s_ν	$q_1^{(\nu)}$	$e_1^{(\nu)}$	$q_2^{(\nu)}$	$e_2^{(\nu)}$	$q_3^{(\nu)}$	
\downarrow	1						
		-1					
	-1		-1				
		-2		-2			
	2		-1		-2		Allgemein:
		-3		-3		-3	$q_\sigma^{(\nu)} = -(\sigma + \nu)$
	-6		-1		-2		$e_\sigma^{(\nu)} = -\sigma$
		-4		-4		-4	
	24				-2		
	.	.				-5	
	.	.					
	.	.					
	.	.					

Somit nach (2):

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1} + \frac{1}{z} + \frac{2}{1} + \frac{2}{z} + \frac{3}{1} + \frac{3}{z} + \dots$$

Dieser Kettenbruch konvergiert für alle z , die nicht auf der negativ-reellen Achse liegen (vgl. [8], § 93).

Soll eine im Nullpunkt reguläre Funktion

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$$

in einen Kettenbruch entwickelt werden, so betrachtet man die Hilfsfunktion

$$\frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{u^{n+1}},$$

deren Kettenbruch nach (1) durch

$$\frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{s_0}{u} - \frac{q_1^{(0)}}{1} - \frac{e_1^{(0)}}{u} - \frac{q_2^{(0)}}{1} - \dots$$

gegeben ist. Setzt man hier für u wieder $1/z$ ein, so führt eine Äquivalenztransformation, nämlich Erweitern aller ungeraden Teilbrüche mit z , unmittelbar zum gewünschten Resultat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n = \frac{s_0}{1} - \frac{z q_1^{(0)}}{1} - \frac{z e_1^{(0)}}{1} - \frac{z q_2^{(0)}}{1} - \frac{z e_2^{(0)}}{1} - \frac{z q_3^{(0)}}{1} - \dots$$

man beispielsweise für die Koeffizienten der Funktion

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

QD-Schema auf, so erhält man

$$q_{\sigma}^{(v)} = \frac{v + \sigma - 1}{(v + 2 \sigma - 2)(v + 2 \sigma - 1)}; \quad e_{\sigma}^{(v)} = \frac{-\sigma}{(v + 2 \sigma - 1)(v + 2 \sigma)}$$

damit durch Einsetzen in (3) den bekannten Kettenbruch

$$e^z = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z}{1 + \cfrac{z/2}{1 - \cfrac{z/6}{1 + \cfrac{z/6}{1 - \cfrac{z/10}{1 + \cfrac{z/10}{\ddots}}}}}}}$$

3. Summation schlecht konvergenter Reihen

Für viele Zwecke der angewandten Mathematik sind auch geometrische Reihen nicht genügend gut konvergent. Beispielsweise benötigt man zirka $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ Glieder der Reihe, um eine relative Genauigkeit von 10^{-6} zu erreichen.

unendliche Reihen, die sich ungefähr wie eine geometrische Reihe verhalten heisst, der Quotient von zwei aufeinanderfolgenden Gliedern variiert langsam), erweist sich der QD-Algorithmus als praktisch brauchbares Summierungsverfahren¹⁾.

Dessen Prinzip stammt von STIELTJES²⁾, der es insbesondere zur Summation divergenter Reihen verwendete:

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$ die zu summierende Reihe, so entwickle man die Funktion

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{z^{n+1}}$$

in J- oder S-Kettenbruch und setze dann $z = 1$ ein.

Als Beispiel betrachten wir eine Reihe, die im Verlaufe einer grösseren Rechnung auftrat:

$$0,775551 + 0,587903 + 0,451730 + 0,350836 + 0,274795 + 0,216681 + \dots$$

¹⁾ Wenn jedoch die zu summierende Reihe nicht den Charakter einer geometrischen Reihe hat (z. B. Beispiel $1 - 1! + 2! - 3! + 4! - \dots$), so ist wohl das Verfahren von D. SHANKS vorzuziehen (Vgl. D. SHANKS, *An Analogy Between Transients and Mathematical Sequences...*, Naval Ordnance Laboratory Memorandum 9994.)

²⁾ STIELTJES, *Oeuvres*, Bd. 2; siehe auch H. WALL [8], § 93.

Wir stellen das QD-Schema auf:

s_p	$q_1^{(p)}$	$e_1^{(p)}$	$q_2^{(p)}$	$e_2^{(p)}$	$q_3^{(p)}$
0,775 551					
	0,758 045 6				
0,587 903		0,010 329 5			
	0,768 375 1		0,615 525 8		
0,451 730		0,008 274 7		0,012 955 6	
	0,776 649 8		0,620 206 7		0,479 004 3
0,350 836		0,006 607 9		0,010 006 0	
	0,783 257 7		0,623 604 8		
0,274 795		0,005 261 0			
	0,788 518 7				
0,216 681					

Hieraus nach (2), wenn man $z = 1$ einsetzt:

$$\sum_0^\infty s_p = \frac{0,775\,551}{1} - \frac{0,758\,045\,6}{1} - \frac{0,010\,329\,5}{1} - \frac{0,615\,525\,8}{1} - \frac{0,012\,955\,6}{1} - \frac{0,479\,004\,3}{1} \approx 3,52348,$$

was mit allen angegebenen Stellen mit dem auf andere Weise erhaltenen wahren Wert übereinstimmt.

Es sei hier beiläufig bemerkt, dass die aus der Auflösungstheorie für lineare Gleichungssysteme und Integralgleichungen zweiter Art hervorgehenden Neumannschen Reihen fast immer schlecht konvergieren oder divergieren. Neumann verhält sich aber eine Neumannsche Reihe fast immer ungefähr wie eine geometrische, so dass man sie sehr wohl mit Hilfe des QD-Algorithmus summieren kann (und zwar auch im Falle der Divergenz). Diesbezügliche Versuche bei partiellen Differentialgleichungen, die allerdings erst im kleinen Maßstab durchgeführt wurden, verliefen durchaus positiv.

4. Auflösung von algebraischen Gleichungen

Es seien die Nullstellen eines Polynoms $N(z) = z^n + \dots$ zu bestimmen. Es erscheint zweckmässig, zunächst eine rationale Funktion $f(z) = N_1(z)/N(z)$ konstruieren, deren Zähler irgendein Polynom vom Grade $n - 1$ ist, dann die in eine Potenzreihe $\sum_0^\infty (s_\nu / z^{\nu+1})$ zu entwickeln und schliesslich durch Anwendung des QD-Algorithmus auf die s_ν die Pole von $f(z)$ zu bestimmen. Der QD-Algorithmus liefert diese nach I, Satz 3, als $\lim_{\nu \rightarrow \infty} q_\nu^{(\nu)}$.

Leider erweist sich nun dieses Vorgehen in vielen Fällen als undurchführbar, weil die Berechnung der «höheren» Quotienten $q_2^{(\nu)}, q_3^{(\nu)}, q_4^{(\nu)}, \dots$ für grosse ν der Regel mit einem erheblichen Genauigkeitsverlust verbunden ist, wie folgende Beispiel zeigt:

Beispiel: Bestimmung der Pole von

$$\frac{z^2 + 3z + 1}{z^3 - 9z^2 - 8z + 2} = \frac{1}{z} + \frac{12}{z^2} + \frac{117}{z^3} + \dots$$

Das zugehörige QD-Schema lautet in kompromierter Form, wenn mit sechs wesentlichen Stellen gerechnet wird:

s_v	$q_1^{(v)}$	$e_1^{(v)}$	$q_2^{(v)}$	$e_2^{(v)}$	$q_3^{(v)}$	$e_3^{(v)}$
1	12					
12	9,75	-2,25				
17		0,05342	-0,231487	-1,23826		
	9,80342		-1,52318		0,716621	
147		-0,00830		0,582573		0,158641
	9,79512		-0,932307		0,292689	
235		0,00079		-0,182893		
	9,79591		-1,11599			
1057		-0,00009				
	9,79582					
18099						

Die Werte $q_1^{(v)}$ konvergieren in der Tat gegen eine Nullstelle des Polynoms $z^3 - 9z^2 - 8z + 2$, aber infolge der kleinen und damit relativ ungenauen Werte $e_1^{(v)}$ werden alle weiter rechts stehenden Größen unzuverlässig. Insbesondere wird auch $e_3^{(0)}$ nicht 0, wie es auf Grund der Theorie (I, Satz 2) zu erwarten wäre.

5. Die progressive Form des QD-Algorithmus

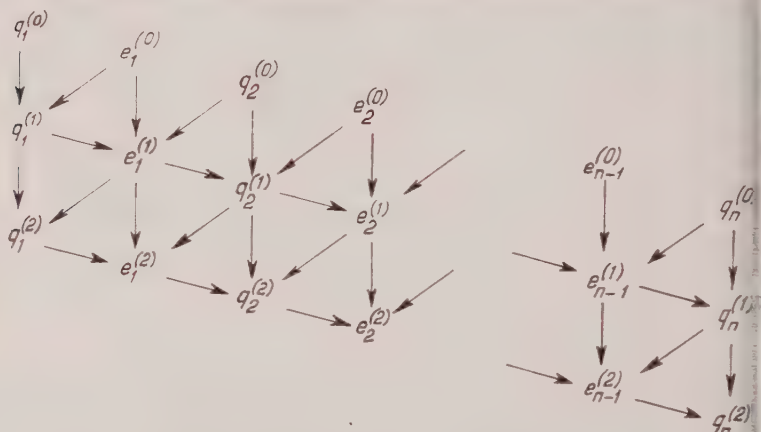
Die wenig ermutigenden Resultate des § 4 lassen sich wesentlich verbessern, wenn man die Formeln (4) in I dazu benützt, um aus einer Schrägzeile des QD-Schemas (komprimierte Form) die nächst tiefer liegende zu berechnen. Zu diesem Zweck sind nur die Formeln (I, 4) umzustellen und dann unter Beachtung von $e_0^{(v+1)} = 0$ nacheinander für $\sigma = 1, 2, 3, \dots$ anzuwenden:

$$\left. \begin{aligned} q_{\sigma}^{(v+1)} &= q_{\sigma}^{(v)} + e_{\sigma}^{(v)} - e_{\sigma-1}^{(v+1)}, \\ e_{\sigma}^{(v+1)} &= \frac{e_{\sigma}^{(v)} q_{\sigma+1}^{(v)}}{q_{\sigma}^{(v+1)}}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Wenn also einmal die in der obersten Schrägzeile stehenden Elemente $q_{\sigma}^{(0)}$ und $e_{\sigma}^{(0)}$ bekannt sind, kann man vermöge der Formel (4) das ganze QD-Schema von oben nach unten aufbauen (statt von links nach rechts). Die progressive Form des QD-Algorithmus ist natürlich besonders dann vorteilhaft, wenn die s_v die Koeffizienten einer rationalen Funktion sind. Nach I, Satz 2, ist dann das QD-Schema nach rechts beschränkt (das heisst $e_n^{(v)} = 0$ für ein gewisses n und

alle r), so dass die Berechnung einer neuen Schrägzeile nach (4) nur endlich viele Rechenoperationen erfordert.

Schematische Darstellung dieses Vorgangs (die Pfeile geben an, welche Größen zur Berechnung eines neuen Elements herangezogen werden müssen).



6. Auflösung algebraischer Gleichungen mit Hilfe des progressiven QD-Algorithmus

Wir wenden uns wieder der Aufgabe zu, die algebraische Gleichung $N(z)$ durch Bestimmung der Pole von $f(z) = N_1(z)/N(z)$ aufzulösen. Der progressive QD-Algorithmus ist das geeignete Werkzeug für diesen Zweck, weil er in natürlicher Weise und ohne wesentlichen Genauigkeitsverlust die $q_\sigma^{(r)}$ für grosse σ zu berechnen erlaubt¹⁾. Auf diese Weise kann man die Nullstellen von N beliebig genau approximieren, soweit sie nicht gleiche Absolutbeträge besitzen. Ein Problem bietet lediglich die Beschaffung der Anfangswerte $q_\sigma^{(0)}$ und $e_\sigma^{(0)}$. Man findet diese nach (2) offenbar durch Entwicklung der rationalen Funktion $N_1(z)/N(z)$ in einen S-Kettenbruch mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus. Ausgehend von den Polynomen

$$N_1(z) = z^{n-1} + \dots \quad \text{und} \quad N_0^*(z) = N(z) = z^n + \dots$$

konstruieren wir für $k = 1, 2, 3, \dots$ nacheinander die Polynome $N_k(z)$ und $N_{k+1}(z)$.

¹⁾ Nachtrag bei der Korrektur. Von Herrn Dr. A. HOUSEHOLDER, Oak Ridge, Tenn., wozu ich darauf aufmerksam gemacht, dass AITKEN für seine unter [1] behandelte Erweiterung der Bernoullischen Methode ebenfalls eine progressive Form angibt. Vgl. A. C. AITKEN, *Four Numerical Studies in Algebraic Equations and Matrices*, Proc. Royal Soc. Edinburgh 51, 80 (1931). Über die sich daraus für den QD-Algorithmus ergebenden Folgerungen wird später berichtet werden.

Grade $n - k$:

$$\left. \begin{aligned} N_k^*(z) &= \frac{z N_k(z) - N_{k-1}^*(z)}{q_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ N_{k+1}(z) &= \frac{N_k^*(z) - N_k(z)}{e_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Bei werden die q_k und e_k eindeutig bestimmt, wenn man verlangt, dass die Koeffizienten der höchsten Potenzen in allen diesen Polynomen N_k und N_k^* 1 sollen.

Da man nachträglich leicht feststellt, dass der endliche Kettenbruch

$$\frac{1}{z} - \frac{q_1}{1} - \frac{e_1}{z} - \frac{q_2}{1} - \dots$$

Funktion $f(z)$ darstellt, sind diese q_k, e_k gerade die gesuchten Anfangswerte $f_k^{(0)}$, wie ein Vergleich mit (2) zeigt.

Beispiel: Bestimmung der Pole von

$$\frac{z^2 + 3z + 1}{z^3 - 9z^2 - 8z + 2}.$$

erhalten nach (5), wenn man mit sechs wesentlichen Stellen rechnet (ausgehend von $N_j^* = z^3 - 9z^2 - 8z + 2$; $N_1 = z^2 + 3z + 1$):

$N_1^* = 12z^2 + 9z - 2$;	also $q_1 = 12$	$N_1^* = z^2 + 0,75z - 0,166667$
$N_2 = -2,25z - 1,16667$	also $e_1 = -2,25$	$N_2^* = z + 0,518519$
$N_2^* = -0,231481z + 0,166667$	also $q_2 = -0,231481$	$N_2^* = z - 0,720003$
$N_3 = -1,23852$	$e_2 = -1,23852$	$N_3 \equiv 1$
$N_3^* = 0,720003$	$q_3 = 0,720003$	$N_3^* \equiv 1$.

mit kann das QD-Schema nach (4) aufgebaut werden. (Die s_r werden für diesen Zweck gar nicht gebraucht und sind darum weggelassen):

$q_1^{(v)}$	$e_1^{(v)}$	$q_2^{(v)}$	$e_2^{(v)}$	$q_3^{(v)}$	$(e_3^{(v)})$
12					
	-2,25				
9,75		-0,231481			
	0,0534187		-1,23852		
9,80342		-1,52342		0,720003	
	-0,0083011		0,585353		0
9,79512		-0,929766		0,134650	
	0,0007880		-0,0847716		0
9,79591		-1,01533		0,219422	
	-0,0000816		0,0183199		0
9,79583		-0,996928		0,201102	
	+0,0000083		-0,0036955		0
.	.	-1,00063		0,204798	
.	.	.	0,0007563		0
.	.	.	.	0,204012	
.	0
.	0

Das Beispiel zeigt, dass die numerische Instabilität beseitigt ist; die drei Kolonnen $q_1^{(v)}$, $q_2^{(v)}$, $q_3^{(v)}$ konvergieren offensichtlich gegen die gesuchten Pole

$$\lambda_1 = 5 - \sqrt[3]{23} \approx 9,79583; \lambda_2 = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 5 - \sqrt[3]{23} \approx 0,204168.$$

Für die Fälle, wo die Folgen der $q_\sigma^{(v)}$ nicht genügend gut konvergieren, sind konvergenzverbessernde Massnahmen vorgesehen. Sie beruhen darauf, dass man auf die unendlichen Reihen in der aus (4) folgenden Beziehung

$$\lambda_\sigma = \lim_{v \rightarrow \infty} q_\sigma^{(v)} = q_\sigma^{(v)} + \sum_{\kappa=v}^{\infty} e_\sigma^{(\kappa)} - \sum_{\kappa=v+1}^{\infty} e_{\sigma-1}^{(\kappa)}$$

die Methoden von § 3 anwendet.

Wenn die zu lösende Gleichung *konjugiert komplexe Wurzeln* hat, so zeigt sich dies durch ein Oszillieren gewisser q -Werte an, genauer: Wenn

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_{k-1}| = |\lambda_k| > |\lambda_{k+1}| > \dots,$$

so konvergieren zwar die Kolonnen $q_\sigma^{(v)}$ für $\sigma = k-1, k$ nach wie vor gegen die Wurzeln der Gleichung, aber die Quotienten $q_k^{(v+1)}$ und $q_k^{(v)}$ oszillieren, und insbesondere konvergiert $e_{k-1}^{(v)}$ für $v \rightarrow \infty$ nicht gegen Null. Trotzdem finden wir in I, Satz 4, und insbesondere in Folgerung 2 ein Mittel zur Bestimmung der konjugiert komplexen Wurzeln λ_{k-1} und λ_k (man setze dort $m = k-2$, $n = k$):

Man bilde die Polynome

$$\hat{p}_k^{(v)}(z) = z^2 - [q_{k-1}^{(v+1)} + q_k^{(v)}]z + q_k^{(v)} q_{k-1}^{(v)},$$

die für $v \rightarrow \infty$ gegen $(z - \lambda_{k-1})(z - \lambda_k)$ konvergieren.

Beispiel: Auflösung der Gleichung $z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 1$ durch Bestimmung der Pole von $z^3/(z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 4z + 1)$. Der S-Kettenbruch der Funktion wurde nach (5) bestimmt und lautet:

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{4}{1} + \frac{1,25}{z} - \frac{0,45}{1} + \frac{0,977778}{z} - \frac{1,41414}{1} + \frac{0,0292207}{z} - \frac{0,392857}{1}.$$

mit lässt sich das QD-Schema aufbauen (in komprimierter Form und ohne $s_1^{(v)}$):

$q_1^{(v)}$	$e_1^{(v)}$	$q_2^{(v)}$	$e_2^{(v)}$	$q_3^{(v)}$	$e_3^{(v)}$	$q_4^{(v)}$
4						
	- 1,25					
2,75		0,45				
	- 0,204 545		- 0,977 778			
2,545 45		- 0,323 232		1,414 14		
	0,025 974 0		4,277 78		- 0,029 220 7	
2,571 43		3,928 57		- 2,892 86		0,392 857
	0,039 682 5		- 3,150 00		0,003 968 2	
2,611 11		0,738 889		0,261 111		0,388 889
	0,011 229 3		- 1,113 16		0,005 910 2	
2,622 34		- 0,385 496		1,380 18		0,382 979
	- 0,001 650 8		3,985 39		0,001 640 0	
↓	↓	3,601 54		- 2,603 57		0,381 339
λ_1	0		- 2,881 06		- 0,000 240 2	
		komplexes Wurzelpaar ?				0,381 579
				0,277 730		
					- 0,000 330 0	
					↓	0,381 909
					0	↓
						λ_4

$q_2^{(v)}$ und $q_3^{(v)}$ nicht zu konvergieren scheinen, bilden wir nach (6a) die Polynome $\hat{p}_k^{(v)}$ (mit $k = 3$):

$$\begin{aligned}\hat{p}_3^{(0)} &= z^2 - 1,090 91 z + 0,636 364, \\ \hat{p}_3^{(1)} &= z^2 - 1,035 71 z + 0,935 065, \\ \hat{p}_3^{(2)} &= z^2 - z + 1,025 79, \\ \hat{p}_3^{(3)} &= z^2 - 0,994 68 z + 1,019 80, \\ \hat{p}_3^{(4)} &= z^2 - 0,997 97 z + 1,003 67, \\ &\dots\end{aligned}$$

Die konvergieren für $v \rightarrow \infty$ offenbar gegen $z^2 - z + 1$, welches in der Tat Teiler von $z^4 - 4 z^3 + 5 z^2 - 4 z + 1$ ist; die zugehörigen Wurzeln sind $= (1 \pm i\sqrt{3})/2$.

7. Quadratische Konvergenz des QD-Algorithmus

Man kann die in § 5 behandelte progressive Form des QD-Algorithmus auch eine Methode zur Berechnung der S-Kettenbrüche für die in I, § 5, definierten Funktionen

$$f_v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_{v+n}}{z^n + 1} \quad (v = 1, 2, 3, \dots)$$

dem S-Kettenbruch von $f_0(z)$ $f(z)$ auffassen. Wir wollen nun auch noch

die J -Kettenbrüche dieser Funktionen in den Kreis unserer Betrachtung ziehen, wobei wir der Einfachheit halber den S - (bzw. J -) Kettenbruch einer Funktion $f(z)$ mit S_f (bzw. J_f) bezeichnen. Auf diese Weise wird die Konvergenz des QD-Algorithmus wesentlich beschleunigt werden können.

Man kann nämlich die Formeln (4), die dem progressiven QD-Algorithmus zugrunde liegen, offenbar in zwei Formelgruppen aufspalten:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\sigma}^{(r+1)} &= q_{\sigma}^{(r)} + e_{\sigma}^{(r)} \\ \beta_{\sigma}^{(r+1)} &= q_{\sigma-1}^{(r)} e_{\sigma}^{(r)} \end{aligned} \right\} \text{ für } \sigma = 1, 2, \dots, n, \text{ mit } e_n^{(r)} = 0;$$

$$\left. \begin{aligned} q_{\sigma}^{(r+1)} &= \alpha_{\sigma}^{(r+1)} - e_{\sigma+1}^{(r+1)} \\ e_{\sigma}^{(r+1)} &= \frac{\beta_{\sigma}^{(r+1)}}{q_{\sigma}^{(r+1)}} \end{aligned} \right\} \text{ für } \sigma = 1, 2, \dots, n, \text{ mit } e_0^{r+1} = \beta_n^{r+1} = 0.$$

Wie die Ausführungen von I, § 5, zeigen¹⁾, sind die hier auftretenden $\alpha_{\sigma}^{(r+1)}$, $\beta_{\sigma}^{(r+1)}$ tatsächlich die Elemente des J -Kettenbruchs $J_{\sigma+1}$, der demnach als Zwischenglied der Berechnung von S_{r+1} aus S_r erscheint.

Man kann nun mit Vorteil benützen, dass bei einer als J -Kettenbruch gegebenen Funktion die Verschiebung des Koordinatennullpunktes eine triviale Operation ist, man muss nur zu jedem α_{σ} dieselbe Konstante addieren, denn es ist ja

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1 - z} = \frac{\beta_2}{\alpha_2 - z} = \dots = \frac{\beta_n}{\alpha_n - z} = \frac{\beta_1}{\alpha_1^* - z} = \frac{\beta_2}{\alpha_2^* - z} = \dots$$

wenn $z = \bar{z} + t$, $\alpha_{\sigma} = \bar{\alpha}_{\sigma} + t$.

Es ist nun zweckmässig, im Zwischenschritt, das heisst unmittelbar vor der Berechnung der $\alpha_{\sigma}^{(r+1)}$ und $\beta_{\sigma}^{(r+1)}$, den Nullpunkt der z -Ebene in die Nähe eines Pols von $f(z)$ zu verschieben (wir bezeichnen diesen Pol fortan mit Unter geeigneten Umständen wird der Absolutbetrag dieses Pols im neuen Koordinatensystem wesentlich kleiner sein als bei den andern Polen. Das ist nach den Ausführungen des Beweises von Satz 3 in der Arbeit I zur Folge, dass die $e_{\sigma}^{(r+1)}$ im weiteren Verlauf der Rechnung wesentlich rasger gegen 0 konvergieren. Das hat wiederum zur Folge, dass man bessere Näherungswerte für λ_n erhält, die man für weitere Koordinatenverschiebungen nützen kann, so dass die Konvergenz immer schneller wird.

Führt man bei jedem Schritt der obigen Rechenvorschrift eine solche Koordinatenverschiebung aus und wird jeweils $q_n^{(r)}$ als Näherungswert für λ_n betreffenden Koordinatensystem gewählt, so ergibt sich (nachdem man

1) Man beachte insbesondere den Kettenbruch

$$f(z) = \frac{s_p}{z} \left[1 + \frac{q_1^p}{z - q_1^p - e_1^p} + \frac{e_1^p q_2^p}{z - q_2^p - e_2^p} + \frac{e_2^p q_3^p}{z - q_3^p - e_3^p} + \dots \right] = \left(\frac{s_p}{z} + f_{p+1}(z) \right)$$

$\alpha^{(v-1)}$ und $\beta_{\sigma}^{(v-1)}$ wieder eliminiert hat) die folgende Rechenvorschrift für die Berechnung der Nullstellen eines Polynoms $N(z)$:
 Zuerst wird wie in § 6 eine rationale Funktion $N_1(z)/N(z)$ konstruiert und zugleich in einen S-Kettenbruch entwickelt.
 Ausgehend von den Elementen $q_n^{(0)}, e_{\sigma}^{(0)}$ dieses Kettenbruchs und mit $t_0 = 0$, berechne man nacheinander für $v = 0, 1, 2, \dots$

$$\left. \begin{aligned} t_{v+1} &= t_v + q_n^{(v)}, \\ q_{\sigma}^{(v+1)} &= q_{\sigma}^{(v)} + e_{\sigma}^{(v)} - e_{\sigma-1}^{(v+1)} - q_n^{(v)}, \\ e_{\sigma}^{(v+1)} &= \frac{q_{\sigma+1}^{(v)} e_{\sigma}^{(v)}}{q_{\sigma}^{(v+1)}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{für } \sigma = 1, 2, \dots, n \\ &\text{mit } e_0^{(v+1)} = e_n^{(v)} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Man konvergieren die $e_{\sigma}^{(v)}$ gegen 0 und die Größen $t_v - q_{\sigma}^{(v)}$ gegen die gesuchten Nullstellen von $N(z)$, und zwar konvergieren $e_{n-1}^{(v)}$ und $t_v - q_n^{(v)}$ quadratisch gegen 0 bzw. λ_n .

Sobald $e_{n-1}^{(v)}$ hinreichend klein geworden ist, lässt man $q_n^{(v)}$ und $e_{n-1}^{(v)}$ weg und setzt die Rechenvorschrift mit $n - 1$ an Stelle von n weiter. Auf diese Weise erhält man auch λ_{n-1} mit quadratischer Konvergenz usw. Die Praxis zeigt, dass die Berechnung von λ_n relativ lange dauert, während dann die übrigen λ_n erhalten werden. Wenn auch allfällige komplexe Wurzeln quadratischer Konvergenz erhalten werden sollen, so muss man auch komplexe Koordinatenverschiebungen ausführen.

Numerisches Beispiel. Wir bestimmen wie in § 6 die Nullstellen von $9z^2 - 8z + 2$ als Pole der rationalen Funktion

$$\frac{z^2 + 3z + 1}{z^3 - 9z^2 - 8z + 2}.$$

S-Kettenbruch lautet hier nach § 6:

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{12}{1} + \frac{2.25}{z} + \frac{0,231481}{1} + \frac{1,23852}{z} - \frac{0,720003}{1}.$$

Man ergibt die Rechenvorschrift (9) bei sechsstelliger Rechnung:

$q_1^{(v)}$	$e_1^{(v)}$	$q_2^{(v)}$	$e_2^{(v)}$	$q_3^{(v)}$	t_v
12	-2,25	-0,231481	-1,23852	0,720003	0
9,03000	0,057678	-2,24768	0,396735	-0,396735	0,720003
9,48441	-0,013669	-1,44054	0,109264	-0,109264	0,323268
9,58005	0,002055	-1,22407	0,009753	-0,009753	0,214004
9,59181	-0,000262	-1,20430	0,000079	-0,000079	0,204251
9,59163	0,000033	-1,20417	0	0	<u>0,204172</u>
10,7958	-0,000004	0,000004			-0,999998
10,7958	0	0			<u>-0,999995</u>
0					<u>9,79580</u>

Die unterstrichenen Werte sind die gesuchten Nullstellen. Die Abweichung von den wahren Werten sind auf Aufrundungsfehler zurückzuführen, insbesondere auch auf solche während der Berechnung des S -Kettenbruches (man beachte zum Beispiel den ungenauen Anfangswert $q_3^0 = 0.720003$ an Stelle von 0.720000).

Das Literaturverzeichnis befindet sich am Schlusse der Arbeit I (H. RUMHAUSER, *Der Quotienten-Differenzen-Algorithmus*, ZAMP 5, 233 [1954]).

Summary

The present paper gives several applications of the quotient-difference (= QD)-algorithm [see ZAMP 5, 233 (1954)]. These include the summation of infinite series with the aid of continued fractions and the solution of algebraic equations. For the latter, a slight modification of the QD-algorithm is developed in § 5.

(Eingegangen: 18. September 1953.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

Ein Impulsgenerator mit Sekundäremissionsröhren

Von ERNST BALDINGER und MARC NICOLET, Basel¹⁾

Der Entwurf dieses Apparates wurde durch eine Arbeit von F. H. WELLS angeregt. Der Apparat erzeugt Rechteckimpulse einstellbarer Dauer sowie Sperrimpulse zur Zeitablenkung und zur Hellsteuerung eines Oszillographen und wird zur Kontrolle und zur Messung der charakteristischen Eigenschaften von Breitbandverstärkern, Laufzeitketten usw. verwendet. Die grundsätzliche Anordnung ist dem Blockdiagramm (Figur 1) zu entnehmen.

Ein Kippgenerator G liefert eine Sägezahnspannung Z und einen Rechteckimpuls P , der – über die Kathodenstufe K – zur Hellsteuerung der Kathodenstrahlröhre dient. Der Impuls P steuert ebenfalls die Schaltung J , in welcher ein Testimpuls S erzeugt wird. Das RC -Glied I gestattet, diesen Testimpuls innerhalb der Zeit T_1 zu verschieben. Die Ausgangsstufe A liefert sowohl positive als auch negative Impulse einstellbarer Grösse.

Die Impulse P und S werden mit einer Kippschaltung erzeugt, die als Grundelement eine Sekundäremissionspentode verwendet. Ihr Vorteil besteht darin, dass infolge der gleichzeitigen Anwesenheit von positiven und negativen Signalen alle impulsförmig gesteuerten Röhren mit Ruhestrom Null betrieben werden können. Infolgedessen lassen sich überall grosse Momentanwerte der Ströme und somit kurze Anstiegszeiten der Impulse erreichen. Das Prinzip der verwendeten Kippschaltung ist in Figur 2 dargestellt. Im Gegensatz zu üblichen Röhren für

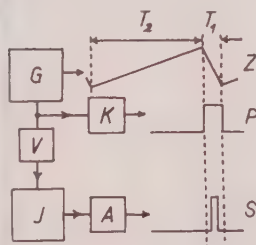
¹⁾ Physikalisches Institut der Universität Basel, Abteilung für angewandte Physik.

²⁾ F. H. WELLS, *Nucleonics* 10, Nr. 4, 28 (1952). I. A. D. LEWIS und F. H. WELLS, *Microsecond Pulse Techniques* (Pergamon Press, London 1954).

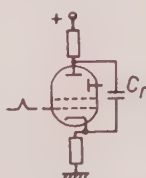
anode mehr Strom als die Kathode, weshalb die Schaltung zu Kippvorgängen neigt. Die Röhre kann, einmal in den leitenden Zustand übergegangen, auf verschiedene Arten wieder gesperrt werden:

- durch die Entladung des Kondensators C_r ;
- durch ein negatives Gittersignal, wie dies beim Generator G der Fall ist;
- durch eine in die Anode eingeführte, am Ende kurzgeschlossene Laufzeitkette, deren Reflexsignal die Kathode wieder über das Gitterpotential hebt und so die Impulsdauer bestimmt. Nach diesem Prinzip arbeitet der Generator J , der den Testimpuls S erzeugt.

Um einer Überlastung der Sekundäremissionsröhren vorzubeugen, ist das Verhältnis $T_1 : T_2$ in Figur 1 mit 1 : 100 fest vorgeschrieben. Man erreicht dies durch



Figur 1
Blockdiagramm.



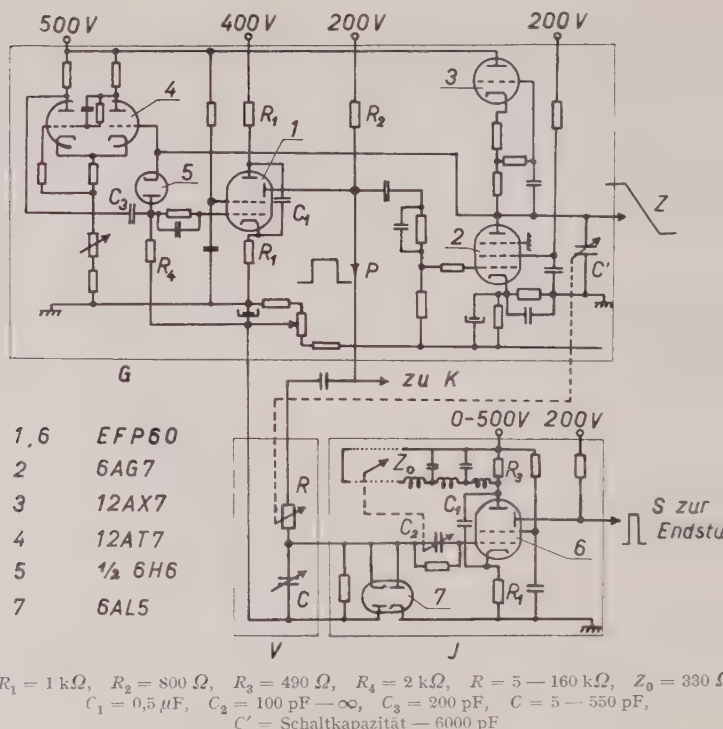
Figur 2
Prinzip einer Kipperschaltung mit Sekundäremissionsröhre.

in Figur 3 wiedergegebene Anordnung. Führt nämlich die Röhre 1 Strom, so entladet sich der Kondensator C' durch die Pentode 2 angenähert linear. Dieser Vorgang hört auf, wenn die Rückführdiode 5 zu leiten beginnt, wodurch beide Röhren gesperrt werden. Über die Triode 3 wird nun C' mit einem rund hundertmal kleineren Strom wieder aufgeladen. Sobald der Ansprechpegel der Schmitt-Schaltung ¹⁾ überschritten wird, führt diese dem Gitter der EFP60 (Röhre 1) ein positives Signal zu, wodurch die Entladung des Kondensators C' von neuem beginnt. Die für den ganzen Zyklus benötigte Zeit hängt vom Werte von C' ab. Eine möglichst lineare Entladung des Kondensators C' zu gewährleisten, ist es zweckmässig, dem Bremsgitter der Röhre 2 ein gegenüber der Kathode positives Potential von ≈ 50 V zu erteilen. Diese Massnahme verbessert die i_a - U_a -Kennlinie der Pentode und erhöht insbesondere bei kleinen Anodenspannungen den Innenwiderstand²⁾.

Das Signal P wird nun einerseits der Kathodenstufe K (Hellsteuerung), andererseits einem RC -Glied zugeführt und so aus dem Rechteckimpuls eine exponentiell ansteigende Kurve erzeugt. Ihr Schnittpunkt mit dem Ansprechpegel J bestimmt den Zeitpunkt des Einsatzes des Testimpulses in J . Der Drehkondensator C gestattet, diesen Punkt innerhalb von T_1 zu verschieben. Durch Änderung der Gliederzahl der Laufzeitkette in der Kipperschaltung J lässt sich die Dauer des Testimpulses zwischen zirka 10^{-7} und $127 \cdot 10^{-7}$ s ver-

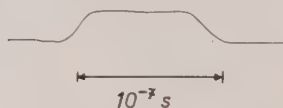
¹⁾ Vgl. zum Beispiel W. C. ELMORE und H. SANDS, *Electronics* (McGraw-Hill, New York, 1949), S. 10.

²⁾ Vgl. zum Beispiel K. R. SPANGENBERG, *Vacuum Tubes* (McGraw-Hill, New York, 1948), S. 72.



Figur 3

Schaltschema der Teile G, I' und J von Figur 1.



Figur 4

Testimpuls von 10^{-7} s Dauer.

ändern. Figur 4 zeigt den kürzesten Impuls von 10^{-7} s Dauer, aufgenommen dem Philips-Oszillographen Typ GM5653 02 in Kombination mit der raschen Zeitablenkung des Impulsgenerators.

Testimpuls und Zeitablenkung werden direkt den Ablenkplatten Kathodenstrahlröhre zugeführt. Die Ausgangsstufe J in Figur 1 - ebenfalls EFP60 - liefert im günstigsten Falle einen Impulsstrom von $\approx 0,28 \text{ A}$ oder maximale Impulsspannung von $\approx 400 \text{ V}$. Zum Philips Oszillographen sei

berkrt, dass die Verdrahtung zu den Ablenkplatten der Braunschen Röhre abändert werden muss, da sonst storende, hochfrequente Schwingungen auftreten¹⁾. Für Beobachtung rasch ablaufender Vorgänge wird der Abfall (T_1 , Figur 1), langsam ablaufende Vorgänge der Anstieg (T_2 , Figur 1) der Sägezahnspannung verwendet. Die Repetitionsfrequenz ist einstellbar zwischen $5 \cdot 10^4$ und 100 kHz, was einer Variation der Schreibgeschwindigkeit von $5 \cdot 10^7$ bis 10^4 cm/s entspricht.

Summary

A pulse generator employing secondary emission valves is described. The generator produces positive and negative output pulses with adjustable pulse duration from 10^{-7} to 10^{-5} s and a rise time of about $1,3 \cdot 10^{-8}$ s. In addition to the test-pulses, signals for the beam brightening and the sweep of a cathode-ray oscillograph are generated, permitting the study of high-speed transients with an ordinary oscilloscope.

(Eingegangen: 13. Juli 1954.)

On Rotational Viscous Flow Through a Tube²⁾

By PETER HENRICI, Washington, D.C.³⁾

1. Introduction

In a recent paper [3]⁴⁾, L. COLLATZ and H. GÖRTLER consider the stationary, fully rotational, axisymmetric flow of a viscous fluid through a straight circular tube at moderate or high Reynolds numbers. It is shown that after some simplification this problem can be reduced to the following eigenvalue problem: a function $G(s)$ proportional to the angular velocity component:

$$s^2 G'' + s G' - G = \lambda s^2 (1 - s^2) G, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (1a)$$

$$G(0) = G(1) = 0. \quad (1b)$$

With the aid of the eigenfunctions of this problem the rotation in the tube can be computed for any given initial rotation. Furthermore, the n th eigenvalue of (1) measures the exponential decay of the corresponding component of rotation in the direction of the flow.

The first five eigenvalues and eigenfunctions of (1) are computed in [3] by numerical methods, and a crude approximation for the large eigenvalues is given. In the present note we supplement these results by asymptotic expressions for large eigenvalues and the corresponding eigenfunctions. It turns out that in

¹⁾ Die tiefste Eigenresonanz der abgeänderten Zuleitungen (inklusive der Kapazität der Ablenkplatten), liegt bei 80 MHz. Der aperiodische Grenzwiderstand beträgt $\sim 150 \Omega$. Mit einer Verdrahtungskapazität von ~ 20 pF entspricht dies einer Anstiegszeit von $\sim 0,5 \cdot 10^{-8}$ s.

²⁾ This paper was prepared under a National Bureau of Standards contract with American University and was supported by the Office of Naval Research.

³⁾ American University.

⁴⁾ Numbers in brackets refer to References, page 516.

particular for the large eigenvalues we are thus able to get much better approximations than those obtained in [3]. We also indicate an alternative method of the computation of the low eigenvalues. - The physical conclusions of [3] are affected by our results.

2. Analytical Solution of the Eigenvalue Problem

In the following we put

$$\lambda = -16\beta^2.$$

It is easy to verify that the differential equation (1a) and the first of the boundary conditions (1b) are satisfied by the function

$$G(s) = 4\beta s e^{-2\beta s^2} {}_1F_1(1-\beta; 2; 4\beta s^2), \\ - s^{-1} M_{\beta, 1/2}(4\beta s^2),$$

where the symbols ${}_1F_1$ and M denote the confluent hypergeometric series and the Whittaker function¹⁾ respectively. The eigenvalues of the problem can then be computed by (2) from the nonvanishing zeros of the function

$$f(\beta) = M_{\beta, 1/2}(4\beta).$$

Taking for granted from [3] that the eigenvalues are all negative, we can confine our search for these zeros to real and, since²⁾

$$f(-\beta) = -f(\beta),$$

to positive values of β .

3. Integral Representation for $G(s)$

The last factor on the right of (3) is, as is easily seen, equal to the coefficient of z^{-1} in the Laurent expansion at $z = \infty$ of the function

$$\frac{1}{\beta} e^{4\beta s^2 z} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^\beta,$$

which in the z -plane cut between $z = 0$ and $z = 1$ is univalued and regular except at $z = \infty$. By the residue theorem we thus have

$$G(s) = \frac{2s e^{-2\beta s^2}}{\pi i} \int_C e^{4\beta s^2 z} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^\beta dz,$$

where the integral is to be extended along an arbitrary simple contour encircling the mentioned cut clockwise. Setting

$$z = 2s^2 + s^2 e^{i\theta}, \quad \log\left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

we can also write

$$G(s) = \frac{2s}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{4\beta s^2 (2s^2 + s^2 e^{i\theta})} \log\left(1 - \frac{1}{2s^2 + s^2 e^{i\theta}}\right) d\theta.$$

¹⁾ In WHITTAKER and WATSON's original notation; see E. T. WHITTAKER and G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed. (Cambridge University Press, London, 1927), p. 337.

²⁾ *Modern Analysis*, p. 338.

4. Large Eigenvalues

In order to obtain information about the eigenvalues, we consider first the case $s = 1$. In this case the integrand in (8) possesses the two (only seemingly coinciding) saddle points of the second order

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i0 \quad (9)$$

on the upper and the lower edge of the cut. At these points,

$$g = \mp i\pi, \quad g' = 0, \quad g'' = 0, \quad g''' \neq 0.$$

Integrating along the appropriate lines of steepest descent originating from $z_{1,2}$ and integrating from 0 to ∞ with respect to the new variable

$$t = \frac{g(z) \pm i\pi}{2} = -\frac{z}{2} - \frac{1}{2} \log \frac{1-z}{1+z}, \quad (z = 2z' + 1),$$

and defining the coefficients b_m ($m = 1, 2, \dots$) by

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m (3t)^{(m/3)-1} \\ (b_1 \quad 1 \quad b_3 \quad \frac{3}{5} \quad b_5 \quad \frac{3}{35} \quad \dots \quad b_{2l} - b_{1l} \quad \dots \quad 0) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

we obtain by a well-known lemma due to WATSON²⁾ the following asymptotic expansion for the function $f(\beta)^3$, valid for $|\arg \beta| \leq \pi - \delta$ with arbitrary $\delta > 0$:

$$\left. \begin{aligned} f(\beta) &\sim -\frac{4}{3\pi} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos \pi \left(\beta + \frac{m}{3} \right) \sin \frac{m\pi}{3} \Gamma \left(\frac{m}{3} \right) \left(\frac{3}{2\beta} \right)^{m/3} \\ &\quad \left| \frac{2}{3\pi} \Gamma \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{3}{2\beta} \right)^{1/3} \right| \sin \pi \left(\beta + \frac{1}{6} \right) \left| 1 - \frac{3}{70} \frac{\Gamma \left(\frac{5}{3} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{3} \right)} \left(\frac{3}{2\beta} \right)^{4/3} \dots \right| \\ &\quad \cos \pi \left(\beta + \frac{1}{6} \right) \left| 0 - \frac{33}{70} \frac{\Gamma \left(\frac{5}{3} \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{3} \right)} \left(\frac{3}{2\beta} \right)^{4/3} \dots \right| \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Using an argument similar to one put forward by WATSON⁴⁾, we can derive from (11) the first terms of an asymptotic expansion for the large zeros of $f(\beta)^5$. The

¹⁾ The branch of $\xi(t)$ which is real for positive t is to be considered here.

²⁾ G. N. WATSON, *A Treatise on the Theorie of Bessel Functions*, 2nd ed. (Cambridge University Press, London, 1944), p. 236.

³⁾ The first terms of this expansion can also be found in [1], p. 100. They are there in a form which is not very well suited to our purpose.

⁴⁾ *Bessel Functions*, p. 503.

⁵⁾ A similar expansion for the large zeros of $M_{\beta,0}(t/\beta)$ has been given by LAUWERIER [4], also in connection with a problem of viscous flow.

result is as follows:

$$\beta_n = n + \frac{1}{6} + A_4 \left(n + \frac{1}{6}\right)^{4/3} + A_8 \left(n + \frac{1}{6}\right)^{8/3} + O \left[\left(n + \frac{1}{6}\right)^{10/3} \right],$$

where n is a larger integer and

$$A_4 = -\frac{3}{35} \cdot \frac{(3/2)^{1/3}}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^2} = -0.0136718, \quad A_8 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} A_4^2 = 0.0003390.$$

We do not prove that β_n approximates just the n -th zero of $f(\beta)$; this should be clear, however, from the numerical results given below. Formula (12) should be contrasted with the approximation given in [3] for the large eigenvalues, which in the present notation amounts to

$$\beta_n \sim n.$$

5. Qualitative Behaviour of the Eigenfunctions

In order to discuss the asymptotic behaviour of the eigenfunctions, we assume in (8) $0 < s < l$. Putting

$$s = \cos \vartheta \quad \left(0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right),$$

we find that the saddle points lie now at

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm i \operatorname{tg} \vartheta}{2}$$

and are simple. Without further amplification we state the result of the saddle point integration, which is in accordance with [1], p. 105:

$$G(s) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi \beta \sin 2 \vartheta}} \sin \left(\beta (\pi - 2 \vartheta + \sin 2 \vartheta) - \frac{\pi}{4} \right), \quad \left. \begin{array}{l} \varepsilon \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \beta \rightarrow \infty \end{array} \right\}$$

This formula suggests that the relative maxima of $|G(s)|$ are smallest near $\vartheta = \pi$, i.e. $s = 2^{-1/2}$, and increase from there on towards the endpoints of the considered interval. In this direction we prove the following

Theorem. Let $\beta > 1/8$ and

$$s_j = \sqrt{\frac{1}{2} + j \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16\beta^2}}}, \quad (j = -1, 0, 1).$$

Then the sequence of the relative maxima of $|G(s)|$ decreases in (s_{-1}, s_0) and increases in (s_0, s_1) .

Proof. Equation (1a) may be written in the selfadjoint form

$$(s G')' + \varphi(s) G = 0,$$

where

$$\varphi(s) = 16 \beta^2 s (1 - s^2) - \frac{1}{s}.$$

since $\varphi(s) > 0$ in (s_{-1}, s_1) and since $s\varphi(s)$ is increasing in (s_{-1}, s_0) and decreasing in (s_0, s_1) , the assertion follows from a theorem due to SONINE and PÓLYA¹⁾. – It will be noted that

$$s_{-1} \sim \frac{1}{4\beta} \quad \text{and} \quad s_1 \sim 1 - \frac{1}{32\beta^2}.$$

6. Low Eigenvalues

The eigenvalues of low order are computed in [3] as zeros of a series which is defined by a three-term recurrence relation. It follows from (3) that the corresponding values of β may also be determined as the zeros of the confluent hypergeometric series

$${}_1F_1(1 - \beta; 2; 4\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n, \quad (14)$$

the terms of which may be computed by the two-term relation

$$\gamma_0 = 1; \quad \gamma_n = 4\beta \frac{n - \beta}{n(n+1)} \gamma_{n-1}.$$

7. Numerical Results

The following is a table of the first few values of β_n as computed from the values of λ_n given in [3], computed by the asymptotic expansion (12) and computed exactly from the zeros of (14). The calculation of (14), from which the zeros are determined by the regula falsi, was performed on the National Bureau of Standards Eastern Automatic Computer (SEAC) with the aid of the standard routine (working with double precision) for the hypergeometric function described in [2]²⁾.

n	β_n		
	[3]	(12)	(14)
1	1.156025	1.155760	1.156025
2	2.1619	2.161833	2.161876
3	3.163	3.163742	3.163755
4	4.146	4.164635	4.164640
5	5.12	5.165140	5.165143

We have not computed an estimate for the remainder in (12) and are therefore unable to give bounds for the error involved in using the asymptotic formula³⁾. The close agreement already between the first exact eigenvalues and the values computed by the asymptotic formula should however be noted.

¹⁾ See SZEGÖ [5], p. 161, footnote.

²⁾ It is a pleasure to acknowledge the able assistance of Mr. W. F. CANNILL in the performance of these computations.

³⁾ In this respect also the argument leading to the estimate for the error of λ_1 on p. 106 of [3] is not quite complete, because there is no indication how the lower bound $-l_2$ of $-\lambda_2$ was derived.

REFERENCES

- [1] H. BUCHHOLZ, *Die konfluente hypergeometrische Funktion* (Springer, Berlin Göttingen and Heidelberg, 1953).
- [2] W. F. CAHILL, *Programs for Computing the Hypergeometric Series*, Math. Tables and other Aids to Computation 8, 36–37 (1954).
- [3] L. COLLATZ and H. GÖRTLER, *Rohrströmung mit schwachem Drall*, Z. angew. Math. Phys. 5, 95–110 (1954).
- [4] H. A. LAUWERIER, *The Use of Confluent Hypergeometric Functions in Mathematical Physics and the Solution of an Eigenvalue Problem*, Appl. sci. Res. [A] 2, 184–204 (1949–51).
- [5] G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloquium Public. (New York, 1939).

Zusammenfassung

Für die Eigenwerte und Eigenfunktionen eines Eigenwertproblems, auf L. COLLATZ und H. GÖRTLER im Zusammenhang mit einer kürzlichen Untersuchung [3] über Rohrströmung mit schwachem Drall geführt worden sind, werden asymptotische Näherungsformeln angegeben, die insbesondere die höheren Eigenwerte mit grösserer Genauigkeit als in [3] zu berechnen gestatten. Auch die Ermittlung der niedrigen Eigenwerte wird ein einfaches Verfahren vorgeschlagen. Die Ergebnisse werden numerisch mit denen von [3] verglichen.

(Received: June 10, 1954.)

Varia – Miscellaneous – Divers

Internationaler Mathematikerkongress in Amsterdam September 1954

Der in Abständen von vier Jahren tagende Internationale Kongress Mathematik war in diesem Jahr von den holländischen Mathematikern – speziell vom Präsidenten, Prof. SCHOUTEN, und dem Sekretär, Prof. KOKSMA – in hervorragender Weise organisiert worden. Er vereinigte die führenden Mathematiker der meisten europäischen Länder, der nord- und südamerikanischen Staaten, der USSR, Australiens und der Staaten des fernen Osten. In sieben parallelen führten Sektionen (Algebra und Arithmetik, Analysis, Geometrie, Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Angewandte und numerische Mathematik, Grundlagen und Logik, Unterricht) wurden die wissenschaftlichen Mitteilungen eingegangen. Ausserdem waren verschiedene Gelehrte (worunter zwei Schweizer: ECKMANN und STIEFEL) von der Kongressleitung zu längeren Berichten über ihre Spezialgebiete eingeladen worden. An der Eröffnungssitzung sprach VON NEUMANN, Princeton, über *Ungelöste Probleme der Mathematik*, und WEYL übergab die sogenannte «Field-Medaille» an die beiden Mathematiker KODEIRA und SERRE. Diese Medaille wird an junge Mathematiker verliehen, die in den verflossenen vier Jahren besonders zur Entwicklung der Mathematik beigetragen haben.

In der Sektion für angewandte und numerische Mathematik traten vor allem die stürmischen Umwertungen zutage, welche der Einsatz der neueren mathematischen Methoden hervorgerufen hat.

en Instrumente (elektronische Rechenmaschinen usw.) mit sich gebracht. Die einstündigen Hauptvorträge dieser Sektion waren:

- VAN DANTZIG, Holland, über die mathematischen Probleme, welche durch die Überschwemmungskatastrophen des Jahres 1953 in Holland angeregt wurden.
 OSTEIN: *On Some Methods of Approximation in Fluid Mechanics.*
 EN: *Some Aspect of the Theory of Almost Periodic Functions.*
 MAN: *Current Problems of Mathematical Statistics.*
 FEL: *Recent Developments in Relaxation Techniques.*
 HMARSH: *Eigenfunction Problems Arising from Differential Equations.*
 DA: *Semi-group Theory and the Integration Problem of Diffusion Equations.*

ostündige Vorträge hielten:

- LATZ: *Fehlermassprinzipien in der praktischen Analysis.*
 ERA: *Methods of Funktional Linear Analysis in Mathematical Physics.*
 TENES: *Hilbert Space Methods in Calculus of Variations and Numerical Analysis.*
 PÉ DE FÉRIET: *Problèmes mathématiques posés par la mécanique statistique de la turbulence.*

LICH: *Halbbeschränkte Differentialoperatoren höherer Ordnung.*

CKER: *Recent Progress in the Theory of Surface Waves.*

Es ist eine grosse Ehre für die Schweiz, dass Prof. Dr. H. HOPF für die nächste Periode als Präsident der Internationalen Mathematischen Union gewählt wurde. E. STIEFEL

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Einführung in die Physik, Band I: *Mechanik, Hydromechanik und Thermodynamik*. Von P. FRAUENFELDER und P. HUBER (Ernst-Reinhardt-Verlag AG., Basel 1951). 492 S., 391 Abb.; sFr. 18.50.

Das vorliegende Buch ist nach dem Vorwort als Ergänzung zu Vorlesungen der Experimentalphysik gedacht. Dies erlaubt, grösstenteils auf die Beschreibung von Apparaten und Versuchen zu verzichten, und gibt dafür Gelegenheit zur Konzentration und zu einem systematischen Stoffaufbau. Ein solcher bedingt eine eindimensionale Ordnung der weiträumigen Stoffgebiete der Physik, für sich eine in jeder Hinsicht ideale Lösung wohl überhaupt nicht finden lässt. Im Buche von FRAUENFELDER und HUBER werden in einem einleitenden Kapitel zunächst die Grundeinheiten von Länge, Zeit und Masse mit den Dimensionen begriffen eingeführt. Daran schliesst sich eine kurze Darstellung der Vektoralgebra und der Fehlertheorie. Die Mechanik beginnt darauf mit der Statik der freien Körper unter Voranstellung der Newtonschen Prinzipien. Es folgen die Dynamik des Massenpunktes und der Systeme, die Elastizitätslehre und die Hydromechanik. Der zweite Teil des Buches ist der Thermodynamik gewidmet. Beim Lesen spürt man die grosse Erfahrung der Verfasser in der Vermittlung von Lehrstoff. In wohlthuendem Gegensatz zu manchen andern Lehrbüchern wird auf Punkte, die erfahrungsgemäss den Studierenden Schwierigkeiten bieten, mit besonderer Sorgfalt eingegangen. Gut geraten in dieser Hinsicht sind vor allem einzelne Kapitel der Thermodynamik und der kinetischen Theorie der Wärme. Wenn man auch gegen Einzelheiten Vorbehalte anbringen könnte – so etwa gegen die von den Verfassern getroffene Wahl der mechanischen Grundbegriffe –, bedeutet das keine Einschränkung der Anerkennung des hohen Wertes des

Buches und der Klarheit und Exaktheit seiner Darstellung. Je mehr man darin vertieft, um so mehr überrascht die Fülle des Stoffes, die wohl seltener dieser konzentrierten und doch immer klar verständlichen Form geboten wird. Besonders wertvoll dürften für den mit dem Stoff weniger Vertrauten die zahlreichen ergänzenden Zahlenbeispiele sein, bei denen je nach dem Stoffgebiete drei heute üblichen Maßsysteme (CGS-, Giorgi- und technisches System) Anwendung gelangen.

Die Sprache des Buches ist die knappe, sachliche Sprache des Physikers. Die sehr zahlreichen, trefflich gezeichneten, meist schematischen Abbildungen stellen eine wertvolle Ergänzung dar. Drucktechnisch wirkt der Text dank der Verwendung verschiedener Typen sehr übersichtlich. Zu bedauern ist, dass für die Grossenbezeichnung nicht konsequent kursive Buchstaben Verwendung fanden. An beanspruchen leider die zur Charakterisierung der Vektoren benützten Pfeile etwas viel Platz und bringen wegen des dadurch bedingten wechselnden Zeitabstandes eine gewisse Unruhe in das Textbild.

Gemäss dem Vorwort ist das Buch für naturwissenschaftlich interessierte Studierende gedacht. Es vermag aber auch bedeutend höhere Ansprüche zu befriedigen und dürfte jedem, der sich mit physikalischen Fragen beschäftigt, ein wertvolles Hilfsmittel für ein vertieftes Eindringen sein. Man wird daher das Erscheinen des zweiten Bandes mit besonderer Spannung erwarten. W. Harms

Advances in Electronics. Vol. IV, Edited by L. MARTON (Academic Press, New York, 1952). X + 344 pp., 118 figs.; \$7.80.

Über Ziel und Anlage der von L. MARTON herausgegebenen Sammlung «Advances in Electronics» haben wir bereits bei der Besprechung der früheren Bände dieser Bücherreihe berichtet. Der vorliegende vierte Band umfasst die folgenden Beiträge (welche diesmal bis auf einen aus amerikanischen Forschungsstäben stammen): H. S. W. MASSEY, *Electron Scattering in Solids*; G. A. MORTON, *Scintillation Counter*; A. VAN DER ZIEL, *Fluctuation Phenomena*; C. V. L. SMITH, *Electronic Digital Computers*; J. S. DONALD, JR., *Modulation of Continuous-Wave Magnetrons*; W. E. FROMM, *The Magnetic Airborne Detector*; M. G. PAWLEY and W. E. TRIEST, *Multichannel Radio Telemetering*.

Was von den früheren Bänden Lobendes gesagt werden konnte, kann auch für Band IV wiederholt werden. Jedenfalls darf auch dieser Band auf das Interesse eines weiten Leserkreises zählen, bildet doch jeder einzelne der Beiträge eine ausgezeichnete Übersicht über das von ihm behandelte Gebiet. A. A. Rusterholz

Sampling Techniques. By W. C. COCHRAN (J. Wiley & Sons, New York, 1953), 330 pp.; \$6.50.

Dieses Buch gibt eine gute Darstellung der modernen Stichprobentheorie und -technik, wie sie hauptsächlich in den letzten zwanzig Jahren, unter wesentlicher Mitwirkung des Autors dieses Buches, entwickelt wurde. Es behandelt vor allem die technischen und praktischen Fragen, die sich bei der Anwendung statistischer Stichproben stellen, wie zum Beispiel: Wie gross soll die Stichprobe gewählt werden, und welche Schlüsse können aus ihr gezogen werden? Welches Sicherheitsniveau besitzen diese Schlüsse? Die Theorie wird stets an Hand praktischer Beispiele demonstriert; ferner enthält das Buch eine Fülle von Aufgaben.

Der Leser muss die wichtigsten Verteilungen, ihre zugehörigen Begriffe und statistischen Tests kennen, wenn er das Buch verstehen will. Es gibt allen denjenigen eine vorzügliche Anleitung, die auf möglichst rationelle Art Statistiken anlegen und deren Resultat verwerten wollen. W. S. S.